C.E.C.S.A.

CARDENAS · CURIEL · LLUIS
PERALTA · TAVERA · VILLAR
MATEMATICAS PRIMER CURSO
CECSA

MATEMATICAS

PRIMER CURSO

CARDENAS · CURIEL · LLUIS
PERALTA · TAVERA · VILLAR

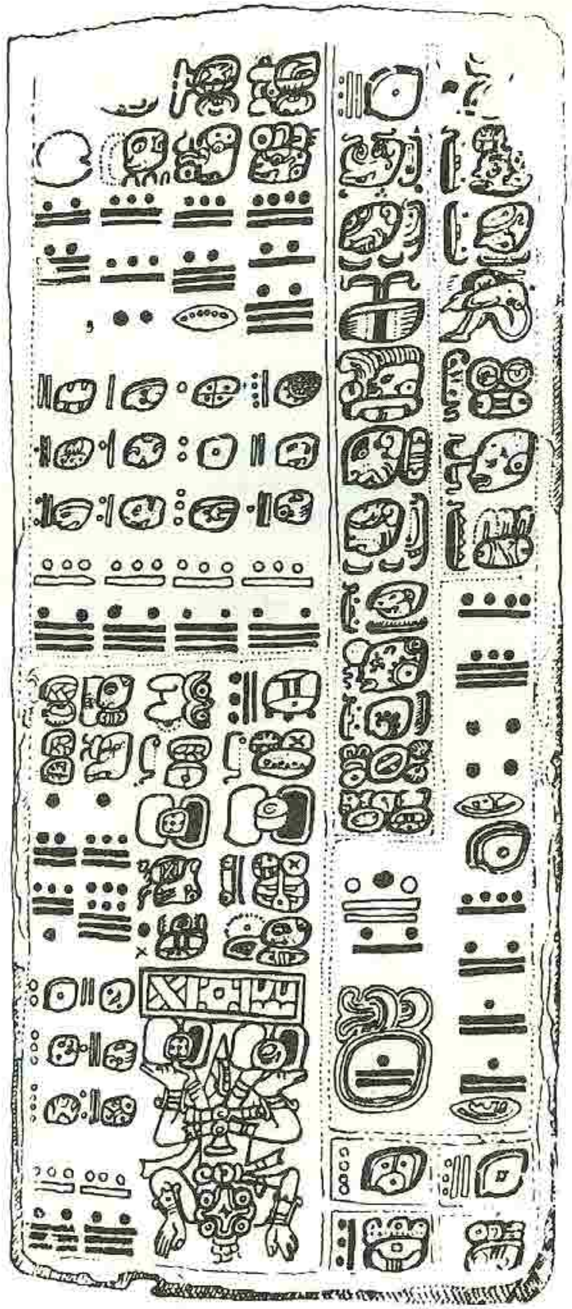
C.E.C.S.A.

MATEMATICAS

Primer Curso

Edición de acuerdo con el programa escolar vigente 1975-1976

Tercera edición



Códice de Dresden

MATEMATICAS

Primer Curso

Edición de acuerdo con el programa escolar vigente 1975-1976

DR. HUMBERTO CARDENAS TRIGOS
Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.

PROFR. MIGUEL ANGEL RAFAEL CURIEL ARIZA
Escuela Normal Superior, México

DR. EMILIO LLUIS RIERA
Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.

PROFR. FIDEL PERALTA CORONA
Escuela Normal Superior, México

PROFR. CUAUHTEMOC TAVERA GUERRERO
Escuela Normal Superior, México

PROFR. ELIAS VILLAR QUIJANO
Escuela Normal Superior, México

Tercera edición

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
MEXICO – ESPAÑA – ARGENTINA – CHILE – VENEZUELA

SUCURSALES, DEPOSITOS Y REPRESENTACIONES EN:

Bolivia — Brasil — Colombia — Costa Rica — Dominicana — Ecuador — El Salvador
Estados Unidos — Guatemala — Honduras — Nicaragua — Panamá — Paraguay — Perú
Portugal — Puerto Rico — Uruguay

Edición autorizada por los autores

Primera edición: septiembre de 1970

Reimpresiones: septiembre de 1970; noviembre de 1970; marzo de 1971; octubre de 1971; julio de 1972; junio de 1973

Segunda edición de acuerdo con el programa escolar vigente: julio de 1974

Reimpresiones: septiembre de 1974; septiembre de 1974; octubre de 1974; octubre de 1974; noviembre de 1974; enero de 1975

Tercera edición de acuerdo con el programa escolar vigente: agosto de 1975

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.

CALZ. DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

AV. REP. ARGENTINA NÚM. 168, BARCELONA 6, ESPAÑA
SOLÍS NÚM. 1262, BUENOS AIRES, ARGENTINA
AMUNÁTEGUI NÚM. 458, SANTIAGO DE CHILE, CHILE
CRUZ VERDE A VELÁZQUEZ, EDIFICIO CENTRO CRUZ VERDE,
LOCAL 12, CARACAS, VENEZUELA

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

INTRODUCCION

La presente obra fue escrita con la idea de proporcionar, tanto al alumno como al maestro del primer grado de educación media básica, un auxiliar que facilite su labor en el aula.

El libro se hizo considerando los lineamientos que señala el programa oficial vigente y es un desarrollo completo de éste. Sin embargo las ocho unidades en que se presenta el material fueron elaboradas con bastante independencia unas de otras; de tal manera que cada maestro puede estudiarlas con sus alumnos en el orden que juzgue conveniente, según los intereses o las características del grupo.

Además creemos que esta independencia dada a las unidades, permitirá al profesor decidir, sin ningún perjuicio para el curso, cuáles de ellas deberán estudiarse a fondo y cuáles podrán verse un tanto superficialmente, de acuerdo con las exigencias de tiempo o según las necesidades de los alumnos.

Estamos convencidos que ninguna obra es perfecta y que, en el caso específico de este libro, serán los maestros quienes con sus opiniones y sugerencias, habrán de ayudarnos a mejorarlo para beneficio de la juventud estudiosa de México.

Los autores.

CONTENIDO

PRIMERA UNIDAD

LOGICA Y CONJUNTOS

SEGUNDA UNIDAD

OPERACIONES CON NUMEROS NATURALES

TERCERA UNIDAD

SISTEMAS DE NUMERACION

CUARTA UNIDAD

FACTORIZACION

QUINTA UNIDAD

LOS NUMEROS RACIONALES NO NEGATIVOS PROPORCIONALIDAD

SEXTA UNIDAD

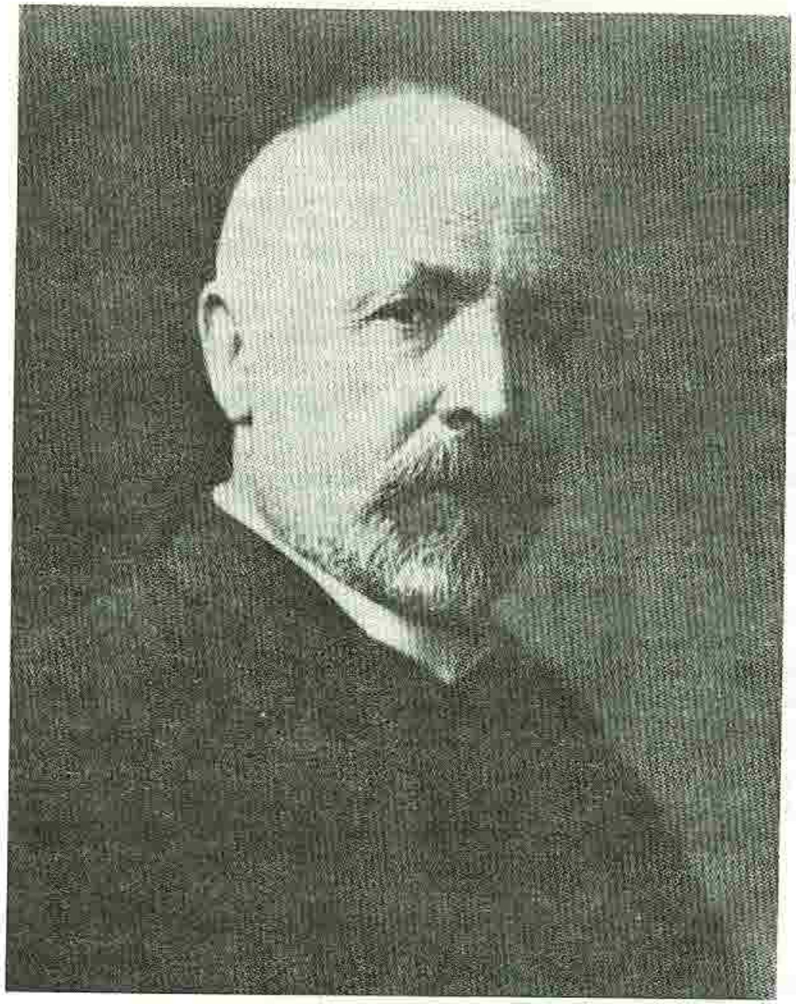
LOS NUMEROS ENTEROS Y SUS OPERACIONES

SEPTIMA UNIDAD

GEOMETRIA Y METRICA

OCTAVA UNIDAD

REGISTROS ESTADISTICOS Y PROBABILIDAD



GEORG CANTOR (1845–1918)

Matemático alemán, creador de la teoria de conjuntos

PRIMERA UNIDAD

LOGICA Y CONJUNTOS

1. PROPOSICIONES

Al leer un libro, al conversar, al escuchar la radio, etc. Nos encontramos constantemente con una gran diversidad de expresiones. Algunas de estas expresiones poseen cierta característica que nos permite distinguirlas de las demás.

La característica a que nos referimos es que son calificables de falsas o verdaderas. En cambio otras expresiones, como veremos a continuación, no poseen esta característica.

Veamos las siguientes expresiones.

a) Lima es la capital del Perú.
b) 3 es menor que 4.
c) Saturno es el mayor planeta del sistema solar.
d) Problemas de regla y compás.
e) ¿En que año naciste?

Observe usted que podemos calificar de falsa o verdadera cada una de las tres primeras expresiones. Sin embargo, con las dos últimas esto no tiene sentido.

Ejercicio 1. A la derecha de cada una de las siguientes expresiones, escriba V si es verdadera, F si es falsa, o bien, NC si considera que la expresión no es calificable.

a) La capital de Suecia es Estocolmo.
b) $4 + 1 = 5$.
c) Isaac Newton fue un matemático francés.
d) 18 es múltiplo 3.
e) El agua está formada de oxígeno e hidrógeno.

f) Reglas de buen comportamiento y urbanidad.
g) El 5 es un número primo.
h) El mercurio no es un metal.
i) ¿Qué hora es?
j) 4 es divisor de 44.

Aquí llamaremos *proposición lógica* a toda expresión que puede ser calificada de verdadera o falsa.

2. PROPOSICIONES ABIERTAS

Seguramente usted habrá observado en algunos cuestionarios, expresiones como la siguiente:

____________________ es el autor de "Los Tres Mosqueteros".

Si sobre esta línea escribimos Alejandro Dumas, obtendremos una proposición verdadera. Si sobre la línea escribimos un nombre diferente de Alejandro Dumas obtendremos una proposición falsa.

Observe usted que antes de escribir un nombre sobre la línea, es imposible calificar la expresión de falsa o verdadera.

A expresiones como las siguientes les llamaremos **proposiciones abiertas.**

____________________ descubrió América en 1492.

____________________ es un mes cuyo nombre empieza con M.

$\square$ es menor que 8

$\square + 6 = 30$;

Ejercicio 2. En cada inciso, a partir de la proposición abierta, obtenga una proposición lógica. (Puede obtener proposiciones verdaderas o falsas.)

a) $\square$ es un número impar.
b) Las guerras púnicas fueron entre cartagineses y ________.
c) $\square < 8$.
d) ____________________ descubrió el Océano Pacífico.
e) $\square$ es múltiplo de 9.
f) ____________________ inventó el fonógrafo.
g) La ____________________ es un ave zancuda.
h) $9 = 2 + \square$.
i) $x - 6 = 4$.
j) ____________________ es el planeta más cercano al Sol.

3. PROPOSICIONES Y CONJUNTOS

Cuando un zoólogo estudia los diferentes tipos de abejas, le resulta útil considerar el conjunto de todas las abejas.

Cuando un profesor de matemáticas estudia algunas propiedades de los números naturales, le será útil considerar el conjunto de todos los números naturales.

Al conjunto de todos los elementos que se consideran durante un determinado estudio, frecuentemente se le llama *conjunto universal* y se le denota con la lètra U. Así, el zoólogo mencionado anteriormente puede llamar conjunto universal al conjunto de todas las abejas y denotarlo con U. También el profesor de matemáticas puede llamar conjunto universal al conjunto de los números naturales y llamarlo U.

Consideremos ahora como conjunto universal, al conjunto de meses del año. Esto es,

U = {enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}

(Frecuentemente denotaremos un conjunto escribiendo una lista de todos sus elementos entre llaves.)

Consideremos además la siguiente proposición abierta.

________________ es un mes cuyo nombre termina con e.

Observe usted, que esta proposición determina un conjunto, precisamente el conjunto de meses que hacen la proposición verdadera. Es decir, determina el conjunto

{septiembre, octubre, noviembre, diciembre}.

Ejercicio 3. En cada inciso describa el conjunto que determina la proposición abierta.

a) U = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}.

El ________ es un día de la semana cuyo nombre termina con *s*.

{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes}.

b) U es el conjunto de los dígitos. Es decir,
$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

■ es un dígito impar.

c) U es el conjunto de los dígitos.

■ es menor que 7.

d) U es el conjunto de planetas del sistema solar.

X
________ es un planeta del sistema solar.

e) U es el conjunto de los números naturales.

■ es un divisor de 8.

f) U es el conjunto de consonantes del alfabeto español.

________ es una consonante de la palabra Brasil.

g) U es el conjunto de los números naturales.

■ es un divisor de 12.

h) U = { rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, índigo}.

El ________ es un color primario.

i) U es el conjunto de los números naturales.

$8 \times ■ = 5$.

j) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$■ + 6 = 10$.

Seguramente usted habrá observado que en el ejercicio anterior hay algunos casos en que *todos* los elementos de U hacen verdadera la proposición abierta; en otros casos esto sólo sucede con *algunos* elementos de U. Y además también hay casos en que *ningún* elemento de U hace verdadera la proposición abierta.

Ejercicio 4. En relación al ejercicio anterior, diga en qué incisos:

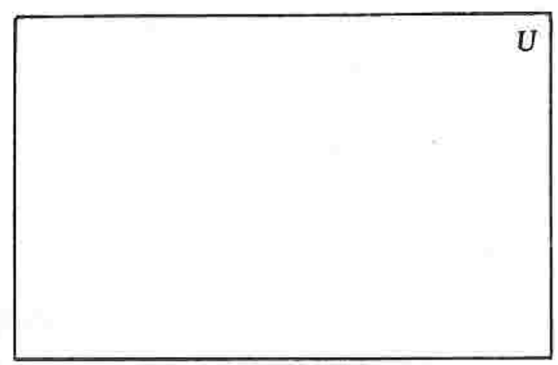
a) *Todos* los elementos de U hacen verdadera la proposición abierta.

b) *Algunos* elementos de U hacen verdadera la proposición abierta.

c) *Ningún* elemento de U hace verdadera la proposición abierta.

4. DIAGRAMAS DE VENN

Para visualizar algunos conjuntos es conveniente a veces utilizar algunas figuras. Por ejemplo, podríamos representar al conjunto U de todas las palabras del castellano con un rectángulo.

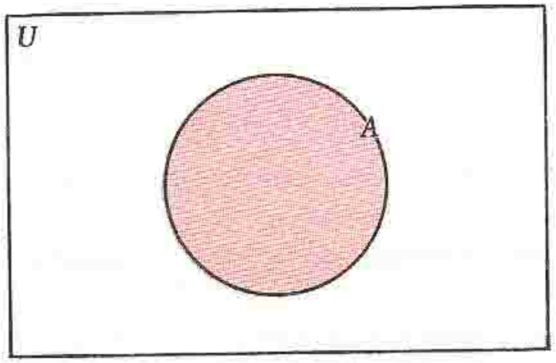


Consideremos ahora la proposición abierta siguiente:

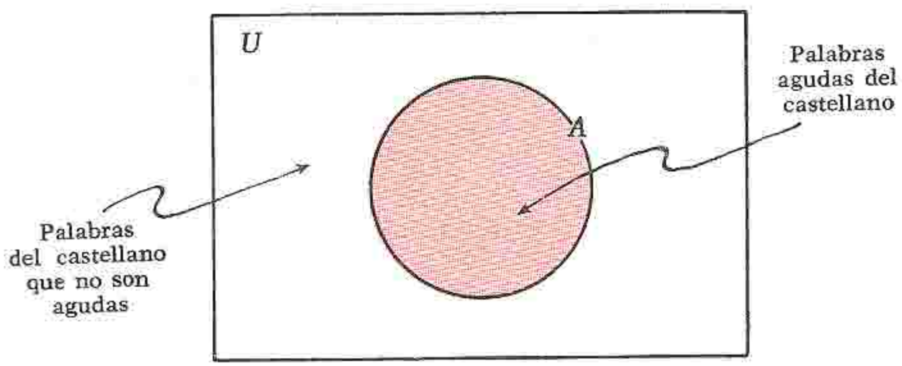
________ es palabra aguda del castellano.

Como hemos visto anteriormente, esta proposición abierta determina un conjunto. En este caso el conjunto de palabras agudas del castellano, al cual llamaremos A.

Este conjunto puede ilustrarse en el conjunto universal, de la siguiente manera:



En este diagrama la región coloreada representa el conjunto de palabras agudas del castellano. La región del rectángulo que no está coloreada representa las palabras del castellano que no son agudas. Esto es,



Diagramas como éste reciben el nombre de diagramas de Venn.

5. UNION DE CONJUNTOS

Consideremos ahora como conjunto U a los doce meses del año. También consideremos las proposiciones abiertas siguientes:

__________________ es un mes cuyo nombre lleva la letra *a*.

__________________ es un mes cuyo nombre termina con la letra *o*.

Estas proposiciones nos determinan dos conjuntos que llamaremos A y B respectivamente.

$A = \{$marzo, abril, mayo, agosto$\}$

$B = \{$enero, febrero, marzo, mayo, junio, julio, agosto$\}$

A partir de estos dos conjuntos construiremos un tercer conjunto con todos los elementos que están en A o en B (o en ambos). Este conjunto es llamado **la unión** de A y B y se simboliza $A \cup B$.

$A \cup B = \{$enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto$\}$

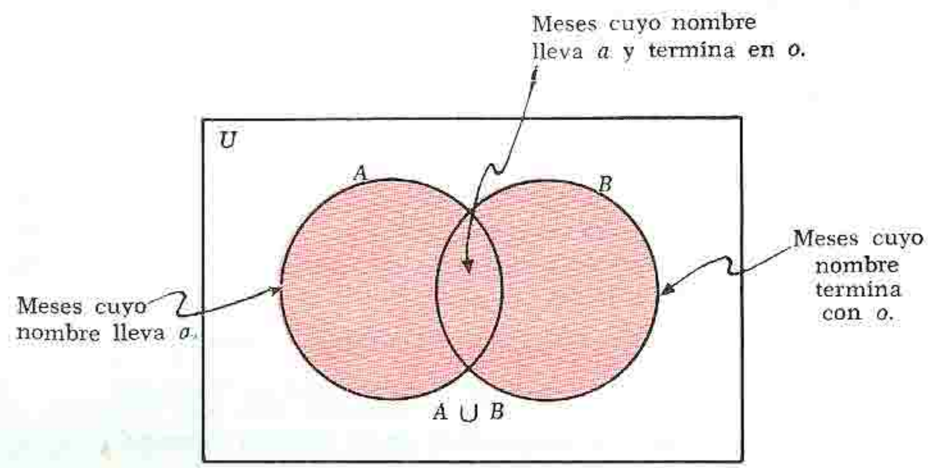
Observe que este conjunto se determina también con la siguiente proposición abierta.

__________________ es un mes cuyo nombre lleva la letra *a* o termina con la letra *o*.

En general decimos que:

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que están en A o en B (o en ambos).

La unión de conjuntos puede ilustrarse mediante un diagrama. En este caso resulta el siguiente:



Veamos otro caso. Consideremos el conjunto U de todos los números naturales, y las proposiciones abiertas.

es un número menor que 7.

es un divisor de 35.

Como antes, llamemos A y B respectivamente a los conjuntos determinados por estas proposiciones abiertas.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{1, 5, 7, 35\}$$

Construimos el conjunto $A \cup B$ con los elementos que pertenecen a A o a B (o a ambos).

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 35\}$$

Observe que este conjunto también queda determinado con la proposición.

es un número menor que 7 o divisor de 35.

Ejercicio 5. Encuentre el conjunto unión que se pide en cada inciso.

a) Dados los conjuntos,

$$A = \{\text{América, Europa}\}$$

$$B = \{\text{Asia, Oceanía}\}$$

$A \cup B =$

b) Si $M = \{a, b, c\}$, $N = \{e, f, g\}$, $R = \{g, h, i\}$, entonces

$M \cup N =$

$N \cup R =$

$M \cup R =$

Ejercicio 6. En cada inciso construya los conjuntos determinados por las proposiciones abiertas. Obtenga la unión de estos conjuntos y diga qué proposición abierta determina este conjunto. Utilice diagramas para ilustrar los conjuntos.

a) U es el conjunto de letras del alfabeto castellano.

________ es una consonante de la palabra "biología".

________ es una consonante de la palabra "tiempo".

b) U es el conjunto de los números naturales.

es un divisor de 14

es un divisor de 15

c) U es el conjunto de meses del año.

________ es un mes cuyo nombre empieza con vocal.

________ es un mes cuyo nombre empieza con m.

d) U es el conjunto de los números naturales.

es un número menor que 3

es un divisor de 8

e) U es el conjunto de planetas del sistema solar.

________ es un planeta cuyo nombre termina en o.

________ es un planeta cuyo nombre empieza con m.

6. INTERSECCION DE CONJUNTOS

Consideremos el conjunto U de los días de la semana y las siguientes proposiciones abiertas.

El ________ es un día de la semana cuyo nombre lleva la letra i.

El ________ es un día de la semana cuyo nombre lleva la letra r.

Estas proposiciones determinan los conjuntos

$$A = \{\qquad\}$$

$$B = \{\qquad\}$$

Formemos un conjunto con los elementos que pertenezcan tanto a A como a B. Este conjunto se llama **intersección de A y B** y se denota $A \cap B$.

$$A \cap B = \{\qquad\}$$

Observe que este conjunto también queda determinado con la proposición:

El __________ es un día de la semana cuyo nombre ______

En general decimos que:

***La intersección** de dos conjuntos es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos.*

Veamos otro caso. Consideremos el conjunto U de todos los números naturales y las proposiciones abiertas.

______ es un número menor que 9.

______ es un número mayor que 6.

Estas proposiciones determinan los conjuntos:

$A = \{$ ______ $\}$

$B = \{$ ______ $\}$

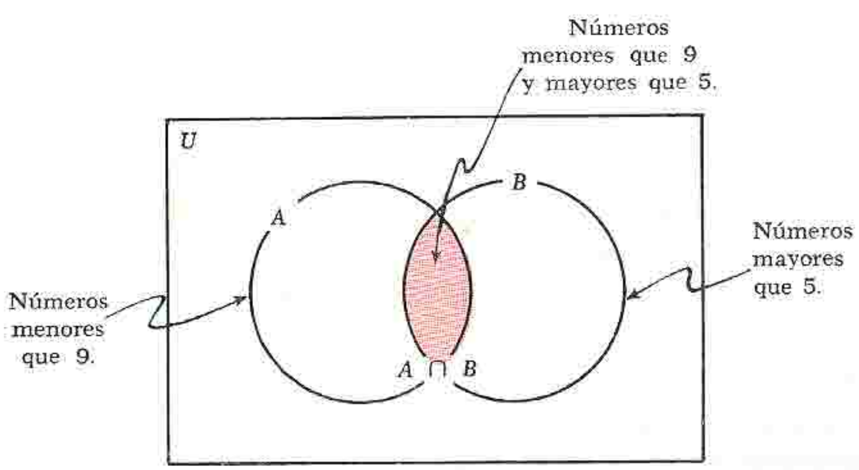
Con los elementos comunes a A y B, formamos la intersección de estos conjuntos.

$A \cap B = \{$ ______ $\}$

Como antes, observe que este conjunto también queda determinado con la proposición.

______ es un número ______

Podemos ilustrar lo anterior mediante el siguiente diagrama.



Ejercicio 7. En cada inciso construya los conjuntos determinados por las proposiciones abiertas. Obtenga la intersección de esos conjuntos y diga qué proposición abierta determina este conjunto. Use diagramas para ilustrar tales conjuntos.

a) U es el conjunto de letras del alfabeto castellano.

__________ es una consonante de la palabra "historia".

__________ es una consonante de la palabra "taller".

b) U es el conjunto de los números naturales.

______ es un número mayor que 7.

______ es un número menor que 12.

c) U es el conjunto de los números naturales.

______ es un divisor de 12.

______ es un número menor que 8.

d) U es el conjunto de los estados de la República Mexicana.

__________ es un estado que colinda con Estados Unidos.

__________ es un estado con costa.

e) U es el conjunto de los números naturales.

______ es un número menor que 5.

______ es un número mayor que 5.

7. PRODUCTO CARTESIANO

En un restorán ofrecen sopa de almejas, de berros o de camarón y tres guisados: robalo, salmón o ternera. ¿Cuáles son las diferentes formas en que puede usted ordenar una sopa y un guisado? Usted puede elegir almejas y robalo, almejas y salmón, almejas y ternera, etc.

Para ahorrarnos trabajo, al escribir las diferentes selecciones, indiquemos el conjunto de las sopas y el de guisados únicamente con su letra inicial. Esto es,

$$S = \{a, b, c\} \qquad G = \{r, s, t\}$$

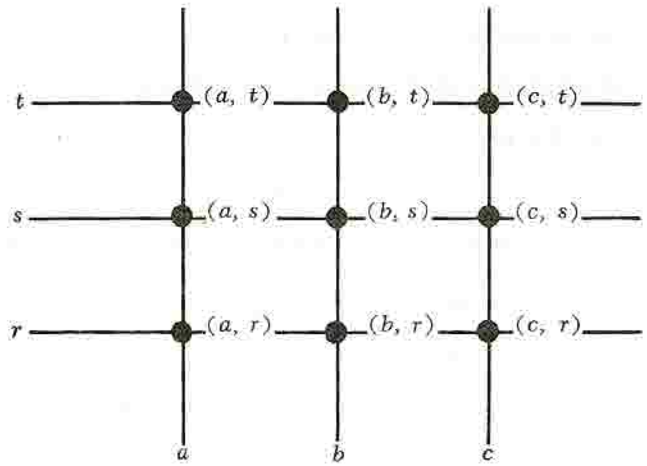
Entonces, las diferentes maneras de pedir una sopa y un guisado son:

$$\{(a, r), (a, s), (a, t), (b, r), (b, s), (b, t), (c, r), (c, s), (c, t)\}$$

(La primera pareja indica almejas y robalo, la segunda, almejas y salmón, etc.)

Este conjunto de pares ordenados es el *producto cartesiano* de los conjuntos S y G, y se denota $S \times G$.

El producto cartesiano puede representarse gráficamente. Por ejemplo, el conjunto $S \times G$ puede representarse así:



En general:

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los pares ordenados posibles; cuya primera componente pertenece a A y cuya segunda componente pertenece a B.

Ejercicio 8. Obtenga los siguientes productos cartesianos y represéntelos gráficamente.

a) $A = \{a, b\}$
$B = \{1, 2, 3\}$

$A \times B =$

b) $C = \{o, p, q\}$
$D = \{1, 2\}$

$C \times D =$

c) $P = \{m, n\}$
$Q = \{5, 6, 7, 8\}$

$P \times Q =$
$Q \times P =$

d) $M = \{1, 2, 3, 4\}$
$N = \{r, s\}$

$M \times N =$

e) $R = \{f, g, h\}$
$S = \{i, j, k, l\}$

$R \times S =$

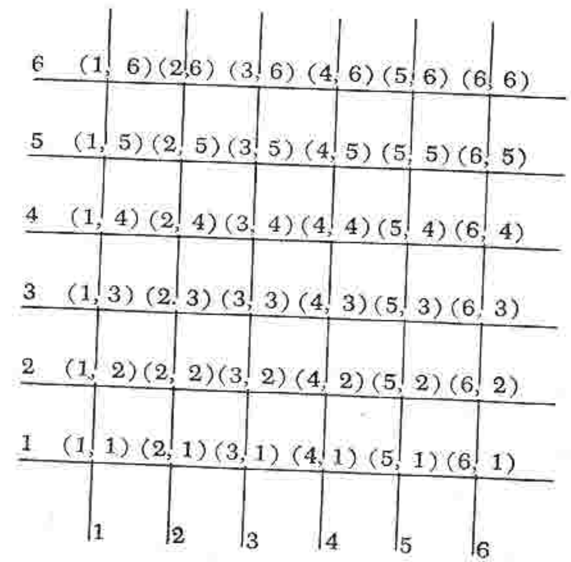
f) $G = \{1, 2, 3, 4\}$

$G \times G =$

Consideremos ahora el conjunto

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Y representemos el producto cartesiano $S \times S$ en un diagrama.



Observe usted que las componentes de los pares ordenados indicados con color hacen verdadera la siguiente proposición abierta de dos variables:

☐ es el doble de ☐

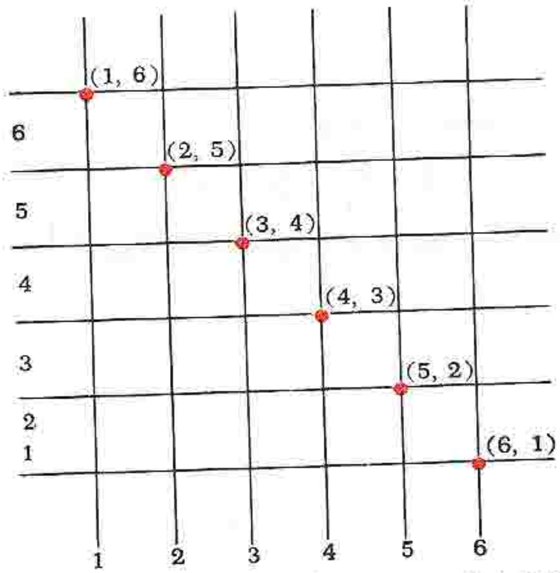
Al conjunto de los tres pares ordenados indicados con color le llamaremos una *relación* en $S \times S$.

Ejercicio 9. Obtenga en el producto anterior, $S \times S$ la relación determinada por la proposición abierta

□ es menor que □

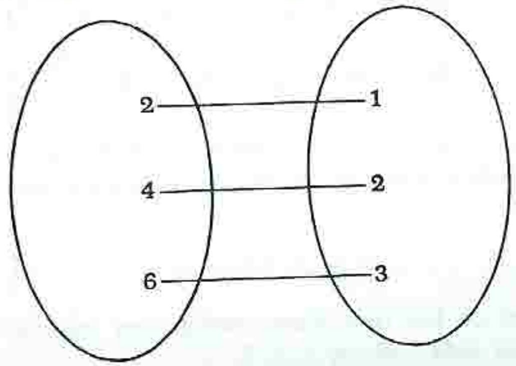
(Puede ayudarse con el diagrama anterior.)

Ejercicio 10. En el siguiente diagrama está indicada con color una relación en $S \times S$.



Indique cual es la propásición abierta que determina la relación mencionada.

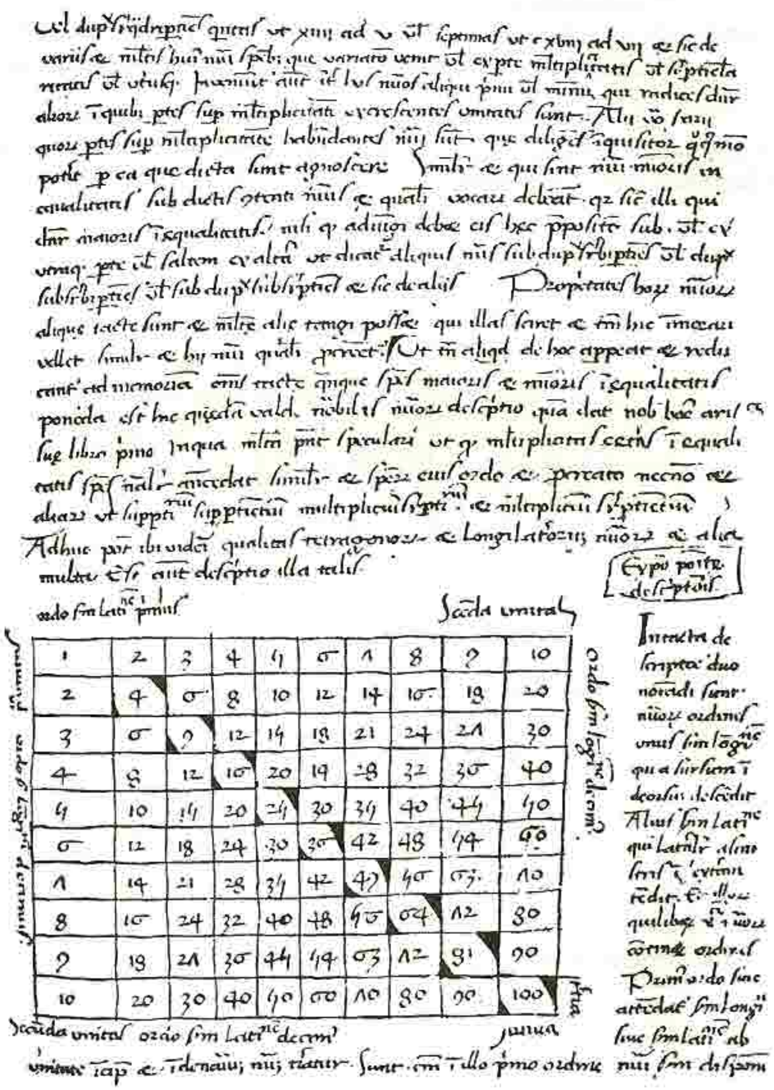
También podemos representar una relación por medio de otro tipo de diagramas. Por ejemplo, la relación en $S \times S$ determinada por la proposición □ es el doble de □, puede representarse así:



El conjunto de la izquierda recibe el nombre de **dominio** y el de la derecha de **codominio.**

Cuando en una relación, a cada elemento del dominio corresponde sólo un elemento del codominio, la relación se denomina **función.**

Ejercicio 11. Construya diagramas como el anterior para las relaciones mencionadas en los dos ejercicios anteriores y diga si las relaciones son funciones.



Página de un manuscrito latino del siglo xv. En ella aparece una tabla de multiplicación, cuya forma se le atribuye a Boethius

SEGUNDA UNIDAD

OPERACIONES CON NUMEROS NATURALES

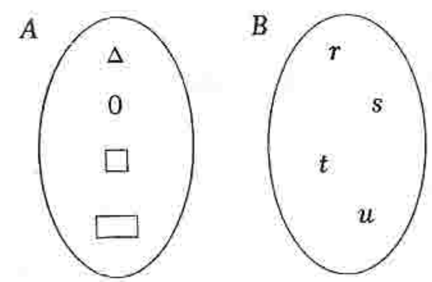
En esta unidad estudiaremos las operaciones con números naturales y veremos qué propiedades tienen esas operaciones para aplicar luego ese conocimiento en la resolución de ecuaciones y problemas.

I. EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES Y EL CERO

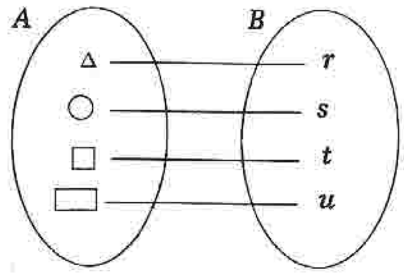
1. CONJUNTOS COORDINABLES

Iniciemos nuestro trabajo estudiando el concepto de conjuntos coordinables.

Consideremos, por ejemplo, los siguientes conjuntos A y B.



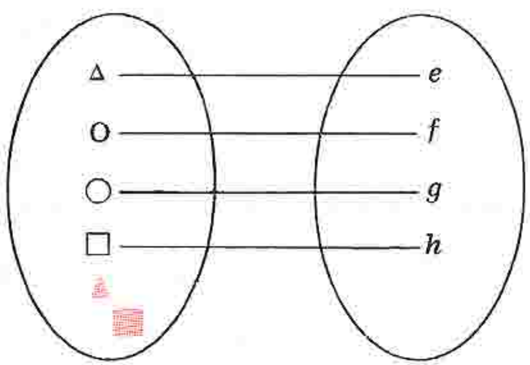
Ahora formemos parejas con los elementos de A y B tomando un elemento de A y uno de B sin repetir ninguno de ellos. Para indicar qué elementos forman pareja podemos usar líneas, como se muestra a continuación:



Aquí en particular, observamos que en ninguno de los dos conjuntos quedaron elementos sin formar parte de alguna pareja. En casos como éste decimos que los conjuntos A y B son *coordinables.*

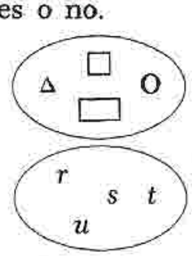
Si con el procedimiento anterior formamos parejas con los elementos de dos conjuntos y ocurre que en alguno de ellos sobra algún elemento, entonces decimos que los conjuntos *no* son coordinables.

Por ejemplo, los siguientes conjuntos no son coordinables.

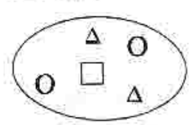


Ejercicio 1. En cada inciso diga si los conjuntos dados son coordinables o no.

a)



b) El conjunto de estaciones del año.

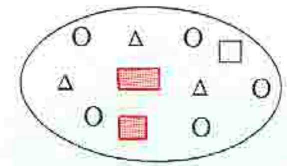


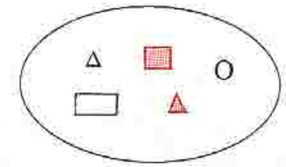
c) El conjunto de días de la semana. El conjunto de notas de la escala musical.

d) {a, e, i, o, u}
{a, b, c, d, e, f}

e) El conjunto de meses del año.

f) {w, x, y, z}





Es fácil darse cuenta que los conjuntos coordinables tienen el mismo número de elementos.

Ejercicio 2. Diga usted cuántos elementos tienen los siguientes conjuntos. Escriba primero entre llaves la lista de los elementos de cada conjunto, como se hace en el inciso a).

a) El conjunto T formado por las letras de la palabra Coatzacoalcos.

$T = \{c, o, a, t, z, l, s\}$; 7 elementos.

b) El conjunto D formado por los días de la semana.

c) El conjunto M formado por los meses del año.

d) El conjunto P formado por las áreas que se estudian en primer año de secundaria.

e) El conjunto Q formado por las consonantes de la palabra matemáticas.

Usted habrá observado que para indicar cuántos elementos tiene un conjunto empleamos alguno de los números 1, 2, 3, . . . Es decir, usamos algún número natural.

2. LOS NUMEROS NATURALES Y EL CERO

En muchas clínicas médicas, previamente a las consultas se reparten fichas numeradas. La persona que numera las fichas emplea para ello números naturales. Esto es, la persona utiliza algunos de los elementos del conjunto N = {1, 2, 3, 4, 5, . . .}.

En este conjunto de números, dado cualquier elemento sabemos cuál es el *siguiente* o *sucesor.* Por ejemplo, el siguiente de 3 es 4, el siguiente de 7 es 8, etc. El 1 no sigue a ningún número natural, es el primer número natural.

Es por eso que, una vez repartidas las fichas, cada paciente sabe cuándo es el siguiente en pasar a consulta y, en particular, el paciente con la ficha 1 sabe que no es el siguiente de ningún otro paciente, sino que será el primero en pasar a consulta.

Habrá usted observado que al indicar el conjunto de los números naturales no es posible escribir la lista de todos sus elementos. Por eso se emplean puntos suspensivos, para indicar que la lista continúa indefinidamente.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\},$$
$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

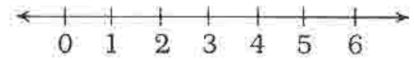
Para que nuestro estudio sea más completo, necesitamos considerar el conjunto que tiene como elementos al número cero y a los números naturales. A tal conjunto lo denotaremos con **W**, de modo que

$$\mathbf{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

y serán los elementos de este conjunto los que tomaremos para efectuar operaciones aritméticas.

3. RECTA NUMERICA

A fin de visualizar algunas relaciones y propiedades de los números se utiliza la siguiente representación gráfica:

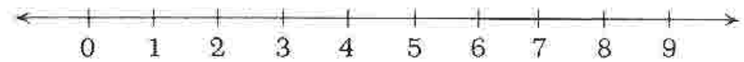


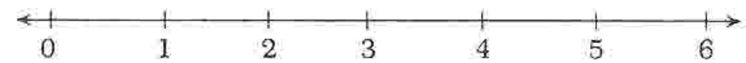
En esta representación, a cada elemento de **W** se le asoció un punto de una recta con las siguientes condiciones:

1a. A números consecutivos se les asociaron puntos consecutivos.

2a. La distancia entre dos puntos consecutivos cualesquiera es siempre la misma.

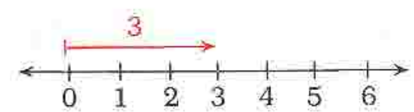
Otras representaciones pueden ser

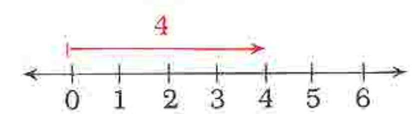


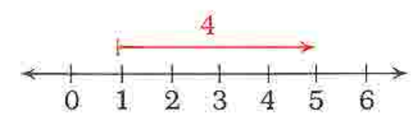


Note usted que la distancia entre dos puntos consecutivos se puede elegir arbitrariamente.

Para ilustrar posteriormente algunas operaciones es conveniente a cada número asociarle también un desplazamiento, como se muestra en los siguientes ejemplos.

1) 

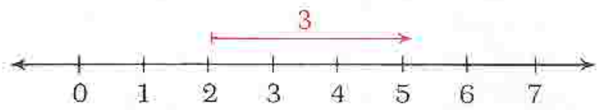
2) 

3) 

Observe usted que el desplazamiento queda indicado por una flecha y que ésta la podemos dibujar empezando en cualquier punto.

Ejercicio 3. En cada uno de los siguientes incisos indique desplazamientos que correspondan a los números dados. Trace la flecha a partir del punto señalado, como se hace en el inciso a).

a) El desplazamiento correspondiente a 3, trazado a partir del punto 2.

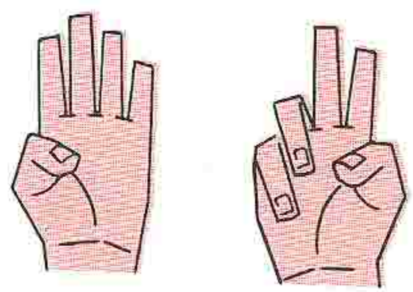


b) El desplazamiento correspondiente a 5, trazado a partir del punto 0.
c) El desplazamiento correspondiente a 3, trazado a partir del punto 2.
d) El desplazamiento correspondiente a 7, trazado a partir del punto 1.
e) El desplazamiento correspondiente a 6, trazado a partir del punto 2.

II. OPERACIONES CON NUMEROS NATURALES

1. ADICION

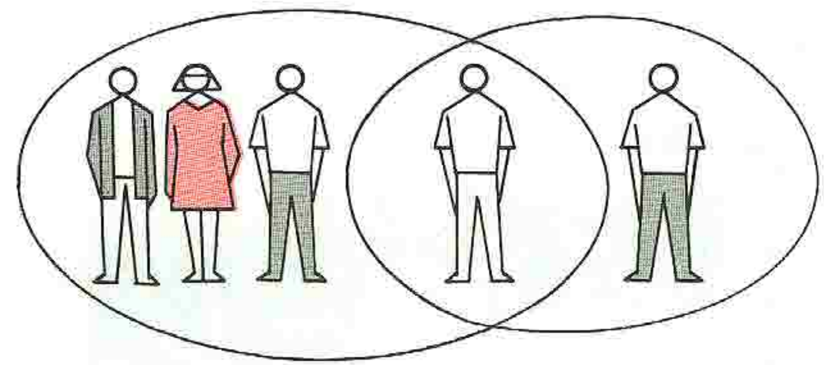
La unión de conjuntos sirve de base para comprender en qué consiste la adición. Por ejemplo, si preguntamos a un niño que no conoce las tablas de sumar, cuántos son cuatro más dos, para dar su respuesta primero considera cuatro dedos en una de sus manos y dos dedos en la otra; luego junta las manos, cuenta los dedos que muestra en ellas y nos contesta: "son seis".



¿Tendrá siempre seis elementos la unión de un conjunto de cuatro y otro de dos elementos?
Veamos el siguiente ejemplo:

En una familia, cuatro personas practican la natación y dos juegan fútbol. Sin embargo, la familia sólo tiene cinco miembros. ¿Es posible esto? Observe la siguiente ilustración:

Practican la natación Juegan fútbol



Como se ve en el ejemplo anterior, el número de elementos de la unión no es 6. En este caso, los conjuntos tienen un elemento común: la persona que juega fútbol y también practica la natación.
Resumiendo las ideas principales de los ejemplos anteriores, podemos decir que para sumar 4 y 2 procedemos como sigue:

Consideramos dos conjuntos *ajenos* A y B de 4 y 2 elementos, respectivamente, y formamos $A \cup B$. El número de elementos de $A \cup B$ es la suma de 4 y 2, y se denota $4 + 2$.
En general,

Si a y b son dos números naturales, entonces la suma de a y b es el número de elementos de $A \cup B$, en donde A y B son conjuntos ajenos, con a y b elementos respectivamente.

Problema. Se organizó una excursión con los miembros del club de danza y el club de teatro de una escuela. El encargado de comprar los boletos preguntó cuántos alumnos había en el club de danza y cuántos en el club de teatro. Al subir al autobús notó que le sobraron 12 boletos, a pesar de que no faltaba ningún miembro de esos clubes. ¿Cómo se explica esto amigo lector?
Usted aprendió en la escuela primaria a utilizar las palabras sumando y suma para referirse a los números que intervienen en una adición de números naturales.

Ejemplo

$$\underset{\text{sumando}}{\underset{\uparrow}{3}} + \underset{\text{sumando}}{\underset{\uparrow}{5}} = \underset{\text{suma}}{\underset{\uparrow}{8}}$$

y también sabe que la suma nunca puede ser menor que los sumandos.

Ejercicio 4. Encuentre la suma de los números dados en cada inciso, tal como se hace en a).

a) 13, 19 $13 + 19 = 32$

b) 83, 12

c) 35, 18

d) 96, 140

e) 75, 0

f) 1 487, 1

g) 565, 874

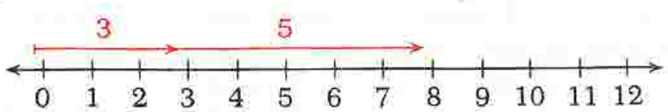
h) 13 915, 4 806

i) 75 847, 100 902

La adición en la recta numérica

Ya hemos explicado cómo se asocia a cada número natural un punto en la recta numérica y un desplazamiento indicado por una flecha. Ahora usaremos esa idea para ilustrar la adición de números naturales en la recta numérica.

Ejemplo. La adición de los números 3 y 5 se ilustra así:



Es decir, se indica un desplazamiento de 3 y a continuación un desplazamiento de 5. Así queda marcado el desplazamiento que corresponde a 8, la suma de 3 y 5.

Ejercicio 5. Como se hizo en el ejemplo anterior, indique la suma de cada pareja de números en una recta numérica.

a) 4, 6 b) 7, 2 c) 2, 7
d) 70, 10 e) 50, 40 f) 20, 30

Propiedades de la adición

Propiedad conmutativa

Una cajera va a sumar los precios de dos artículos, uno de \$275 y otro de \$59.

Al registrar los precios en la sumadora no piensa en el orden pues sabe que de cualquier manera el resultado será el mismo. Es decir, sabe que

$$275 + 59 = 59 + 275$$

Esto ocurre con cualquier pareja de sumandos. Por eso se dice que la adición satisface la propiedad conmutativa y se acostumbra expresar esto en la siguiente forma:

Si a y b son dos números naturales, entonces sumar $a + b$ da el mismo resultado que sumar $b + a$. En símbolos,

$$a + b = b + a.$$

Ejercicio 6. De acuerdo con la propiedad conmutativa de la adición complete las siguientes expresiones escribiendo el sumando que falta. (En este ejercicio las letras representan números naturales.)

a) $6 + 7 = 7 + \square$
b) $\square + 9 = 9 + 30$
c) $118 + \square = 6 + 118$
d) $39 + a = a + \square$

e) $x + 7 = \square + x$
f) $3 + z = \square + 3$
g) $p + q = q + \square$
h) $32 + 5 = \square + 32$
i) $\square + x = x + y$
j) $m + n = n + \square$
k) $r + s = s + \square$
l) $z + \square = 5 + z$
m) $190 + 8 = \square + 190$
n) $u + v = \square + u$

Ejercicio 7. Complete usted la siguiente tabla

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0						
1	1	2					
2	2	3	4				
3	3	4	5	6			
4	4	5	6	7	8		
5	5	6	7	8	9	10	
6	6	7	8	9	10	11	12

segundo sumando

primer sumando

¿Nota usted que en la tabla completa existe una simetría con respecto a la diagonal? Esta simetría es consecuencia de la propiedad conmutativa de la adición.

Propiedad asociativa

El Sr. Domínguez va a comprar café, jabón y medicinas. El puede hacer sus compras en una tienda y en una farmacia, de dos maneras distintas:

En la primera forma compraría así:

Tienda	*Farmacia*
10 pesos de café	5 pesos de jabón 20 pesos de medicinas

En la segunda forma compraría así:

Tienda	*Farmacia*
10 pesos de café 5 pesos de jabón	20 pesos de medicinas

El Sr. Domínguez piensa que su gasto total será el mismo en cualquiera de las dos formas:

En la primera forma, 10 + 5 + 20 pesos

En la segunda forma, 10 + 5 + 20 pesos

Para indicar las sumas anteriores podemos usar paréntesis, como se muestra a continuación:

Primera forma: $10 + (5 + 20)$

Segunda forma: $(10 + 5) + 20$

En estas dos expresiones se asocian los sumandos de manera distinta pero como el gasto total es el mismo, podemos escribir:

$$10 + (5 + 20) = (10 + 5) + 20$$

Esta última expresión es verdadera porque la adición satisface la propiedad asociativa.

En general,

Si a, b y c son números naturales, entonces sumar $(a + b) + c$ da el mismo resultado que sumar $a + (b + c)$. En símbolos,

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Según hemos visto, la adición se define para dos sumandos. Sin embargo, es frecuente el uso de expresiones como

$$15 + 7 + 11.$$

¿Qué significado podemos dar a las expresiones de este tipo? Podríamos interpretar $15 + 7 + 11$ de dos maneras: como el resultado de sumar el número $15 + 7$ y el número 11. Es decir,

$$(15 + 7) + 11,$$

o bien, como el resultado de sumar a 15 el número $7 + 11$. Es decir,

$$15 + (7 + 11).$$

Pero por la propiedad asociativa sabemos que $(15 + 7) + 11$ es igual que $15 + (7 + 11)$. Lo anterior justifica escribir $15 + 7 + 11$ sin paréntesis, pues cualquiera de las dos interpretaciones expresará el mismo número.

La propiedad asociativa nos permite encontrar la suma de 3 o más sumandos, sin importar la forma en que los asociemos.

Ejercicio 8. De acuerdo con la propiedad asociativa de la adición, complete las siguientes expresiones escribiendo el sumando que falta. (En este ejercicio las letras representan números naturales.)

a) $(a + 3) + 6 = \square + (3 + 6)$
b) $(3 + \square) + 8 = 3 + (9 + 8)$
c) $(a + 6) + 3 = \square + (6 + 3)$
d) $(c + d) + 8 = c + (\square + 8)$
e) $x + (y + \square) = (x + y) + z$
f) $t + (u + w) = (\square + u) + w$

Ejercicio 9. Encuentre la suma de los números dados en cada inciso.

a) 30, 97, 70
b) 85, 148, 115
c) 96, 204, 500
d) 1 500, 76, 1 200
e) 78, 190, 10, 45, 55

Elemento neutro

Sabemos que, por ejemplo,

$$4 + 0 = 4.$$

$$5 + 0 = 5.$$

En general, todo número natural sumado con cero da como resultado el mismo número. Esta propiedad se llama *del elemento neutro* y se puede expresar así:

Si a es un número natural, entonces

$$a + 0 = a.$$

Teniendo en cuenta la conmutatividad de la adición resulta que

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Decimos entonces que cero es el *elemento neutro aditivo* en el conjunto **W**.

Ejercicio 10. Utilizando la propiedad del elemento neutro de la adición simplifique las siguientes expresiones:

a) $46 + 0 = \square$
b) $0 + 817 = \square$
c) $0 + 1 = \square$
d) $0 + 0 = \square$
e) $316 + 0 = \square$
f) $3861 + 0 = \square$
g) $0 + 15136 = \square$
h) $0 + n = \square$
i) $t + 0 = \square$
j) $(4 + 3) + 0 = \square$

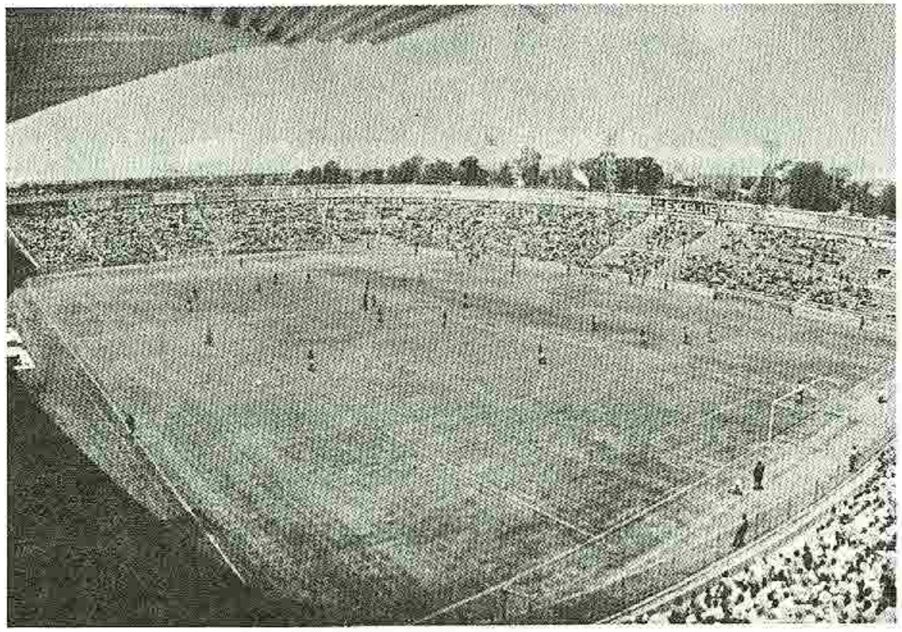
Ejercicio 11. Complete las siguientes expresiones escribiendo el sumando que falta.

a) $3 + \square = 3$
b) $4 = \square + 4$
c) $7 + \square = 7$
d) $0 = \square + 0$
e) $1 = \square + 0$
f) $\square + 195 = 195$
g) $246 + \square = 246$
h) $380 = 380 + \square$
i) $60 + 25 = (60 + 25) + \square$
j) $b + \square = b$

2. SUSTRACCION

Consideremos la siguiente situación:

En un partido de fútbol, hubo expulsiones y quedaron únicamente 18 jugadores en la cancha. ¿Cuántos jugadores expulsó el árbitro?



Como el número total de jugadores que deben estar sobre la cancha es 22, el número de jugadores expulsados más el número de jugadores que siguen en el juego es igual a 22. Esto lo podemos indicar con la expresión

$$\square + 18 = 22.$$

Expresiones como ésta se llaman ecuaciones, y cuando escribimos un número dentro de la casilla de manera que resulte una igualdad, decimos que hemos resuelto la ecuación.

Escriba usted dentro de la casilla el número que resuelve la ecuación:

$$\square + 18 = 22.$$

Al resolver usted la ecuación habrá encontrado que la solución es 4. Otra forma de denotar esta solución es 22 − 18, por lo que podemos escribir

$$22 - 18 = 4.$$

*La **sustracción** consiste en resolver ecuaciones como la anterior, es decir, en encontrar un sumando cuando se conocen la suma y el otro sumando.*

Ejercicio 12. Resuelva las siguientes ecuaciones, tal como se hace en el inciso a).

		Solución:
a) $\square + 3 = 9$	$9 - 3 = 6$	6
b) $4 + \square = 10$		
c) $\square + 7 = 8$		
d) $6 + \square = 13$		
e) $\square + 3 = 14$		
f) $7 + \square = 7$		

En toda sustracción intervienen tres números que se denominan de la siguiente manera:

minuendo		sustraendo		diferencia
28	−	8	=	20
suma		sumando conocido		sumando que se busca

Según se ve, la diferencia es el número que sumado con el sustraendo nos da el minuendo.

Ejemplo.

$$\underset{\text{minuendo}}{\underset{\uparrow}{13}} - \underset{\text{sustraendo}}{\underset{\uparrow}{9}} = \underset{\text{diferencia}}{\underset{\uparrow}{4}} \qquad \underset{\text{diferencia}}{\underset{\uparrow}{4}} + \underset{\text{sustraendo}}{\underset{\uparrow}{9}} = \underset{\text{minuendo}}{\underset{\uparrow}{13}}$$

Ejercicio 13. Efectúe las siguientes sustracciones y compruébelas, como se hace en a).

	Comprobación
a) $15 - 8 = 7$	$7 + 8 = 15$
b) $30 - 20 = \square$	$\square + \square$
c) $87 - 12 = \square$	
d) $190 - 81 = \square$	
e) $1496 - 865 = \square$	

En la sustracción, el cero tiene la siguiente propiedad:

Si a es un número natural, entonces

$$a - o = a$$

y

$$a - a = o$$

En efecto,

$$a - o = a \text{ porque } a + o = a$$

$$a - a = o \text{ porque } o + a = a$$

Problemas:

1. Un empleado federal recibe quincenalmente 4 cheques: uno por 981 pesos, otro por 64 pesos, otro por 237 pesos y otro por 397 pesos. ¿Cuánto gana mensualmente?

2. Juan desayuna un jugo de naranja, un vaso de leche, un huevo tibio, un bolillo, un pan de dulce y mantequilla. ¿Cuántas calorías ingirió en su desayuno, si los alimentos que consumió contienen respectivamente 82, 128, 75, 117, 116 y 72 calorías?

3. El oro se funde a una temperatura de 1 063°C. La temperatura de fusión del oro es 123°C mayor que la temperatura de fusión de la plata. ¿A qué temperatura se funde la plata?

4. El Distrito Federal en 1960 tenía 4 871 000 habitantes; de acuerdo con el censo de 1970 la población era de 7 746 000 personas. ¿Cuál fue el incremento de población en el periodo 1960-1970?

5. El Estado de Yucatán tiene una población de 840 000. Si la población rural es de 275 000, ¿cuál es la población urbana?

6. En 1968 México importó productos por valor de 1 943 millones de dólares, y exportó mercancías por 1 254 millones de dólares. ¿Cuál es la diferencia entre las importaciones y las exportaciones de ese año?

7. En 1967, México produjo 4 282 kg de oro, en 1968 produjo 4 449 kg y en 1969 produjo 4 645 kg. ¿Cuál fue el incremento en los periodos 1967-1968, 1968-1969 y 1967-1969? ¿Cuál fue la producción en el periodo 1967-1969?

8. La Edad Media comprende del año 476 al año 1453; la Epoca Moderna comprende de 1453 a 1789. ¿Cuántos años más duró la Edad Media que la Epoca Moderna?

9. En 1682 el astrónomo inglés Edmund Halley observó el cometa que lleva su nombre y predijo las reapariciones de 1758, 1834 y 1910. ¿Puede usted decir cuándo será la próxima aparición de ese cometa?

10. ¿Cuánto duró la "Guerra de los Cien Años", si empezó en 1337 y terminó en 1453?

11. La población de Suiza en 1968 era de 6 147 000 habitantes. De ellos, 307 431 eran católicos. ¿Cuántos no eran católicos?

12. El planeta Urano fue descubierto en 1781, Neptuno en 1846 y Plutón en 1930. ¿Cuántos años más tarde se descubrió Plutón que Urano, Plutón que Neptuno, Neptuno que Urano?

3. MULTIPLICACION

El señor García hizo un viaje con su esposa y sus dos hijos, Esteban y Pedro. Al final del mismo preguntó a éstos: "¿cuántos kilómetros hemos recorrido, si el viaje duró 3 horas y nuestra velocidad promedio fue de 60 kilómetros por hora?"

Esteban pensó que si el automóvil avanzó 60 kilómetros en una hora, entonces en 3 horas debió recorrer $60 + 60 + 60 = 180$ kilómetros.

Pedro aplicó la definición de multiplicación para resolver el problema pensando así: "Si en una hora se recorren 60 kilómetros, entonces en 3 horas se recorren $3 \times 60 = 180$ kilómetros."

La definición usada por Pedro en la resolución de este problema es la siguiente:

Si a y b son números naturales, entonces multiplicar $a \times b$ es sumar $b + b + b + \dots + b$, tantas veces como lo indique el número a. En símbolos,

$$a \times b = \underbrace{b + b + b + \dots + b}_{a \text{ sumandos}}.$$

Para que esta definición tenga sentido hay que suponer que a es un número natural mayor que 1. Pero a fin de completar la definición diremos también que $1 \times b = b$.

Definiremos además lo siguiente:

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

Recordemos que los números que intervienen en una multiplicación reciben el nombre de factores y producto.

Ejemplo.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{factor}}}{3} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{factor}}}{60} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{producto}}}{180}$$

Ejercicio 14. Utilizando la definición de multiplicación exprese los siguientes productos como sumas, según se muestra en los incisos a) y h). (Las letras representan números naturales.)

a) $2 \times 8 =$ $8 + 8$

b) $3 \times 6 =$

c) $4 \times 4 =$

d) $5 \times 7 =$

e) $3 \times a =$

f) $3 \times 0 =$

g) $5 \times 1 =$

h) $a \times 5 = \underbrace{5 + 5 + 5 + \ldots + 5}_{a \text{ sumandos}}$

i) $b \times 7 =$

j) $t \times 5 =$

k) $5 \times t =$

l) $a \times b =$

m) $1\,000 \times 7 =$

n) $100 \times a =$

Ejercicio 15. Exprese las siguientes sumas como productos, tal como se muestra en los incisos a) y g). (Las letras representan números naturales.)

a) $5 + 5 + 5 + 5 =$ 4×5

b) $4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$

c) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$

d) $1 + 1 + 1 + 1 =$

e) $p + p + p =$

f) $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 =$

g) $\underbrace{t + t + \ldots + t}_{50 \text{ sumandos}} =$ $50 \times t$

h) $\underbrace{5 + 5 + \ldots + 5}_{25 \text{ sumandos}} =$

i) $\underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{1000 \text{ sumandos}} =$

j) $\underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ sumandos}} =$

Ya que $m \times 0 = \underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{m \text{ sumandos}}$, se tiene que $m \times 0 = 0$

Es conveniente observar que no siempre para indicar el producto de dos números a y b empleamos el símbolo $a \times b$; es frecuente también el uso de las notaciones $a \cdot b$, o, simplemente, ab cuando no se presta a confusión.

Por ejemplo,

$m \times n = m \cdot n = mn$
$7 \times a = 7 \cdot a = 7a$
$2 \times z = 2 \cdot z = 2z$
$a \times 3 = a \cdot 3 = a3$

Sin embargo, cuando se trata de dos números, por ejemplo, 7 y 3, la última notación no puede usarse, pues si escribiéramos $7 \times 3 = 73$ esta última expresión tendría dos interpretaciones: 7 por 3 o el número setenta y tres.

Para evitar esto, cuando se trate de dos números expresados en forma decimal, por ejemplo, 11 y 3, si queremos omitir el símbolo $\times$ o el símbolo $(\cdot)$ usaremos paréntesis y escribiremos,

$$11 \times 3 = (11)3 = 11(3) = (11)(3)$$

Ejercicio 16. Efectúe las siguientes multiplicaciones.

a) $58 \times 10 =$

b) $790(2) =$

c) $(3)(501) =$

d) $146 \cdot 11 =$

e) $15 \cdot 900 =$

f) $(25)(800) =$

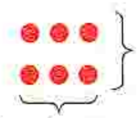
g) $(7)(a) =$

h) $0 \cdot n =$

Arreglos rectangulares

Ahora veremos cómo se puede ilustrar el producto de dos números naturales por medio de los llamados "arreglos rectangulares".

Por ejemplo, para ilustrar el producto 3×2 formamos un arreglo rectangular que conste de tres columnas y dos renglones:



2 renglones

3 columnas

El número de elementos del arreglo es el producto $3 \times 2 = 6$.

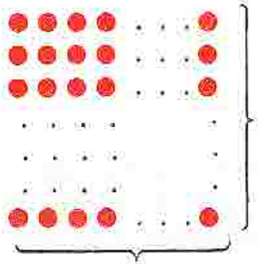
Ejemplo. Podemos ilustrar el producto de 6 y 4 con el siguiente arreglo rectangular:

4 renglones

6 columnas

El número de puntos del arreglo es $6 \times 4 = 24$.

En general, si a y b son dos números naturales, su producto será el número de elementos de un arreglo rectangular que conste de a columnas y b renglones.



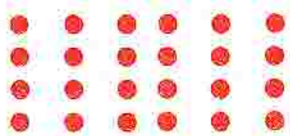
b renglones

a columnas

Ejercicio 17. Construya arreglos rectangulares que representen a los siguientes productos.

a) 3×3
b) 4×3
c) 1×4
d) 5×7
e) 3×2
f) 5×1
g) 4×5
h) 7×2

Ejercicio 18. Escriba los productos que se ilustran con los siguientes arreglos rectangulares:

a)  $\square \times \square$

b)  $\square \times \square$

c)  $\square \times \square$

d)  $\square \times \square$

Propiedades de la multiplicación

Propiedad conmutativa

Antes hemos visto que la adición tiene propiedad conmutativa. ¿La multiplicación tendrá también esta propiedad? Por ejemplo, ¿6×5 es igual a 5×6?

Nuestra experiencia nos indica que la multiplicación sí es conmutativa, pues

$$6 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$$

y

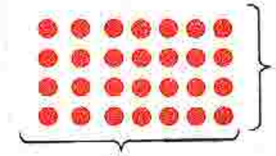
$$5 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$$

Esto es, $6 \times 5 = 5 \times 6$

En general, podemos indicar la propiedad conmutativa de la multiplicación así:

Si a y b son números naturales, entonces $ab = ba$.

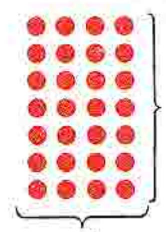
Ejemplo. $7 \times 4 = 4 \times 7$. Si formamos un arreglo rectangular que corresponda al producto 7×4, la disposición es la siguiente:



4

7

Ahora bien, si formamos un arreglo de puntos que corresponda al producto 4×7, la disposición es la siguiente:



7

4

y observamos que este último arreglo se puede obtener simplemente modificando la posición del primero.

Ejercicio 19. De acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación complete las siguientes expresiones escribiendo el factor que falta. (En este ejercicio las letras representan números naturales.)

a) $8 \times 3 = \square \times 8$
b) $\square \times 7 = 7 \times 5$
c) $m \, \square = n\, m$
d) $219 \times 7423 = 7423 \times \square$
e) $17 \times \square = 15 \times 17$
f) $87 \cdot a = a \cdot \square$
g) $x \cdot 7 = \square \cdot x$
h) $19 \cdot z = \square \cdot 19$

i) $pq = q\,\square$

j) $30 \times \square = 4 \times 30$

k) $xy = \square\, x$

l) $3 \cdot b = b \cdot \square$

m) $y \cdot 15 = 15 \cdot \square$

n) $\square\, s = sr$

Ejercicio 20. Complete la siguiente tabla de multiplicación:

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	2	4					
3	3	6	9				
4	4	8	12	16			
5	5	10	15	20	25		
6	6	12	18	24	30	36	
7	7	14	21	28	35	42	49

segundo factor

primer factor

Una vez completada la tabla podrá observar que existe una simetría con respecto a la diagonal. Esta simetría es consecuencia de la propiedad conmutativa de la multiplicación. ¿Recuerda usted que ocurría lo mismo en las tablas para la adición?

Propiedad asociativa

A cada uno de los alumnos de una escuela primaria se le van a obsequiar tres libros. ¿Cuántos libros se repartirán si en la escuela hay 10 grupos de 50 alumnos? Para calcular el número de libros necesarios, el controlador procedió de la siguiente manera: primero

calculó el número total de alumnos de la escuela, es decir, 10×50 y a continuación multiplicó este número por 3.

El ayudante del controlador calculó primero cuántos libros tenía que repartir en cada grupo, es decir, 50×3 y después multiplicó el número de grupos, que es 10, por el producto 50×3.

Las dos maneras de proceder pueden expresarse brevemente así:

Controlador	Ayudante del controlador
$(10 \times 50) \times 3$	$10 \times (50 \times 3)$
500×3	10×150
1 500	1 500

Naturalmente, ambos obtuvieron el mismo resultado. O sea

$$(10 \times 50) \times 3 = 10 \times (50 \times 3)$$

El hecho de que estos dos procedimientos den un mismo resultado es consecuencia de una propiedad muy importante de la multiplicación que se conoce con el nombre de propiedad asociativa. Esta es análoga a la propiedad asociativa de la adición y se puede enunciar de la siguiente manera:

Si a, b y c son números naturales, entonces

$$(ab)c = a(bc)$$

La propiedad asociativa de la multiplicación permite escribir productos de 3 o más factores sin especificar la forma en que se asocian, de manera que se pueden omitir paréntesis como se muestra en los siguientes ejemplos:

$(3 \times 4) \times (6 \times 2) = 3 \times 4 \times 6 \times 2$

$(3 \times 9) \times (4 \times 2) \times 9 = 3 \times 9 \times 4 \times 2 \times 9$

$(6 \times 4) \times (3 \times 9) \times 8 = 6 \times 4 \times 3 \times 9 \times 8.$

Ejercicio 21. De acuerdo con la propiedad asociativa de la multiplicación, complete las siguientes expresiones escribiendo el factor que falta. (En este ejercicio las letras representan números naturales.)

a) $(7 \times 5) \times 8 = \square \times (5 \times 8)$

b) $9 \times (\square \times 6) = (9 \times 4) \times 6$

c) $(a \times 7) \times 15 = a \times (\square \times 15)$

d) $(w \times t) \times \square = w \times (t \times s)$

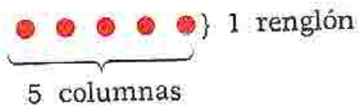
e) $t \times (8 \times r) = (t \times \square) \times r$

Ejercicio 22. Efectúe las siguientes multiplicaciones.

a) $3 \times 5 \times 4 =$ b) $8 \times 9 \times 10 =$
c) $14 \times 4 \times 25 =$ d) $25 \times 13 \times 4 \times 2 =$

Elemento neutro

El arreglo rectangular que representa al producto 5×1 es:



O sea, $5 \times 1 = 5$.

En general, al representar el producto $a \times 1$ mediante un arreglo rectangular, en donde a es un número natural, obtenemos

y, por lo tanto, $a \times 1 = a$.

Ahora bien, según la propiedad conmutativa se tiene que $1 \times a = a \times 1 = a$. Por eso,

> *Si a es un número natural, entonces*
>
> $$a \times 1 = 1 \times a = a$$

Lo anterior indica que el número 1 juega el mismo papel en la multiplicación que el 0 en la adición. Por ello al número 1 se le llama **elemento neutro de la multiplicación.**

Ejercicio 23. Efectúe las multiplicaciones que se indican.

a) $87 \times 1 =$ b) $1 \times 13 =$
c) $52 \times 5 \times 1 =$ d) $98 \times 1 \times 10 =$
e) $2 \times 47 \times 1 \times 5 =$ f) $n \times 25 \times 4 \times 1 =$

Propiedad distributiva

En los párrafos anteriores únicamente nos hemos ocupado de propiedades relativas o bien a la adición o bien a la multiplicación.

Ahora analizaremos una propiedad que relaciona las dos operaciones y que recibe el nombre de *propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.*

Consideremos primero un ejemplo:

Un profesor planteó a sus alumnos el siguiente problema: "Si una persona compra 4 plumas al precio de \$3 cada pluma, y 2 libretas también al precio de \$3, ¿cuánto debe pagar por la compra?"

Uno de los alumnos resolvió el problema así: multiplicó el precio de cada uno de los objetos por la suma del número de libretas y el número de plumas. Esto es,

$$3(4 + 2) =$$
$$= 3 \times 6 = 18.$$

Otro alumno multiplicó el precio por el número de plumas y a este número le sumó el producto del precio por el número de libretas. Esto es,

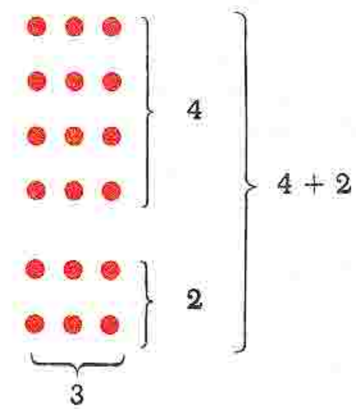
$$3 \times 4 + 3 \times 2 =$$
$$= 12 + 6 = 18.$$

Naturalmente, ambos obtuvieron el mismo resultado. Es decir, se tiene que

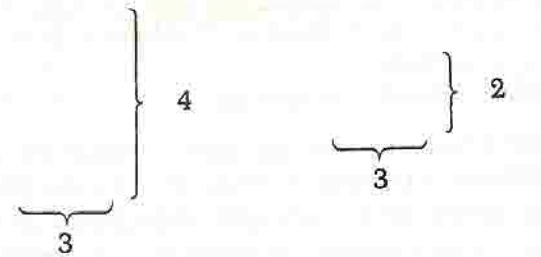
$$3(4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2.$$

A continuación ilustraremos esto con arreglos rectangulares:

El arreglo de puntos correspondiente al producto $3(4 + 2)$ es



El arreglo que corresponde a la suma $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$ es la unión de los arreglos que ilustran los productos $3 \cdot 4$ y $3 \cdot 2$



En ambos casos el número de puntos es el mismo. Esto es,

$$3(4+2)=3\cdot 4+3\cdot 2$$

Ejercicio 24. Tal como se hizo antes, dibuje arreglos rectangulares que ilustren las igualdades siguientes:

a) $2(3+4)=2\cdot 3+2\cdot 4$ b) $4(2+3)=4\cdot 2+4\cdot 3$
c) $(3+2)5=3\cdot 5+2\cdot 5$ d) $(6+2)3=6\cdot 3+2\cdot 3$

En general,

> *Si a, b y c son números naturales, entonces*
>
> $$a(b+c)=ab+ac.$$

Esta es la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Ejercicio 25. De acuerdo con la propiedad que acabamos de ver, complete las siguientes expresiones escribiendo el elemento que falta. (Las letras representan números naturales o cero.)

a) $19(6+12)=19\times\square+19\times 12$
b) $7(\square+9)=7\times 5+7\times 9$
c) $a(15+8)=a\cdot 15+a\cdot\square$
d) $\square(16+7)=b\cdot 16+b\cdot 7$
e) $w(\square+t)=wz+w\square$
f) $4\times 9+4\times 15=\square(9+15)$
g) $\square\times 7+\square\times 8=15(7+8)$
h) $a\cdot\square+a\cdot 5=a(15+5)$
i) $17\cdot t+17\cdot r=\square(t+r)$
j) $s\cdot w+s\cdot\square=s(w+p)$

4. DIVISION

La señora González compró unos vasos y pagó por ellos \$27. Si el precio de cada vaso es de \$3, ¿puede usted decir cuántos vasos compró?

¿Cómo supo el empleado que debía cobrar \$27 por los vasos? Es casi seguro que multiplicó el número de vasos por 3. Esto nos lleva a pensar en la siguiente ecuación.

$$\square\times 3=27.$$

Al resolver esta ecuación sabemos cuántos vasos compró la Sra. González.

La división consiste en resolver ecuaciones de este tipo. Es decir,

Dividir consiste en encontrar un factor, conocidos el producto y el otro factor.

Ejercicio 26. Resuelva las ecuaciones por medio de la división, como se hace en a) y b).

		Solución
a) $3\times\square=15$	$15:3=5$	5
b) $\square\times 6=24$	$24:6=4$	4
c) $\square\times 7=56$		
d) $\square\times 3=24$		
e) $9\times\square=45$		
f) $15\times\square=90$		
g) $13\times\square=2\,600$		
h) $36=\square\times 9$		
i) $70=7\times\square$		
j) $900=18=\square$		

En la división se acostumbra llamar *dividendo* al producto conocido, *divisor* al factor conocido y *cociente* al factor que se busca. Por ejemplo,

dividendo		divisor		cociente
54	:	6	=	$\square$
producto		factor conocido		factor que se busca

En el ejercicio anterior podemos observar que el cociente es el número que multiplicado por el divisor da el dividendo.

Ejemplo.

60	:	15	=	4	porque	4	×	15	=	60
dividendo		divisor		cociente		cociente		divisor		dividendo

Ejercicio 27. Tal como se hace en a), encuentre el cociente y compruébelo.

a) 80: 8 = □ porque □ × 8 = 80
b) 65: 5 = □ porque □ × 5 = 65
c) 120:24 = □ porque □ × 24 = 120
d) 1 568: 4 = □ porque □ × 4 = 1 568

Si quisiéramos dividir un número natural entre cero, tendríamos por ejemplo lo siguiente:

9	:	0	=	□
producto		factor conocido		factor que se busca

Como no hay ningún número que multiplicado por cero dé por resultado 9, decimos que la expresión 9:0 carece de significado.

Si quisiéramos dividir cero entre cero, tendríamos lo siguiente:

0	:	0	=	□
producto		factor conocido		factor que se busca

Como cualquier número natural multiplicado por cero da por resultado cero, la expresión 0:0 no tiene un significado único.

En vista de lo anterior, no manejaremos expresiones como

$$a:0$$

y

$$0:0$$

Observe los siguientes ejemplos:

4 : 1 = 4   16 : 1 = 16
5 : 1 = 5   183 : 1 = 183.
4 : 4 = 1   13 : 13 = 1
6 : 6 = 1   19 : 19 = 1.

En estos ejemplos puede usted ver que para todo número natural a,

$$a : 1 = a$$

y

$$a : a = 1$$

Ejercicio 28. Indique usted el número que falta en las expresiones siguientes:

a) 12 : 1 = □
b) 15 : 15 = □
c) 28 : □ = 1
d) 46 : □ = 46
e) □ : 84 = 1
f) □ : 1 = 789
g) 97 : □ = 1
h) 853 : □ = 853
i) 396 : □ = 396
j) 589 : □ = 1
k) □ : 1 = 746
l) □ : 237 = 1

División con residuo. (Algoritmo de la división)

¿Recuerda usted que la Sra. González pagó $27 por la compra de unos vasos? ¿Cuál es el mayor número de vasos de $3 que podría comprar con $50?

Tal vez usted resolvió el problema así:

$$\begin{array}{r} 16 \\ 3\overline{)50} \\ 20 \\ 2 \end{array}$$

de manera que puede comprar 16 vasos y le sobran $2; esto sugiere la expresión

$$50 = \underbrace{\square}_{\text{número de vasos que se compran}} \times 3 + \underbrace{\square}_{\text{número de pesos que sobran}}$$

Si una persona tuviera $70, ¿cuál es el mayor número de vasos de $3 que podría comprar? La pregunta sugiere la ecuación

$$70 = \square \times 3 + \square;$$

Seguramente usted procede así para resolver la ecuación

$$\begin{array}{r} 23 \\ 3\overline{)70} \\ 10 \\ 1 \end{array}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es

$$70 = 23 \times 3 + 1 .$$

Si esta ecuación no se relaciona con el problema, tendrá muchas soluciones. Una de ellas es

$$70 = 22 \times 3 + 4;$$

pero en el problema, el número de pesos que sobre debe ser menor que el número de pesos que cuesta un vaso. De otra manera no compraríamos el mayor número posible de vasos. Con la condición del problema sólo hay una solución.

Los ejemplos anteriores nos ayudarán a la exposición de las siguientes ideas.

Recordemos que dividir consiste en encontrar un factor, conocidos el producto y otro factor. De manera que dividir 28 entre 4 es resolver la ecuación

$$28 = \square \times 4.$$

Sin embargo, la ecuación

$$29 = \square \times 4$$

no tiene solución en el conjunto de los números naturales. En casos así, se considera la ecuación

$$29 = \square \times 4 + \square$$

la cual tiene muchas soluciones. Pero si agregamos la condición de que el número de la segunda casilla sea menor que 4, la solución es única:

$$29 = 7 \times 4 + 1$$

En expresiones de este tipo, los nombres que se dan a los números son:

29	=	7	×	4	+	1
dividendo		*cociente*		*divisor*		*residuo*

Si designamos al dividendo con D, al divisor con d, al cociente con c y al residuo con r tenemos que

$$D = c\,d + r, \text{ (con } r < d.)$$

Ejercicio 29. Resuelva las siguientes ecuaciones con la condición de que $r < d$.

a) $39 = \square \times 5 + \square$

b) $149 = \square \times 12 + \square$

c) $196 = \square \times 58 + \square$

d) $\square \times 23 + \square = 725$

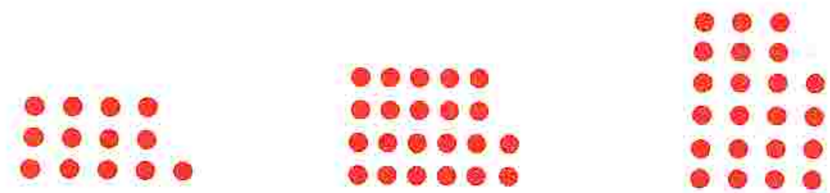
e) $647 \times \square + \square = 4121$

f) $\square \times 8 + 3 = 99$

g) $12 \times \square + 7 = 127$

h) $3 + 16 \times \square = 179$

Ejercicio 30. ¿Qué dividendo, divisor, cociente y residuo le sugiere cada uno de los siguientes arreglos de puntos?



¿Puede formar un arreglo semejante al anterior para ilustrar que $31 = (7 \times 4) + 3$?

Ejercicio 31. Efectúe las siguientes divisiones

a) $5\overline{)803}$ cociente: $\square$ residuo: $\square$

b) $16\overline{)513}$ cociente: $\square$ residuo: $\square$

c) $35\overline{)9\,584}$ cociente: $\square$ residuo: $\square$

d) $165\overline{)13\,906}$ cociente: $\square$ residuo: $\square$

Observe cuidadosamente el siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 7\overline{)38} \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 38 \\ -\ 7 \\ \hline 31 \\ -\ 7 \\ \hline 24 \\ -\ 7 \\ \hline 17 \\ -\ 7 \\ \hline 10 \\ -\ 7 \\ \hline 3 \end{array}$$

¿Encuentra alguna relación entre la división y la sustracción iterada?

Ejercicio 32. Encuentre por sustracción iterada el cociente y el residuo en las divisiones siguientes:

a)	45 : 8	f)	111 : 27
b)	73 : 3	g)	147 : 49
c)	85 : 24	h)	1 580 : 316
d)	168 : 52	i)	67 : 12
e)	1 500 : 485	j)	514 : 214

Problemas:

1.Un motor estacionario gira a 3 200 revoluciones por minuto. ¿Cuántas revoluciones dará en una hora?

2. Si los glúcidos, prótidos y lípidos proporcionan 4, 4 y 9 calorías por gramo, respectivamente, ¿cuántas calorías proporciona una dieta que consta de 420 gramos de glúcidos, 105 gramos de lípidos y 100 gramos de prótidos?

3. Un corredor en una hora de competencia, gasta siete calorías por cada kilogramo de peso. ¿Cuántas calorías gastará un corredor que compite durante dos horas si su peso es de sesenta y ocho kilogramos?

4. La longitud del río Nilo es 650 km más que el doble de la del río Bravo. Si la longitud del río Bravo es de 2 900 km ¿cuál es la longitud del Nilo?

5. Si un pentatleta hace un tiempo de 3 minutos y 54 segundos en 300 m nado libre, califica con 1 000 puntos. Cada segundo de variación sobre ese límite significa 6 puntos de más o de menos, según corresponda. ¿Cuál es la puntuación de una persona que nada los 300 m en 4 minutos 11 segundos?

6. La pirámide de Keops fue construida con 2 300 000 bloques de piedra de 2 500 kg cada bloque. ¿Cuál es el peso de esa pirámide?

7. ¿Cuántas olimpíadas se han celebrado desde la de 1896 hasta la de 1968, inclusive, si sabemos que se realizan cada cuatro años y que ha habido tres suspensiones?

8. Sabemos que aproximadamente, la distancia del Sol a la Tierra es de ciento cincuenta millones de kilómetros, y la velocidad de la luz es de trescientos mil kilómetros por segundo. ¿Cuántos segundos tarda la luz en llegar del Sol a la Tierra?

9. El sonido en el aire recorre aproximadamente 1 650 metros en 5 segundos. ¿Qué distancia recorre en un minuto?

10. La planta potabilizadora de Santa Cruz Meyehualco purifica 6 048 000 litros de agua diariamente. ¿Cuántos litros purifica en 7 días?, ¿en 10 días?, ¿en una hora?

11. Los Surveyor, vehículos espaciales no tripulados, que se usaron para la exploración de la Luna pesan 270 kg en la Tierra. Si la fuerza de gravedad de la Luna es 6 veces menor que la de la Tierra, ¿cuánto pesarán los Surveyor en la Luna?

12. Cada legión de la Roma antigua comprendía 30 compañías; la legión se componía de 3 000 hombres. ¿Cuántos hombres tenía cada compañía?

13. La suscripción a un diario cuesta anualmente $375.00. Si el diario cuesta $1.00, excepto los domingos en que cuesta $2.00, ¿cuánto se ahorra con la suscripción en un año de 52 domingos?

14. En una fábrica de resistencias eléctricas se toma una por cada 85 para llevar el control de calidad. ¿Cuántas resistencias pasan al control de calidad en una producción de 42 160?

15. La competencia de equitación consiste en un recorrido de 1 500 m con 9 obstáculos fijos y 14 derribables. La calificación máxima es de 1 100 puntos, y se disminuye de acuerdo con la siguiente tabla:

rehusar un obstáculo	30	puntos	menos
rehusar dos veces	60	puntos	menos
rehusar tres veces	100	puntos	menos
dar la vuelta	30	puntos	menos
derribar un obstáculo	30	puntos	menos
caída del caballo, jinete o ambos	80	puntos	menos
excederse en tiempo límite (por cada segundo)	5	puntos	menos

a) ¿Cuál es la puntuación de un jinete que se excede 1 minuto del tiempo, rehúsa un obstáculo 3 veces y derriba 1 obstáculo?

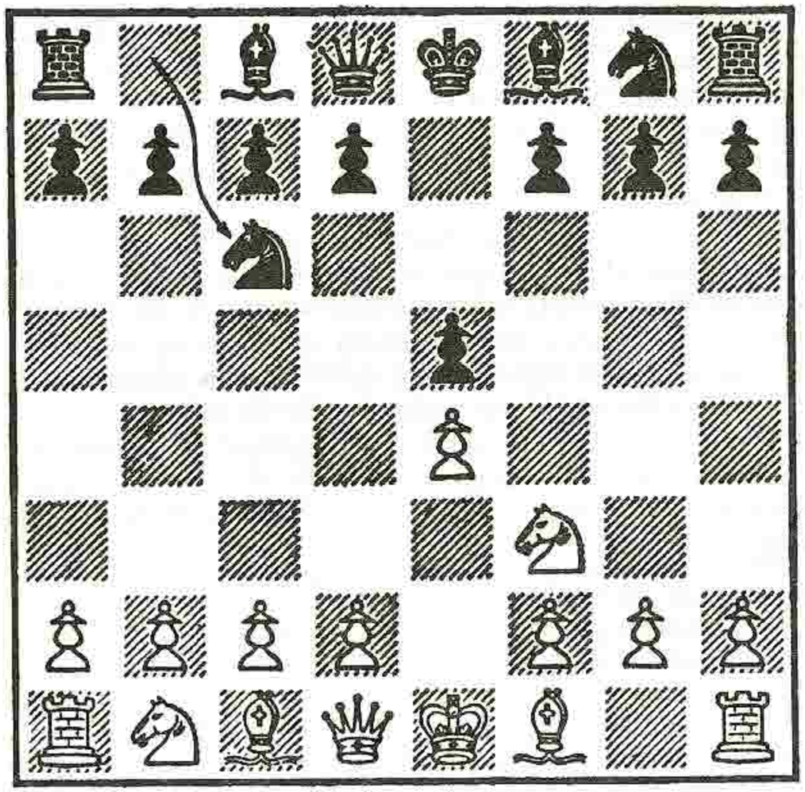
b) En una competencia, un jinete se excedió 1 minuto, y otro sufrió 4 caídas, ¿cuál de ellos tuvo mejor puntuación?

c) Si un jinete derribó 3 obstáculos, rehusó uno, y sufrió 2 caídas, ¿cuál fue su puntuación?

Potencias de números naturales

El ajedrez es sin duda uno de los juegos más antiguos e interesantes que se han inventado y existen muchas leyendas sobre su origen.

Una de estas leyendas dice que, habiéndose aficionado tanto a este juego, un poderoso rey decidió premiar al inventor concediéndole la oportunidad de pedir lo que él quisiera. El inventor, indudable-



mente conocedor de la aritmética, pidió, no sin antes meditarlo, que le entregaran dos granos de trigo por la primera casilla del tablero, 4 por la segunda, 8 por la tercera, 16 por la cuarta, y así sucesivamente.

El soberano, sintiéndose ofendido por lo que él creyó mísera recompensa ordenó que le fuera entregado un saco de trigo, pensando que con ello entregaba aún más de lo pedido. Pasadas algunas horas el rey preguntó si ya se había entregado la recompensa; grande fue su sorpresa cuando le informaron que todavía no terminaban el cálculo del número de granos solicitados.

Al día siguiente, una vez terminados los cálculos, se le informó que el monto de la recompensa solicitada era de

36 893 488 147 419 103 250 granos de trigo

y que, aun cuando ordenara sembrar todas las tierras conocidas se necesitarían muchas cosechas para que pudiera cumplir con su ofrecimiento.

Para analizar los cálculos que sugiere la leyenda tratemos de anotar en cada casilla el número de granos que le corresponde:

Con la misma notación indique cuántos granos de trigo le corresponde a cada una de las siguientes casillas:

5a. casilla

6a. casilla

10a. casilla

16a. casilla

Resulta ya laborioso indicar el número que corresponde a cada una de las últimas dos casillas. Ahora bien, para indicar el número de granos que corresponden a la 64a. casilla seguramente nos aburriremos al escribir 64 factores iguales a 2.

En matemáticas, para simplificar expresiones de este tipo se utiliza una notación especial.

Por ejemplo, a la 2a. casilla le corresponden 2×2 granos de trigo, lo cual se expresa simplemente como 2^2.

A la 3a. casilla $2 \times 2 \times 2 = 2^3$.
A la 4a. casilla $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.

De esta manera, para contestar a la pregunta, ¿cuántos granos de trigo le corresponden a la 28a. casilla?, podemos contestar 2^{28}. A la 64a. casilla 2^{64}.

Estos números reciben el nombre de **potencias** de 2. Ya usted se habrá dado cuenta que el número de veces que se toma el 2 como factor se indica con un número escrito en la parte superior derecha del 2.

La expresión 2^2 se lee "2 a la segunda potencia" (aunque es más común decir "2 al cuadrado").

La expresión 2^3 se lee "2 a la tercera potencia" (aunque es más común decir "2 al cubo").

La expresión 2^4 se lee "2 a la cuarta potencia", 2^n se lee "2 a la enésima potencia".

En la expresión 2^5 el número 2 recibe el nombre de base y el número 5 se llama exponente. Observe usted que el exponente indica el número de veces que la base figura como factor.

Desde luego, como $2^5 = 32$ podemos también decir que 32 es la 5ª potencia de 2.

En los ejemplos anteriores se han considerado solamente potencias del número 2; pero la misma notación y la misma nomenclatura se usa cualquiera que sea la base. Veamos los siguientes ejemplos:

	Base	Exponente
$3 \times 3 = 3^2$	3	2
$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$	5	6
$7 \times 7 \times 7 = 7^3$	7	3
$a \cdot a \cdot a = a^3$	a	3
$t \cdot t = t^2$	t	2
$\underbrace{8 \times 8 \times \ldots \times 8}_{15 \text{ factores}} = 8^{15}$	8	15
$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}} = a^n$	a	n

Ejercicio 33. Escriba cada potencia como un producto de factores, de manera semejante a los incisos a) y b).

	Base	Exponente
a) $5^n = \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times \ldots \times 5}_{n \text{ factores}}$	5	n
b) $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$	a	4
c) $6^3 =$		

d) $z^5 =$

e) $6^{37} =$

factores

f) $t^{25} =$

factores

g) $m^p =$

factores

En general,

Si a es un número natural y n es mayor que 1, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Hasta aquí hemos utilizado como exponentes números naturales mayores que 1. Para complementar la notación exponencial definimos

$a^1 = a$ para todo número entero a,
$a^0 = 1$ para todo número diferente de 0.

Observación. No se define 0^0 para evitar ciertas contradicciones que podrían aparecer más adelante.

Ejercicio 34. Calcule el valor de las potencias que se indican en cada inciso, tal como se hace en los incisos a) y b).

a) $3^2 = 3 \times 3 = 9$ b) $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
c) $4^2 =$ d) $4^3 =$
e) $5^4 =$ f) $2^5 =$
g) $27^1 =$ h) $6^3 =$
i) $3^3 =$ j) $18^0 =$

k) $7^2 =$ l) $12^2 =$

m) $37^0 =$ n) $54^1 =$

Raíz cuadrada

Existen algunas ecuaciones que para su resolución requieren el conocimiento previo de la potenciación de números naturales.

Ejemplo. Con la ecuación

$$\square^2 = 25$$

expresamos simbólicamente el problema de encontrar un número que elevado al cuadrado sea igual a 25.

Con lo que sabemos sobre la elevación al cuadrado de un número podemos *adivinar* la solución. La solución es 5 porque $5^2 = 25$.

De igual manera, la solución de la ecuación $\square^2 = 64$ es 8 porque $8^2 = 64$ y la solución de la ecuación $\square^2 = 36$ es 6 porque $6^2 = 36$.

Ejercicio 35. Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\square^2 = 100$ $\square$	b) $\square^2 = 9$ $\square$	c) $\square^2 = 16$
d) $\square^2 = 81$ $\square$	e) $\square^2 = 36$ $\square$	f) $\square^2 = 4$
g) $\square^2 = 49$ $\square$	h) $\square^2 = 64$ $\square$	i) $\square^2 = 144$
j) $\square^2 = 121$ $\square$	k) $\square^2 = 1$ $\square$	l) $\square^2 = 0$
m) $\square^2 = 36$ $\square$	n) $\square^2 = 64$ $\square$	o) $\square^2 = 25$
p) $\square^2 = 169$ $\square$	q) $\square^2 = 196$ $\square$	r) $\square^2 = 225$

Las soluciones de ecuaciones como las mostradas en el ejercicio reciben el nombre especial de **raíces cuadradas.** Así, por ejemplo, como la solución de la ecuación $\square^2 = 100$ es 10, al número 10 se le llama ***la* raíz cuadrada de 100.** También, como la solución de la ecuación $\square^2 = 36$ es 6, a este número 6 se le denomina la **raíz cuadrada de 36.**

Ejercicio 36. Considerando los datos del ejercicio anterior complete las siguientes oraciones.

a) La raíz cuadrada de 100 es ______
b) La raíz cuadrada de 16 es ______
c) La raíz cuadrada de 36 es ______
d) La raíz cuadrada de 49 es ______

e) La raíz cuadrada de 144 es ______

f) La raíz cuadrada de 1 es ______

g) La raíz cuadrada de 81 es ______

h) La raíz cuadrada de 64 es ______

i) La raíz cuadrada de 4 es ______

j) La raíz cuadrada de 9 es ______

k) La raíz cuadrada de 169 es ______

l) La raíz cuadrada de 196 es ______

Si b es la raíz cuadrada de n, al número b se acostumbra también denotarlo con el símbolo $\sqrt{n}$ (léase: "raíz cuadrada de n").

Ejemplo:

a) Sabemos que 5 es la raíz cuadrada de 25. A este número 5 también se le puede denotar con la expresión $\sqrt{25}$. (Léase "raíz cuadrada de 25".) Esto es,

$$\sqrt{25} = 5.$$

Ejercicio 37. Complete las siguientes igualdades.

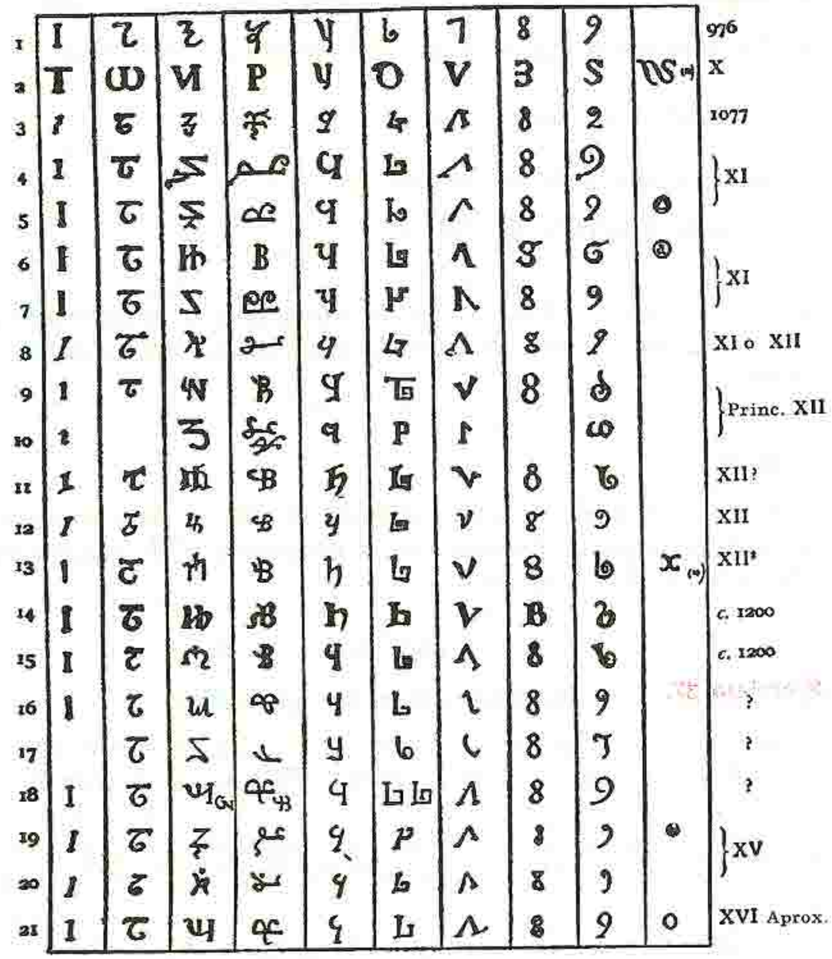
a) $\sqrt{9} = \square$ b) $\sqrt{81} = \square$

c) $\sqrt{4} = \square$ d) $\sqrt{64} = \square$

e) $\sqrt{121} = \square$ f) $\sqrt{0} = \square$

g) $\sqrt{144} = \square$ h) $\sqrt{169} = \square$

i) $\sqrt{196} = \square$ j) $\sqrt{225} = \square$



La tabla muestra cómo han evolucionado los símbolos indoarábigos

TERCERA UNIDAD

SISTEMAS DE NUMERACION

En esta unidad estudiaremos algunas formas de denotar a los números naturales. O sea, algunos sistemas de numeración. En especial, analizaremos la estructura del sistema decimal que se usa actualmente en casi todo el mundo.

También veremos cómo los algoritmos que empleamos para efectuar adiciones y multiplicaciones con números naturales, están justificados precisamente por la estructura del sistema de numeración y por las propiedades de las operaciones mencionadas.

I. SISTEMAS ANTIGUOS DE NUMERACION

En su desarrollo histórico, la humanidad ha creado diferentes formas de nombrar o denotar a los números naturales. Es decir, ha inventado diversos *sistemas de numeración.*

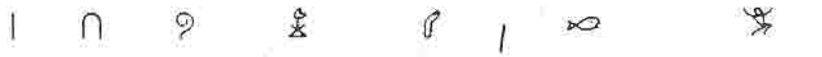
Para darnos una idea de lo que es un sistema de numeración, estudiaremos a continuación los sistemas que fueron empleados por dos culturas de la antigüedad: la cultura egipcia y la cultura romana. Posteriormente estudiaremos el sistema de los mayas, que fue un sistema de numeración muy avanzado para su época.

1. SISTEMA EGIPCIO

Los egipcios de la antigüedad manejaron un sistema de numeración en el que se usaban como símbolos básicos los siguientes:

dedo	talón	cuerda enrollada	flor de loto	dedo apuntando	pez o ballena	hombre sorprendido

Estos símbolos o cifras denotaban, respectivamente, a los siguientes números:



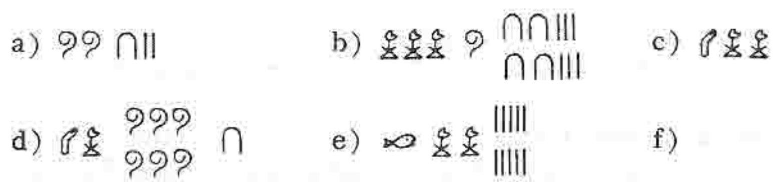
1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000

Con estas cifras un egipcio podía denotar a cualquier número natural; bastaba para ello, que supiera sumar. Por ejemplo, el número ciento cuarenta y tres era expresado así:

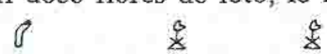
(Note usted que esta expresión representa la suma: 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1.)

Por esta forma de denotar los números en el sistema egipcio se dice que tal sistema de numeración es un *sistema aditivo;* o bien, que *tiene principio aditivo.*

Ejercicio 1. Indique usted qué número denota cada una de las siguientes expresiones:



Notará usted que cada uno de los números, en el ejercicio anterior, está expresado con un mínimo de símbolos básicos. Esto se hace así por economía de espacio y esfuerzo. Por ejemplo, en lugar de escribir el doce mil con doce flores de loto, lo hemos escrito así:



10 000 + 1 000 + 1 000

Ejercicio 2. Escriba con símbolos egipcios, y usando el menor número posible de cifras, los siguientes números.

a) dieciocho
b) noventa y cuatro
c) siete mil quince
d) ciento veinte mil trece

Ejercicio 3. Exprese los números que se indican a continuación empleando el principio aditivo y las siguientes cifras:

△	□	○	✶
1	5	10	20

a) dieciséis
b) treinta y ocho
c) nueve
d) catorce
e) noventa y nueve

Usted puede construir su propio sistema de numeración. Lo único que necesita es inventar algunos símbolos básicos, darles un valor específico y manejarlos de acuerdo con el principio aditivo. Inténtelo, si lo desea.

2. SISTEMA ROMANO

En el antiguo sistema romano de numeración los símbolos básicos o cifras eran las siguientes letras mayúsculas:

I, V, X, L, C, D, M

Estas letras representaban, respectivamente, a los números

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Con estas cifras, los romanos denotaban números naturales aplicando el principio aditivo. Por ejemplo,

XVII significaba 10 + 5 + 1 + 1, o sea, 17
XXXVI significaba 10 + 10 + 10 + 5 + 1, o sea, 36
MDL significaba 1 000 + 500 + 50, o sea, 1 550

Observe usted que, debido al principio aditivo, las expresiones en este sistema romano se interpretan como *sumas.*

Note, además, que aquí las cifras están ordenadas, según su valor, de mayor a menor y de izquierda a derecha.

Los romanos empleaban símbolos especiales para los números 4, 9, 40, 90, 400 y 900. Esos símbolos eran, respectivamente,

IV, IX, XL, XC, CD y CM

Observe que en estos casos las expresiones se interpretan como *restas,* pues

IV = 5 − 1 = 4	IX = 10 − 1 = 9
XL = 50 − 10 = 40	XC = 100 − 10 = 90
CD = 500 − 100 = 400	CM = 1 000 − 100 = 900

(A esto podría llamársele: "el *principio sustractivo* del sistema romano de numeración").

Cuando uno de estos símbolos especiales aparecía en una expresión, se tomaba como si fuera una sola cifra. Por ejemplo,

CMXLIX significaba 900 + 40 + 9, o sea, 949
MCDXCIV significaba 1 000 + 400 + 90 + 4, o sea, 1 494

Para denotar un número en el sistema romano, igual que en el egipcio, se debe emplear el mínimo posible de símbolos. Y, en especial, ninguna cifra puede escribirse más de tres veces seguidas. Por eso el cuatro, por ejemplo, se escribe IV y no IIII; el 900 se escribe como CM y no como DCCCC; el 1 500 es MD y no DDD; etcétera. (Esto podría llamarse *"principio de economía"* del sistema romano.)

Si querían denotar números mayores que 3 999, los romanos colocaban una barrita encima de los símbolos, y con ello indicaban una multiplicación por 1 000. Por ejemplo, para representar el cuatro mil escribían

$\overline{\text{IV}}$ (4 × 1 000)

para denotar el doce mil escribían

$\overline{\text{XII}}$ (12 × 1 000)

(Esto podría llamarse; "el *principio multiplicativo* del sistema romano de numeración".)

Ejercicio 4. Indique usted qué número se expresa en cada inciso.

a) CDXCVII
b) MCMLXXVI
c) DCCCXCIV
d) MCCXLIII
e) $\overline{\text{IV}}$ CMV
f) $\overline{\text{VIII}}$ CCCXCIX

Ejercicio 5. Escriba con símbolos romanos cada uno de los siguientes números.

a) 385
b) 682
c) 2 529
d) 1 704
e) 5 072
f) 9 648

Si observamos los dos sistemas de numeración que hemos mencionado hasta aquí, notamos que ambos están formados por lo siguiente:

a) Un conjunto de símbolos básicos llamados *cifras;*
b) Un conjunto de reglas o *principios* que indican cómo deben manejarse las cifras para denotar números naturales.

En general, todo sistema de numeración, sea antiguo o moderno, presenta estas mismas características. Esto es, todo sistema se integra con algunas cifras determinadas y con algunos principios que indican cómo manejar esas cifras.

II. SISTEMAS POSICIONALES DE NUMERACION

Recibe el nombre de sistema posicional de numeración, todo aquel sistema en el que una misma cifra denota números distintos según la posición que ocupa en una expresión. Usted habrá observado que, por ejemplo, el sistema egipcio y el sistema romano no son posicionales; pero el sistema indoarábigo, que estudiamos en la primaria, sí lo es. (Y también es posicional el sistema de numeración que inventaron los mayas.)

A continuación veremos algunos sistemas posicionales, empezando por el que ya conocemos desde la primaria.

1. SISTEMA INDOARABIGO

Este sistema se llama así porque fue inventado por los hindúes y difundido después por los árabes. En él se manejan las siguientes cifras:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Usted ya sabe que estas cifras aisladas, denotan a los números del cero al nueve. Por ejemplo, sabe que la cifra 5 denota al número de elementos de un conjunto como el siguiente:

{△, ★, □, L, &}

Por ejemplo, con la cifra 9 se expresa el número de elementos de un conjunto como éste:

$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Al número denotado por cada una de estas cifras suele llamársele *valor absoluto de la cifra.*

Los principios que rigen el manejo de estas cifras, para nombrar números mayores que nueve, son el principio posicional y el principio aditivo. Expliquemos en qué consiste cada uno de ellos:

Principio posicional

Una misma cifra denota números diferentes, de acuerdo con la posición que ocupa en cada expresión. Por ejemplo, la cifra 3, en la siguiente expresión, denota números distintos.

3 4 3 2

El número que denota una cifra en determinada posición en una expresión, recibe el nombre de *valor relativo* de esa cifra.

En este sistema, el valor relativo de cada cifra se determina multiplicando su valor absoluto por una potencia de 10. Por ejemplo, en 3 432 tenemos los siguientes valores relativos:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & 2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 \times 10^3 & 4 \times 10^2 & 3 \times 10^1 & 2 \times 10^0 \end{array}$$

Observe usted que en las distintas posiciones de una cifra, en una expresión, se consideran distintas potencias de 10. Para recordar más fácilmente qué potencia se considera en cada posición, veamos el siguiente esquema:

	10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
	10a.	9a.	8a.	7a.	6a.	5a.	4a.	3a.	2a.	1a.

posiciones

(Los puntos suspensivos indican que las posiciones se pueden considerar indefinidamente hacia la izquierda.)

En este esquema podemos observar que las posiciones empiezan a contarse a partir de la derecha y que las potencias consideradas son potencias sucesivas de 10, empezando con 10°. ¿Puede usted decir qué potencia se considera en la 6a. posición? ¿Cuál potencia consideraría usted en la 12a. posición?

Principio aditivo

Toda expresión debe interpretarse como la *suma* de los valores relativos de las cifras que la forman. Por ejemplo, el 3 432 denota la suma:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3(10^3) & +\ 4(10^2) & +\ 3(10^1) & +\ 2(10^0) \end{array}$$

o sea,

$$3(1\,000) + 4(100) + 3(10) + 2(1)$$
$$3\,000 + 400 + 30 + 2$$

Como vemos, las expresiones que utilizamos en este sistema de numeración son formas breves de indicar sumas. Por ejemplo, la *expresión* 598 denota la suma

$$5(10^2) + 9(10^1) + 8(10^0)$$

Ahora bien, si un número se expresa por medio de una suma como esta última, diremos que tal número está expresado en **notación desarrollada.**

Ejercicio 6. Exprese en notación desarrollada los siguientes números.

a) $467 = (4(10^2) + 6(10^1 + 7(10^0)$

b) 1 891 =

c) 46 205 =

d) 569 300 =

e) 208 003 =

f) 1 000 106 =

Ejercicio 7. Escriba en forma breve los siguientes números.

a) $8(10^2) + 0(10^1) + 5(10^0) =$

b) $6(10^3) + 4(10^2) + 1(10^1) + 0(10^0) =$

c) $1(10^4) + 0(10^3) + 0(10^2) + 7(10^1) + 0(10^1) =$

d) $5(10^0) + 4(10^1) + 3(10^2) + 2(10^3) =$

e) $6(10^0) + 5(10^1) + 4(10^2) + 3(10^3) + 1(10^4) =$

f) $6(10^3) + 5(10^4) + 7(10^2) + 9(10^0) + 8(10^1) =$

g) $3(10^4) + 4(10^3) + 2(10^5) + 1(10^6) + 6(10^1)$

$+ 5(10^2) + 0(10^0) =$

Desde la escuela primaria usted ha usado la notación desarrollada de los números; solo que empleando nombres especiales para las distintas potencias de 10:

10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Mil millones (unidades de millar de millón)	Cien millones (centenas de millón)	Diez millones (decenas de millón)	Millones (unidades de millón)	Cien miles (centenas de millar)	Diez miles (decenas de millar)	Miles (unidades de millar)	Cientos (centenas)	Dieces (decenas)	Unos (unidades)

Usted leía, por ejemplo, la expresión 8 632 en la siguiente forma:

8 6 3 2

"8 unidades de millar, 6 centenas, 3 decenas y 2 unidades"

y en lenguaje común simplificaba un poco diciendo:

8 6 3 2

"ocho mil, seiscientos treinta y dos"

De todas maneras, con cualquiera de esas dos expresiones, usted estaba indicando la suma

$$8(10^3) + 6(10^2) + 3(10^1) + 2(10^0)$$

Ejercicio 8. Tal como se hace en el inciso a), exprese en notación desarrollada cada número

a) $739 = 7(10^2) + 3(10^1) + 9(10^0)$

7 centenas 3 decenas y 9 unidades

setecientos treinta y nueve

b) 456 =
c) 824 =
d) 3 645 =
e) 2 408 =
f) 43 006 =
g) 742 860 =

Ejercicio 9. Lea las siguientes expresiones:

a) 800
b) 396
c) 2 007
d) 4 590
e) 580 743
f) 19 675 213 100
g) 103 006 005 004

Ejercicio 10. Escriba en notación indoarábiga los siguientes números:

a) Tres mil cuatrocientos
b) Ciento diez mil, doscientos trece
c) Quince millones, dos mil cuarenta y seis
d) Doce mil millones, ocho mil quinientos uno
e) Ciento veinte mil millones, trescientos nueve
f) Quinientos millones, ciento cincuenta
g) Seiscientos dos millones, mil quince

En virtud de que el sistema indoarábigo de numeración utiliza como base el número 10 y tiene principio posicional y principio aditivo, se acostumbra decir que dicho sistema es **decimal, posicional y aditivo.**

¿Cree usted que se podría estructurar un sistema de numeración posicional aditivo sin tener un símbolo para el cero? ¿Por qué?

2. SISTEMA DE BASE CINCO

Como su nombre lo indica, este sistema de numeración utiliza como base el número cinco. Esto significa que los números considerados en las distintas posiciones de una cifra, en una expresión, son potencias de 5.

	5^6	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
• • •							
	7a.	6a.	5a.	4a.	3a.	2a.	1a.

posiciones

En este sistema de numeración son necesarios *cinco* símbolos básicos para denotar a los números cero, uno, dos, tres y cuatro, respectivamente. Estos símbolos pueden ser inventados o escogidos arbitrariamente; pero, por comodidad, se prefiere el empleo de cifras ya conocidas por nosotros:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

Como el sistema es *posicional*, cada una de estas cifras, al formar parte de una expresión tendrá dos valores: su valor absoluto y su valor relativo.

El valor absoluto de estas cifras es el mismo que tienen en el sistema indoarábigo, y el valor relativo de alguna de ellas, al formar parte de una expresión, es el producto de su valor absoluto por la potencia de 5 correspondiente.

Como el sistema es *aditivo*, cada expresión representa una *suma*: la suma de los valores relativos de las cifras que la forman.

Ejemplo. Consideremos la expresión $2\,134_{\text{cinco}}$. (Léase: "2, 1, 3, 4, base cinco".)

Esta expresión denota la suma

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 4_{\text{cinco}} \\ 2(5^3) + & 1(5^2) + & 3(5^1) + & 4(5^0) \end{array}$$

Por supuesto, el número denotado por esta expresión no puede ser el "dos mil, ciento treinta y cuatro"; pues no estamos usando la base 10. Si deseamos nombrar al número $2\,134_{\text{cinco}}$, habrá que traducirlo al lenguaje decimal, que es el que estamos acostumbrados a emplear:

$$\begin{array}{llll} 2 & 1 & 3 & 4 \text{ cinco} \\ 2(5^3) & +\,1(5^2) & +\,3(5^1) & +\,4(5^0) = \\ 2(125) & +\,1(25) & +\,3(5) & +\,4(1) = \\ \ \ 250 & +\,25 & +\,15 & +\,4 = 294 \end{array}$$

Así tenemos que el número expresado como $2\,134_{\text{cinco}}$ es el 294 (doscientos noventa y cuatro).

Ejemplo. La expresión $12\,432_{\text{cinco}}$ denota al número 992 porque

$$\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \text{ cinco} & \\ 1(5^4) & +\,2(5^3) & +\,4(5^2) & +\,3(5^1) & +\,2(5^0) & = \\ 1(625) & +\,2(125) & +\,4(25) & +\,3(5) & +\,2(1) & = \\ \ \ 625 & +\,250 & +\,100 & +\,15 & +\,2 & = 992 \end{array}$$

Ejercicio 11. Encuentre qué número está expresado en cada inciso.

a) 213_{cinco} b) 323_{cinco}
c) 442_{cinco} d) $2\,342_{\text{cinco}}$
e) $3\,144_{\text{cinco}}$ f) $4\,444_{\text{cinco}}$
g) $22\,222_{\text{cinco}}$ h) $32\,323_{\text{cinco}}$

3. SISTEMA DE BASE DOS

Este sistema de numeración, también llamado *sistema binario*, ha servido de base para la construcción y funcionamiento de algunas computadoras electrónicas. En él se manejan *dos símbolos básicos* que sirven para representar, respectivamente, a los números uno y cero.

En el caso de las computadoras estos símbolos son "encendido" y "apagado". Nosotros podríamos inventar cualesquiera otros símbolos; pero, por comodidad, usaremos las cifras 1 y 0 que ya conocemos.

Estas cifras se manejan, según los principios posicional y aditivo, en la siguiente forma:

Principio posicional

La cifra 1 denota números distintos en las diferentes posiciones que puede tener en una expresión. Y, como la base del sistema es el número dos, los valores relativos que tiene el "1" en sus distintas posiciones son potencias de 2:

	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
• • •								

Ejemplo. a) En 100_2 (léase "1, 0, 0 base dos") el valor relativo del "1" es cuatro porque está en la tercera posición, en la cual se considera la potencia 2^2.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1(2^2) & 0(2^1) & 0(2^0) \end{array}$$

Principio aditivo

Toda expresión denota la *suma* de los valores relativos de las cifras que la forman.

Ejemplo. La expresión 1011_{dos} (léase: "1, 0, 1, 1, base dos"), denota al número once porque

$$\begin{array}{lllll} 1 & 0 & 1 & 1 & \text{dos} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &1(8) + 0(4) + 1(2) + 1(1) = \\ &1(2^3) + 0(2^2) + 1(2^1) + 1(2^0) = \\ &\quad 8 + 0 + 2 + 1 = 11 \end{aligned}$$

Observe usted que aquí también estamos "traduciendo", pues una expresión del sistema binario la interpretamos por medio del lenguaje y el simbolismo que manejamos en el sistema decimal.

Ejercicio 12. Encuentre qué números denotan las siguientes expresiones.

a) 11_{dos} b) 101_{dos}

c) 110_{dos} d) 111_{dos}

e) $1\,011_{dos}$ f) $1\,110_{dos}$

g) $11\,101_{dos}$ h) $1\,110\,111_{dos}$

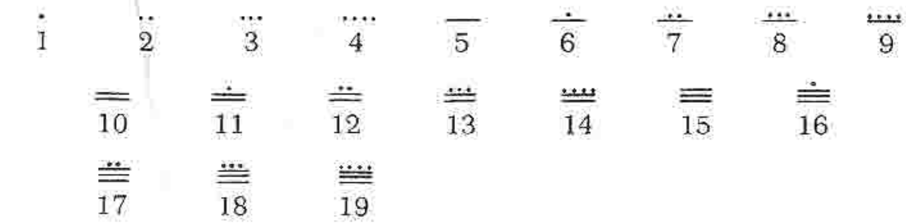
i) $1\,111\,111_{dos}$ j) $1\,000\,010_{dos}$

4. SISTEMA MAYA

La civilización Maya-Quiché y el pueblo hindú comparten el honor de haber sido las únicas culturas, en todo el mundo, que inventaron sistemas de numeración posicionales aditivos cuyo funcionamiento, además de ser sencillo, evitó las dificultades y confusiones al simbolizar los números.

El pueblo hindú tomó como base de su sistema el número 10 y utilizó diez cifras. Los mayas tomaron como base el número 20 y estructuraron su sistema manejando solamente tres símbolos básicos: un punto (·), una raya (—) y una especie de concha de caracol ( )

En la numeración maya los números del uno al diecinueve se representaban así:



Como puede verse, para denotar estos números sólo usaban el punto y la raya (que representaban al 1 y al 5, respectivamente) combinados de acuerdo con el principio aditivo.

Para números mayores que 19 ya empleaban el principio posicional y el tercer símbolo ( ) que denota al cero.

Así, por ejemplo, veinte se representaba como

$$\begin{aligned} \cdot \;&= 1(20^1) = 20 \\ &= 0(20^0) = \underline{\;0\;} \\ &\qquad\qquad\quad 20 \end{aligned}$$

Cuarenta se indicaba como dos veintes así:

$$\begin{aligned} \cdot\cdot \;&= 2(20^1) = 40 \\ &= 0(20^0) = \underline{\;0\;} \\ &\qquad\qquad\quad 40 \end{aligned}$$

El numeral $\cdot\cdot\cdot\cdot$ servía para nombrar al ochenta, pues

$$\begin{aligned} \cdot\cdot\cdot\cdot \;&= 4(20^1) = 80 \\ &= 0(20^0) = \underline{\;0\;} \\ &\qquad\qquad\quad 80 \end{aligned}$$

¿Cómo se expresaba el número ciento veinte en este sistema vigesimal de los mayas?

Como $120 = 6(20)$, se tenía que indicar el seis en la posición de los veintes:

$$\begin{aligned} &= 6(20^1) = 120 \\ &= 0(20^0) = \underline{\;\;0\;} \\ &\qquad\qquad\quad 120 \end{aligned}$$

El número 125 se indicaba como:

 $= 6(20^1) = 120$

 $= 5(20^0) = \quad 5$

125

El numeral  simbolizaba al número 465 porque

 $= 1(20^2) = 400$
 $= 3(20^1) = \quad 60$
 $= 5(20^0) = \quad 5$

465

Como puede observarse, los numerales se leían en sentido vertical de arriba hacia abajo, y las potencias sucesivas de la base se consideraban, en las posiciones, de abajo hacia arriba.

·
·
·

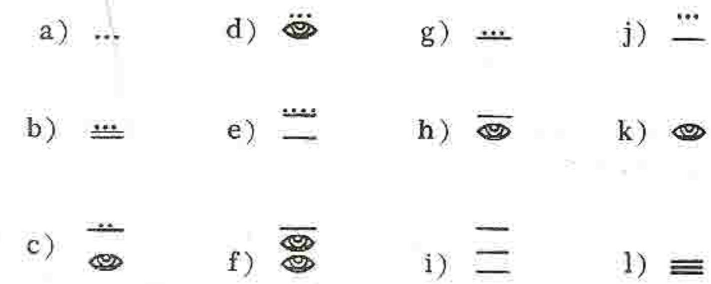
20^4	160 000 (ciento sesenta miles)
20^3	8 000 (ocho miles)
20^2	400 (cuatrocientos)
20^1	20 (veintes)
20^0	1 (unos)

Y para indicar las distintas posiciones se dejaba un espacio conveniente entre símbolo y símbolo, de modo que no hubiera confusiones.

 es diez es 105

 es 145  es 12

Ejercicio 13. Encuentre qué números representan los siguientes numerales mayas.

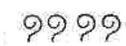


Ejercicio 14. Exprese los siguientes números en el sistema de numeración maya.

a) 7 b) 26 c) 35 d) 89

e) 500 f) 6 000 g) 16 000

h) 40 000 i) 160 000

j)  k) 

l) MCMLXX m) CDLXXXIX

n) $11\,01_{\text{dos}}$ o) $1\,011\,101_{\text{dos}}$

p) $1\,234_{\text{cinco}}$ q) $3\,121_{\text{cinco}}$

III. ALGORITMOS DE LAS OPERACIONES EN EL SISTEMA DECIMAL

Todos sabemos hallar la suma, el producto, el cociente, la diferencia, etc., de dos números dados, pues hemos aprendido ciertos algoritmos (procedimientos) para hacerlo. Estos algoritmos, aplicables a cualesquiera números, están basados en las propiedades de las operaciones, en la estructura del sistema de numeración y en las tablas de adición y multiplicación para números menores que 10.

A continuación analizaremos brevemente, en algunos ejemplos particulares, cuáles son las propiedades que se utilizan en los algoritmos de la adición y la multiplicación en el sistema decimal de numeración.

1. ALGORITMO DE LA ADICION

Para encontrar la suma de 13 y 15, por ejemplo, se disponen verticalmente los símbolos,

$$\begin{array}{r} 13 \\ +\ 15 \\ \hline \end{array}$$

y luego se piensa: "3 más 5 son 8; 1 más 1 son 2; la suma es 28".

Esto es válido porque

1)	$13 + 15 = 1(10) + 3 + 1(10) + 5$	Por la estructura del sistema de numeración.
2)	$= 1(10) + 1(10) + 3 + 5$	Por la propiedad conmutativa de la adición.
3)	$= (1 + 1) \times 10 + 3 + 5$	Por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.
4)	$= 2(10) + 8$	Porque, de acuerdo con la tabla, $1 + 1 = 2$ y $3 + 5 = 8$.
5)	$= 28$	Por la estructura del sistema de numeración.

Como vemos, del paso 3 al paso 4 se suman las decenas con decenas y las unidades con unidades, y eso es precisamente lo que se hace en el algoritmo.

Algunas veces en nuestro algoritmo hablamos de "llevar"; ¿qué significa esto?

Por ejemplo, al buscar la suma de 25 y 17 procedemos así:

$$\begin{array}{r} 25 \\ +\ 17 \\ \hline 2 \end{array}$$

(5 y 7 son 12, escribimos 2 y "llevamos" 1).

$$\begin{array}{r} 1 \\ 25 \\ +\ 17 \\ \hline 42 \end{array}$$

(1 más 2, más 1, son 4; la suma es 42)

En este caso las propiedades aplicadas son:

1)	$25 + 17 = 2(10) + 5 + 1(10) + 7$	Por la estructura del sistema de numeración.
2)	$= 2(10) + 1(10) + 5 + 7$	Propiedad conmutativa de la adición.
3)	$= (2 + 1) \times 10 + 5 + 7$	Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.
4)	$= (2 + 1) \times 10 + 12$	Según la tabla, $5 + 7 = 12$.
5)	$= (2 + 1)(10) + 1(10) + 2$	Por estructura del sistema de numeración.
6)	$= (2 + 1 + 1)(10) + 2$	Por la propiedad distributiva.
7)	$= 4(10) + 2$	Por la tabla, $2 + 1 + 1 = 4$.
8)	$= 42$	Por estructura del sistema de numeración.

Como se ve, el escribir 2 y "llevar" 1, en el algoritmo, significa que de las 12 unidades tomamos 1 decena y la sumamos con las demás decenas (paso 5 a paso 7).

Ejercicio 15. Indique usted la propiedad que se emplea en cada paso de la siguiente secuencia.

1) $274 + 315 = 2(10^2) + 7(10) + 4 + 3(10^2) + 1(10) + 5$

2) $= 2(10^2) + 3(10^2) + 7(10) + 1(10) + 4 + 5$

3) $= (2 + 3)(10^2) + (7 + 1)(10) + 4 + 5$

4) $= 5(10^2) + 8(10) + 9$

5) $= 5\ 8\ 9$

Ejercicio 16. Indique la propiedad que se aplica en cada paso de la siguiente secuencia.

1) $674 + 295 = 6 \times 10^2 + 7 \times 10 + 4 + 2 \times 10^2 + 9 \times 10 + 5$

2) $= 6 \times 10^2 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10 + 9 \times 10 + 4 + 5$

3) $= (6 + 2) \times 10^2 + (7 + 9)10 + 4 + 5$

4) $= 8(10^2) + 16(10) + 9$

5) $= 8(10^2) + (1 \times 10 + 6)(10) + 9$

6) $= 8(10^2) + 1(10^2) + 6\ (10) + 9$

7) $= (8 + 1)(10^2) + 6(10) + 9$

8) $= 9(10^2) + 6(10) + 9$

9) $= 9\ 6\ 9$

2. ALGORITMO DE LA MULTIPLICACION

Para hallar el producto, por ejemplo de 25 y 3, disponemos los símbolos así

$$\begin{array}{r} 2\ 5 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$$

y decimos: 3 por 5 son 15, escribimos 5 y "llevamos" 1; 3 por 2 son 6 y 1 que "llevábamos" son 7, el producto es 75.

$$\begin{array}{r} 2\ 5 \\ \times\ 3 \\ \hline 7\ 5 \end{array}$$

Las propiedades empleadas en este algoritmo son las siguientes:

1) $3 \times 25 = 3(2 \times 10 + 5)$ — Estructura del sistema de numeración.

2) $= (3 \times 2 \times 10) + (3 \times 5)$ — Propiedad distributiva.

3) $= 6 \times 10 + 15$ — Por la tabla, $3 \times 2 = 6$ y $3 \times 5 = 15$.

4) $= 6 \times 10 + 1 \times 10 + 5$ — Estructura del sistema de numeración.

5) $= (6 + 1) \times 10 + 5$ — Propiedad distributiva.

6) $= 7(10) + 5$ — Por la tabla, $6 + 1 = 7$.

7) $= 75$ — Estructura del sistema de numeración.

Ejercicio 17. Indique usted las propiedades que se emplean en la siguiente secuencia

1) $2 \times 34 = 2(3 \times 10 + 4)$

2) $= 2 \times 3 \times 10 + 2 \times 4$

3) $= 6 \times 10 + 8$

4) $= 68$

PIERRE DE FERMAT (1608–1665)

Matemático francés, cuyos trabajos más brillantes versaron sobre la teoría de números

CUARTA UNIDAD

FACTORIZACION

En esta unidad estudiaremos los conceptos de múltiplo, divisor, factor, divisibilidad, número primo, factorización, mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Posteriormente utilizaremos esas ideas en la resolución de algunos ejercicios y problemas.

1. MULTIPLOS

Al considerar una ecuación del tipo $b \times \quad = a$, en la que a y b sean números naturales o cero, si su solución es un número natural, entonces se dice que a **es múltiplo de** b.

Ejemplo. La ecuación $3 \times \quad = 12$ tiene por solución al número 4. Entonces, 12 es múltiplo de 3.

Ejemplo. 15 es múltiplo de 5 porque la ecuación $15 = 5 \times$ tiene solución natural.

Ejemplo. 28 es múltiplo de 7 porque la solución de la ecuación $28 = 7 \times \quad$ es un número natural, el 4.

Ejemplo. La ecuación $7 \times \quad = 20$ no tiene solución con naturales. Por consiguiente, **20 no es múltiplo de 7**.

Ejercicio 1. En cada pareja de números diga si el primero es múltiplo del segundo o no. Y dé la razón de su respuesta, tal como se hace en a) y b). (Las letras denotan números naturales.)

a) 58, 2 — 58 sí es múltiplo de 2 porque la ecuación $58 = 2 \times \quad$ sí tiene solución con números naturales.

b) 35, 3 — 35 no es múltiplo de 3 porque la ecuación $35 = 3 \times \square$ no tiene solución con números naturales.

c) 48, 6
d) 52, 4
e) 58, 8
f) 70, 10
g) 95, 10
h) 95, 5
i) $5n$, 5
j) $14a$, a
k) $12x$, 6

2. DIVISORES

Ya hemos dicho que si la ecuación $a = b \times \square$ tiene solución natural, entonces a es múltiplo de b. Cuando ocurre esto se acostumbra también decir que b **es divisor de** a; o bien, que b **es factor de** a

Ejemplo. La ecuación $6 \times \square = 30$ tiene como solución un número natural: el 5. Por consiguiente, **6 es divisor o factor de 30.**

Ejemplo. La ecuación $3 \times \square = 20$ no tiene solución con números naturales. Por tanto, **3 no es divisor de 20.**

Ejercicio 2. En cada pareja de números, diga si el primero es divisor del segundo o no. Y dé la razón de su respuesta, como se hace en a) y b). (Las letras denotan números naturales.)

a) 8, 40 — 8 es divisor de 40 porque la ecuación $8 \times \square = 40$ tiene solución natural.

b) 5, 14 — 5 no es divisor de 14 porque la ecuación $5 \times \square = 14$ no tiene solución con números naturales.

c) 6, 120
d) 7, 27
e) 9, 72
f) 7, 28
g) 15, 100
h) 15, 300
i) 4, $4x$
j) n, $6n$
k) 3, $15a$

El algoritmo de la división puede servirnos también cuando deseamos saber si un número es divisor de otro o no lo es. Por ejemplo, ¿es 15 divisor de 210?

Si dividimos 210 entre 15 encontramos que *el residuo es cero.*

```
   14
15|210
   60
    0
```

Por lo tanto, podemos indicar que $210 = 15 \times 14$.

Esto es *15 es divisor o factor de 210.*

¿Será 21 factor de 405?

Ejemplo. ¿21 es factor de 405?
Al dividir 405 entre 21 encontramos que *el residuo no es cero.*

```
   19
21|405
  195
   06
```

Por lo tanto,

21 no es factor de 405.

Ejercicio 3. Encuentre en cuáles de las siguientes parejas el primer número es factor del segundo.

a) 24, 490
b) 35, 175
c) 18, 324
d) 13, 273
e) 34, 165
f) 78, 2 418

Ejercicio 4. Considerando que $65 = 13 \times 5$, complete las siguientes expresiones escribiendo en cada espacio la palabra múltiplo o factor, según corresponda.

a) 65 es ________ de 13
b) 13 es ________ de 65
c) 5 es ________ de 65
d) 65 es ________ de 5

Ejercicio 5. Si b es un natural tal que $5 \times b = 40$,

a) ¿es 40 múltiplo de b?
b) ¿es 5 múltiplo de b?
c) ¿es b divisor de 40?
d) ¿es b múltiplo de 40?
e) ¿es 5 divisor de 40?
f) ¿es 40 divisor de b?

Ejercicio 6. Conteste cada una de las siguientes preguntas y explique su respuesta.

a) ¿es 1 divisor de 101?
b) ¿es 101 múltiplo de 1?
c) ¿es 1 factor de 86?
d) ¿es 50 factor de 50?
e) ¿es 1 000 000 divisor de 1 000 000?
f) ¿es 85 múltiplo de 18?

3. CONJUNTO DE MULTIPLOS DE UN NUMERO

Consideremos el conjunto siguiente:

$$\{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, \ldots\}$$

Los elementos de este conjunto son los múltiplos de 7 y podríamos denotarlos así:

$$\{7 \times 0, 7 \times 1, 7 \times 2, 7 \times 3, 7 \times 4, 7 \times 5, 7 \times 6, \ldots\}$$

(Obsérvese que los múltiplos de 7 se obtienen multiplicando el número 7 por cada uno de los elementos de $w = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.)

En general, los múltiplos de un número a forman el conjunto

$$\{a \cdot 0, a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, a \cdot 4, a \cdot 5, a \cdot 6, \ldots\}$$
$$= \{0, a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, \ldots\}$$

Ejercicio 7. Encuentre los primeros cinco múltiplos de cada uno de los siguientes números naturales.

a) 3 b) 6
c) 4 d) 8
e) n f) $3n$
g) $2x$ h) 13

4. CASOS COMUNES DE DIVISIBILIDAD

¿Podría usted encontrar a simple vista, en cada inciso, si un número es múltiplo del otro?

a) 2, 15 b) 9, 234 c) 10, 84
d) 3, 28 e) 5, 19 f) 3, 546

¿Puede usted determinar sin equivocación, de cuáles números entre los siguientes es factor el número 2? Subráyelos.

34 427 369 9 758 650

¿Y de cuáles números entre los siguientes es factor el 3?

28 45 36 59 147

En ocasiones, un problema se resuelve con mayor rapidez si podemos determinar la existencia de múltiplos y divisores. Por eso en la escuela primaria se estudian los casos más comunes de divisibilidad. ¿Los recuerda usted? Seguramente sí los recuerda y eso le permitió acertar en la selección de los múltiplos pedidos anteriormente. A continuación haremos un repaso de los casos de divisibilidad que usted ya conoce.

Divisibilidad entre 2

Como usted sabe, a los múltiplos de 2 se les llama *números pares*. Escribamos el conjunto de esos números:

$$\{\text{Múltiplos de } 2\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots\}$$

A las cifras que denotan múltiplos de 2 también se les acostumbra llamar *cifras pares*. (Note usted que tales cifras son 0, 2, 4, 6 y 8.)

Observemos ahora el conjunto de múltiplos de 2. ¿Qué particularidad encuentra usted? ¿Todos ellos terminan en cifra par? Efectivamente, así es. Por eso sus maestros de primaria le dijeron alguna vez que:

Un número es divisible entre 2, si la última cifra en la expresión que lo nombra es cifra par.

Ejemplo. El número 354 es múltiplo de 2; es decir, es divisible entre 2, porque la última cifra en la expresión 354 es cifra par.

```
    177
2 | 354
    15
     14
      0
```

$354 = 2 \times 177$

Ejemplo. El número 247 no es múltiplo de 2; es decir, no es divisible entre 2, porque la última cifra, 7, no es cifra par.

$$\begin{array}{r|l} & 123 \\ 2 & \overline{247} \\ & 04 \\ & \ 07 \\ & \ \ 1 \end{array} \qquad 247 \text{ no es igual a } 2 \times 123$$

Ejercicio 8. De los siguientes números, encierre en un rectángulo los que son divisibles entre 2.

a) 391	b) 845	c) 376
d) 1 548	e) 7 294	f) 1 110
g) 2 461	h) 13 692	i) 18 429

Divisibilidad entre 5

Consideremos ahora el conjunto de los múltiplos de 5:

$$\{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \ldots\}$$

Si observamos cualquiera de estos números notamos que la expresión que lo nombra termina en 5 o bien, termina en 0.

En virtud de que los múltiplos de 5 son los números divisibles entre 5, podemos indicar lo siguiente.

Un número es divisible entre 5, si la última cifra en la expresión que lo nombra es 0 o 5.

Ejemplo. El número 6 835 es múltiplo de 5; es decir, es divisible entre 5.

$$\begin{array}{r|l} & 1\,367 \\ 5 & \overline{6\,835} \\ & 1\,8 \\ & \ \ 33 \\ & \ \ \ 35 \\ & \ \ \ \ 0 \end{array} \qquad 6\,835 = 5 \times 1\,367$$

Ejemplo. El número 15 310 es múltiplo de 5.

$$\begin{array}{r|l} & 3\,062 \\ 5 & \overline{15\,310} \\ & 0\,31 \\ & \ \ \ 10 \\ & \ \ \ \ 0 \end{array} \qquad 15\,310 = 5 \times 3\,062$$

Ejemplo. El número 563 no es múltiplo de 5, pues su última cifra no es 0 ni 5.

$$\begin{array}{r|l} & 112 \\ 5 & \overline{563} \\ & 06 \\ & \ 13 \\ & \ \ 3 \end{array} \qquad 563 \text{ no es igual a } 5 \times 112$$

Ejercicio 9. Encierre en un círculo los números que son múltiplos de 5; o sea, los que son divisibles entre 5.

a) 15	b) 45	c) 48
d) 74	e) 192	f) 190
g) 1 830	h) 3 405	i) 15 001

Divisibilidad entre 10

Esta divisibilidad es la más fácil de reconocer entre todas. Basta con ver si la última cifra en una expresión es 0.

Un número es divisible entre 10, si la última cifra de la expresión que lo nombra es 0.

Podemos ver que esto es cierto simplemente observando el conjunto de los múltiplos de 10.

$$\{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, \ldots\}$$

Ya habrá usted notado que los tres casos de divisibilidad estudiados hasta aquí se reconocen observando única y exclusivamente la última cifra que aparece en la expresión usada para denotar al número. Esto se debe a que estamos manejando el sistema decimal de numeración. En un sistema con otra base no siempre sería posible aplicar este criterio para saber si un número es divisible entre 10, entre 5 o entre 2.

Note usted además que si un número es múltiplo de 10, entonces también es múltiplo de 5 y de 2. ¿Qué le sugiere este hecho? ¿Será siempre cierto que si un número a es múltiplo de b, entonces todos los múltiplos de a son también múltiplos de b? Más adelante volveremos a ver un caso como éste.

Divisibilidad entre 3

Para determinar si un número es múltiplo de 3, se suman las cifras con las que se simboliza dicho número y se aplica el siguiente criterio:

> *Un número es divisible entre 3 si la suma de las cifras con las que se expresa es un múltiplo de 3.*

Observemos esto en los siguientes ejemplos.

Primero escribamos el conjunto de múltiplos de 3:

$$\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, \ldots\}$$

Ahora tomemos por ejemplo el número 12. Las cifras con las que se expresa son 1 y 2. La suma de ellas es $1 + 2 = 3$ y ocurre que 3 es múltiplo de 3.

Consideremos otro número; por ejemplo, el 27. La suma de las cifras 2 y 7 es 9 y 9 es múltiplo de 3.

Ejemplo. Tomemos el número 4 521.

La suma de sus cifras es $4 + 5 + 2 + 1 = 12$.

Como 12 es múltiplo de 3, entonces 4521 también es múltiplo de 3. Comprobémoslo:

```
     1 507
3 | 4 521
    1 5
      021       4 521 = 3 × 1 507
        0
```

Ejemplo. Consideremos el número 3 361.

La suma de las cifras es $3 + 3 + 6 + 1 = 13$.

Puesto que 13 no es divisible entre 3, el número 3 361 tampoco es divisible entre 3.

```
     1 120
3 | 3 361
    0 3
      06
       01       3 361 no es igual a 3 × 1 120
        1
```


Ejercicio 10. Encierre en un rectángulo los números que son divisibles entre 3.

a) 36	b) 45	c) 63
d) 91	e) 105	f) 540
g) 168	h) 826	i) 1 621

Divisibilidad entre 9

> *Un número es divisible entre 9 si la suma de las cifras con las que se expresa es un múltiplo de 9.*

Ejemplo. La suma de las cifras en 459 es $4 + 5 + 9 = 18$. Puesto que 18 es múltiplo de 9, el número 459 también es múltiplo de 9.

```
     51
9 | 459
     09        459 = 9 × 51
      0
```

Ejemplo. En el número 982 las cifras suman $9 + 8 + 2 = 19$. Y como 19 no es múltiplo de 9, el número 982 no es divisible entre 9.

```
     109
9 | 982
     082    982 no es igual a 9 × 109
       1
```

Ejercicio 11. Escriba el conjunto de los múltiplos de 9 y luego sume las cifras que nombran a cada uno de ellos. Vea si cada suma es un múltiplo de 9.

Ejercicio 12. Encierre en un círculo los números que son múltiplos de 9.

a) 72	b) 108	c) 1 422
d) 95	e) 945	f) 2 639
g) 747	h) 608	i) 4 608

Divisibilidad entre 6

El conjunto de los múltiplos de 6 es:

$$\{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \ldots\}$$

Si observamos estos números notamos que cada uno de ellos termina en cifra par y es divisible entre 3. Esto es, cada múltiplo de 6 es también múltiplo de 2 y de 3. Este es el caso que habíamos prometido ver:

Como 6 es múltiplo de 2 y de 3, todos los múltiplos de 6 también deben ser múltiplos de 2 y de 3. Por lo tanto,

Un número es divisible entre 6 si es divisible entre 2 y entre 3.

Ejemplo. El número 816 es múltiplo de 2, pues su última cifra es par, y también es múltiplo de 3, pues sus cifras suman $8 + 1 + 6 = 15$. Por lo tanto, dicho número es divisible entre 6.

$$\begin{array}{r|l} & 136 \\ \hline 6 & 816 \\ & 21 \\ & \ 36 \\ & \ \ 0 \end{array} \qquad 816 = 6 \times 136$$

Ejemplo. El número 32 es divisible entre 2; pero no entre 3, porque $3 + 2 = 5$. Por lo tanto, 32 no es múltiplo de 6.

$$\begin{array}{r|l} & \ 5 \\ \hline 6 & 32 \\ & \ 2 \end{array} \qquad 32 \text{ no es igual a } 6 \times 5$$

Ejemplo. El número 21 es múltiplo de 3; pero no de 2. Entonces, 21 no es divisible entre 6.

$$\begin{array}{r|l} & \ 3 \\ \hline 6 & 21 \\ & \ 3 \end{array} \qquad 21 \text{ no es igual a } 6 \times 3$$

Ejercicio 13. Encierre en un rectángulo los números que son divisibles entre 6.

a) 45 b) 54 c) 78
d) 234 e) 124 f) 348
g) 824 h) 492 i) 429

5. CONJUNTO DE DIVISORES DE UN NUMERO

Dado un número cualquiera, es posible determinar el conjunto de todos sus divisores ya sea aplicando los criterios de divisibilidad que acabamos de ver, o bien, utilizando el algoritmo de la división. Por ejemplo, consideremos el 6 y busquemos todos sus divisores:

1 es divisor de 6, ya que $\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 1 & 6 \\ & 0 \end{array}$

2 es divisor de 6, ya que $\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 2 & 6 \\ & 0 \end{array}$

3 es divisor de 6, ya que $\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 3 & 6 \\ & 0 \end{array}$

4 no es divisor de 6, ya que $\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 4 & 6 \\ & 2 \end{array}$

5 no es divisor de 6, ya que $\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 5 & 6 \\ & 1 \end{array}$

6 es divisor de 6, ya que $\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 6 & 6 \\ & 0 \end{array}$

¿Es posible que algún número mayor que 6 sea divisor de 6? Desde luego que no, pues la ecuación $6 = b \times \square$ no tiene solución natural cuando b es mayor que 6.

Por consiguiente, el conjunto de los divisores de 6 es

$$\{1, 2, 3, 6\}$$

Ejercicio 14. Encuentre el conjunto de los divisores del número que se da en cada inciso.

a) 4 d) 3×5
b) 5 e) 7
c) 10 f) 11

6. NUMEROS PRIMOS Y NUMEROS COMPUESTOS

Si consideramos cualquier número natural a, mayor que 1, observamos que

1 es divisor de a (porque $a = 1 \times a$)

y también

a es divisor de a (porque $a = a \times 1$)

Por consiguiente, todo número natural mayor que 1 tiene por lo menos dos divisores.

¿Cuáles de los números del ejercicio anterior tienen solamente 2 divisores?

Si usted resolvió correctamente el ejercicio, habrá observado que éstos son 5, 7 y 11.

Los números naturales que tienen esta propiedad juegan un importante papel en las matemáticas y se llaman **números primos**.

DEFINICION. *Un número natural es* **primo** *si el conjunto de sus divisores consta de 2 elementos.*

Observemos que:

1 tiene *un solo divisor*,
los números primos tienen *dos divisores* y
los demás números naturales tienen más *de dos divisores*. A estos últimos se les llama **números compuestos.**

Ejercicio 15. Diga cuáles de los siguientes números son primos y cuáles son compuestos.

a) 9	b) 8	c) 19
d) 100	e) 17	f) 71
g) 83	h) 38	i) 91
j) 23	k) 21	l) 1 670
m) 109	n) 3 471	o) 151

Hace mucho tiempo un matemático griego llamado Eratóstenes inventó un procedimiento para encontrar los números primos entre 1 y algún número dado. El procedimiento es muy sencillo y fácil de aplicar. Por ejemplo, apliquémoslo para hallar los números primos que hay entre 1 y 100:

Primero escribimos los números naturales del 1 al 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Como 1 no es primo, lo "tachamos" de la lista. Luego consideramos el 2 (que es el primer primo que encontramos) y lo elevamos al cuadrado. Tachamos el cuadrado de 2 y todos los números que contemos "de dos en dos" a partir de él. Así quedan eliminados el 4, el 6, el 8, el 10, el 12, etcétera, que son múltiplos de 2.

Después del 2 encontramos sin tachar el número 3, que es el siguiente primo. Elevamos este número al cuadrado y, a partir de este cuadrado (9) eliminamos todos los números que contemos "de tres en tres". Así quedarán fuera el 12, el 15, el 18, el 21, etcétera, que son múltiplos de 3.

El siguiente número que encontramos sin tachar, después del 3, es el 5. Procediendo como antes, eliminamos sus múltiplos tachando "de cinco en cinco" a partir del 25, que es su cuadrado.

Seguimos así hasta hallar un primo cuyo cuadrado sea mayor que el último número considerado en la lista. Esto es, en nuestro ejemplo, suspendemos el procedimiento al llegar al 11 porque $11^2 = 121$.

Los números que quedaron sin tachar son los números primos que hay entre 1 y 100.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

A continuación damos una lista de los primeros cincuenta números primos.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229

7. MAXIMO COMUN DIVISOR Y MINIMO COMUN MULTIPLO

El conjunto de los números naturales mayores que 1 se puede dividir en dos conjuntos ajenos: el conjunto de los números primos y el conjunto de los números compuestos:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$
$$\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \ldots\}$$

Observe que todo número compuesto se puede expresar como producto de números primos, de una manera única.

Ejemplo.

$4 = 2 \times 2$ $\quad$ $6 = 2 \times 3$ $\quad$ $8 = 2 \times 2 \times 2$

$9 = 3 \times 3$ $\quad$ $10 = 2 \times 5$ $\quad$ $12 = 2 \times 2 \times 3$

Es conveniente saber expresar un número compuesto como un producto de primos. Esto puede hacerse aplicando los criterios de divisibilidad que vimos antes.

Por ejemplo, para expresar el 60 como un producto de primos podemos proceder así:

Como la última cifra de 60 es múltiplo de 2, 60 es divisible entre 2. Así, tenemos que $60 = 2 \times 30$.

Pero también 30 es divisible entre 2. Por eso, $60 = 2 \times 2 \times 15$.

Como 15 es divisible entre 3, tenemos que $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Lo anterior puede expresarse cómodamente en la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, o bien,

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Ejercicio 16. Tal como se hace en a), exprese cada número como un producto de números primos.

a) 450

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

b) 120 $\quad$ c) 105 $\quad$ d) 360

e) 144 $\quad$ f) 280 $\quad$ g) 1 008

Máximo común divisor.

En la resolución de algunos problemas, frecuentemente necesitamos considerar los divisores comunes, o bien, los múltiplos comunes de dos o más números. En especial casi siempre lo que necesitamos usar es el *máximo común divisor*, o bien, el *mínimo común múltiplo*.

Ejemplo. Consideremos los números 30 y 45.

Los divisores de 30 son:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

Los divisores de 45 son:

$$B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

Los divisores comunes de 30 y 45 son:

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 15\}$$

De estos divisores comunes, el mayor es 15. Por lo tanto, *15 es el máximo común divisor de 30 y 45.*

Ejercicio 17. Procediendo como en el ejemplo, encuentre el máximo común divisor de los números dados en cada inciso.

a) 15, 25 b) 36, 15
c) 24, 36 d) 48, 24
e) 18, 30 f) 12, 24, 48
g) 32, 48 h) 40, 48, 72

Otro método para encontrar el máximo común divisor de dos números consiste en expresar tales números como un producto de primos, considerar los factores primos comunes y luego multiplicarlos.

Ejemplo. Busquemos el m.c.d. de 36 y 30.

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

Los factores primos comunes son 2 y 3. Por lo tanto, el m.c.d. buscado es $2 \times 3 = 6$.

Ejercicio 18. Aplique el procedimiento que acabamos de describir para encontrar el m.c.d. en cada uno de los incisos del último ejercicio.

Mínimo común múltiplo

Consideremos ahora, por ejemplo, los números 12 y 20 y busquemos su mínimo común múltiplo.

Los múltiplos de 12 son

$$C = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 96, 108, 120, \ldots\}$$

Los múltiplos de 20 son

$$D = \{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, \ldots\}$$

Los múltiplos comunes son

$$C \cap D = \{0, 60, 120, 180, \ldots\}$$

De estos múltiplos comunes quitamos el cero y vemos que de los que quedan el menor es 60. Por lo tanto *60, es el mínimo común múltiplo de 12 y 20.*

Observe usted que para considerar el mínimo común múltiplo se excluye al número cero. Esto se hace así porque de otra manera siempre tendríamos que el mínimo común múltiplo de números cualesquiera sería el cero, y eso no nos ayudaría a resolver problemas.

Ejercicio 19. Procediendo como en el último ejemplo, encuentre el mínimo común múltiplo de los números dados en cada inciso.

a) 4, 6 b) 8, 12
c) 3, 5 d) 13, 2
e) 5, 7 f) 7, 21
g) 4, 6, 5 h) 10, 15, 30

Un método práctico para calcular el mínimo común múltiplo de dos números consiste en expresar tales números como productos de factores primos y luego multiplicar todos esos factores tomando sólo una vez los que son comunes. El mínimo común múltiplo es el producto de ellos. Por ejemplo,

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

$$15 = 3 \times 5$$

El mínimo común múltiplo de 12 y 15 es

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

Ejercicio 20. Calcule el m.c.m. de los números del ejercicio anterior empleando la descomposición en factores primos.

$\frac{\text{I}}{\text{IIII}}$ Diesse figur ist vñ bedeüt ain fiertel von ainez ganzen/also mag man auch ain fünfftail/ayn sechstail/ain sybentail oder zwai sechstail 2c. vnd alle ander brüch beschreiben/Als $\frac{\text{I}}{\text{V}}$ | $\frac{\text{I}}{\text{VI}}$ | $\frac{\text{I}}{\text{VII}}$ | $\frac{\text{II}}{\text{VI}}$ 2c.

$\frac{\text{VI}}{\text{VIII}}$ Diß sein Sechs achtail/das sein sechstail der acht ain ganz machen.

$\frac{\text{IX}}{\text{XI}}$ Diß Figur bezaigt ann newn ayilfftail das seyn IX tail/der XI ain ganz machen.

$\frac{\text{XX}}{\text{XXXI}}$ Diß Figur bezaichet/zwenzigk ainundreysigk tail/das sein zwenzigk tail der ainsundreissigk ain ganz machen.

$\frac{\text{II}^{\text{C}}}{\text{IIII}^{\text{C}}\text{.LX}}$ Diß sein zwaihundert tail/der Fierhundert vnd sechzigk ain ganz machen.

Página del libro "Rechen biechlin" de Köbel, editado en 1514, en ella se aprecian símbolos romanos para denotar fracciones

QUINTA UNIDAD

LOS NUMEROS RACIONALES NO NEGATIVOS. PROPORCIONALIDAD

En las unidades anteriores nuestro estudio de los números se ha limitado a los números naturales; hemos estudiado sus operaciones, sus propiedades y hemos visto cómo estos conocimientos permiten resolver muchos problemas. Sin embargo, este conjunto de números no basta para resolver otra gran variedad de problemas que se nos presentan, cuyo planteamiento y resolución requieren de otros conjuntos de números.

Por ejemplo, en el planteamiento de algún problema pueden presentarse ecuaciones como las siguientes:

$$3 \times \square = 6 \qquad\qquad 3 \times \square = 5$$

Con números naturales podemos resolver la primera, pero no la segunda, pues no hay ningún natural que multiplicado por 3 dé como producto 5.

También, al efectuar una medición con una unidad determinada, a veces es necesario considerar partes de esa unidad para que nuestra medida sea más precisa. Esas partes de una unidad no se pueden describir adecuadamente con números naturales.

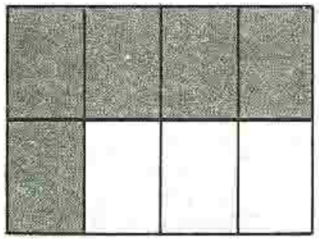
En esta unidad estudiaremos el conjunto de los **números racionales** no negativos con los que, como se verá, pueden resolverse ecuaciones del tipo anterior y también se puede medir con más precisión.

La idea de número racional se deriva de la noción, ya estudiada en la enseñanza elemental, de fracción común.

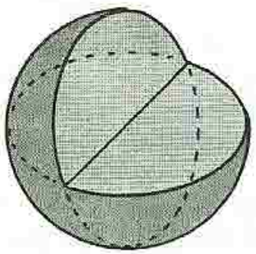
I. FRACCIONES COMUNES

Desde la escuela primaria nos hemos familiarizado con expresiones como $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{7}{10}$, etc., a las que llamamos **fracciones comunes.**

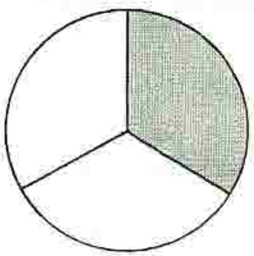
Utilizamos estas fracciones comunes en situaciones como las siguientes:



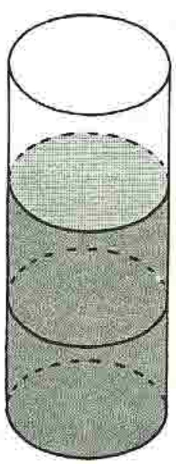
La parte sombreada en este rectángulo se describe con la fracción común $\frac{5}{8}$



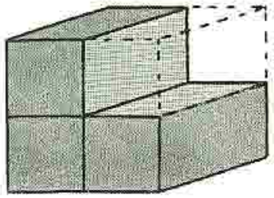
La parte de esfera que se muestra se representa con la fracción $\frac{3}{4}$



En este círculo, describimos la parte sombreada por medio de la fracción común



Denotamos la parte sombreada del cilindro con la fracción



La parte indicada en este cubo se denota con la fracción

Recordemos también que en las fracciones comunes se habla de **numerador** y **denominador:**

numerador ↘

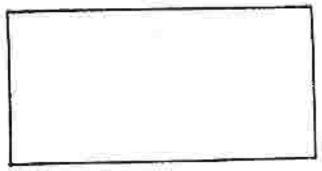
$$\frac{3}{4}$$

↗ denominador

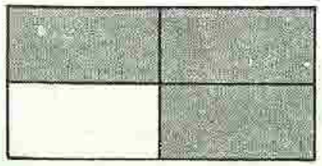
Consideremos los ejemplos anteriores y veamos cómo se encontró la fracción en cada caso. En primer lugar se tenía un objeto (un rectángulo, un círculo, una esfera, etc.) que se consideró como unidad, esta unidad se dividió en cierto número de partes del mismo tamaño y se marcaron algunas de estas partes. En cada caso la fracción tiene como denominador el número de pedazos en que se partió la unidad y como numerador el número de partes que se consideraron.

Veamos más ejemplos que ilustren las ideas anteriores.

Ejemplo. Si consideramos como unidad el siguiente objeto,

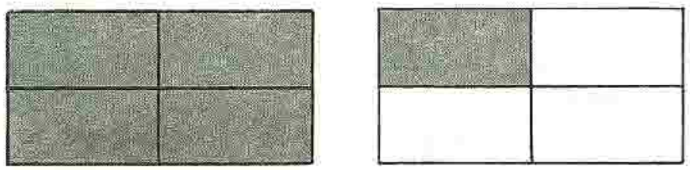


las siguientes ilustraciones corresponden a las fracciones que están anotadas a la derecha.



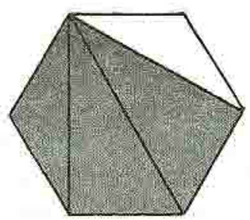
$\frac{3}{4}$

$\frac{4}{4}$



$\frac{5}{4}$

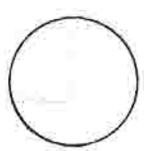
Ejercicio 1. La región sombreada en la siguiente figura no corresponde a la fracción $\frac{3}{4}$.



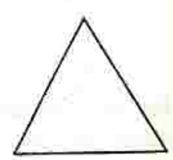
¿Puede usted explicar por qué?

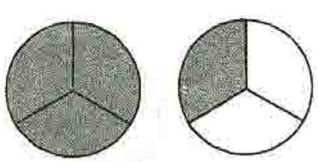
Ejercicio 2. Escriba usted a la derecha de cada una de las siguientes figuras la fracción correspondiente.

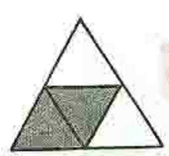
Unidad

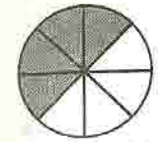


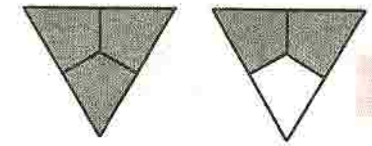
Unidad

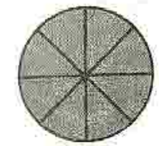


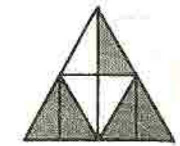






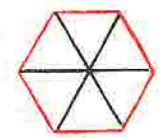




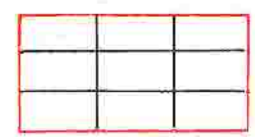


Ejercicio 3. Ilustre en las siguientes figuras las fracciones indicadas. En cada caso la unidad está marcada con rojo.

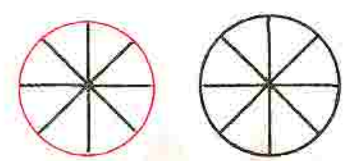
a) $\frac{5}{6}$



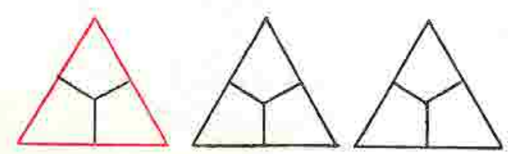
b) $\frac{1}{9}$



c) $\frac{5}{4}$

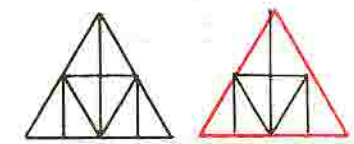


d) $\frac{8}{3}$

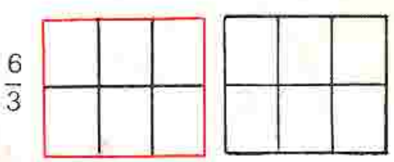


e) $\frac{2}{3}$

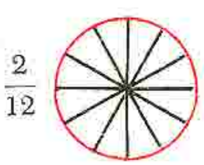
f) $\frac{5}{4}$



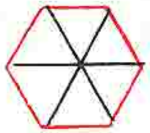
g) $\frac{6}{3}$



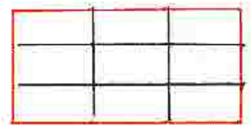
h) $\frac{2}{12}$



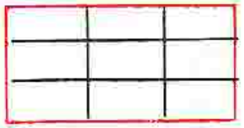
i) $\frac{2}{6}$



m) $\frac{1}{3}$



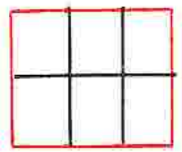
j) $\frac{4}{9}$



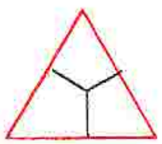
n) $\frac{2}{4}$

k) $\frac{1}{4}$

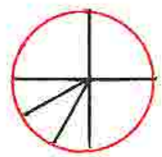
o) $\frac{3}{3}$



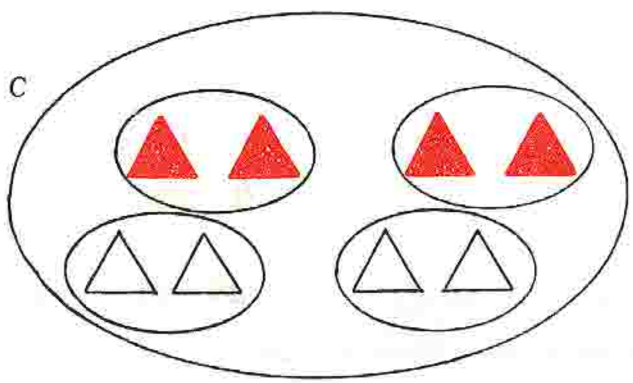
l) $\frac{2}{3}$



p) $\frac{1}{12}$



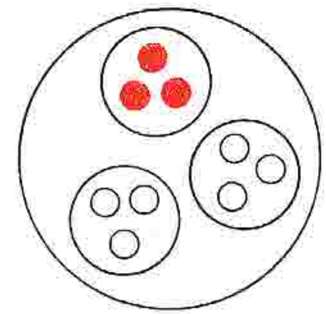
Para aclarar más nuestro concepto de fracción común podemos usar también conjuntos. Por ejemplo, consideremos el conjunto *C* con la partición indicada:



En este ejemplo tenemos una unidad que es el conjunto *C* y una partición en subconjuntos de igual número de elementos. Además se han marcado con rojo dos de los subconjuntos. Esta situación puede representarse por medio de la fracción $\frac{2}{4}$, con la cual se indica que se tomaron 2 de los 4 subconjuntos, los marcados con rojo.

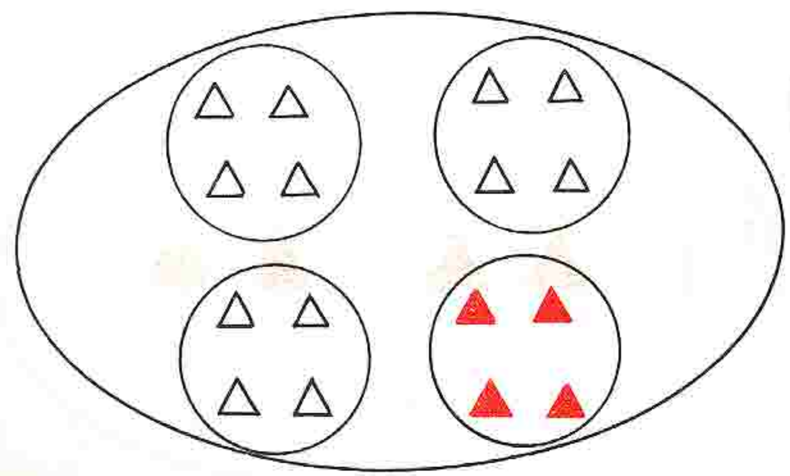
Ejercicio 4. Encuentre la fracción que expresa la situación ilustrada, tal como se hace en el inciso a).

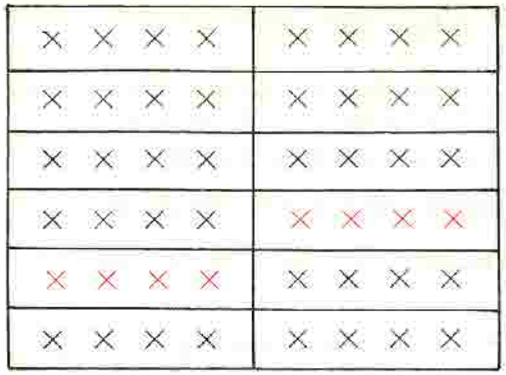
a)



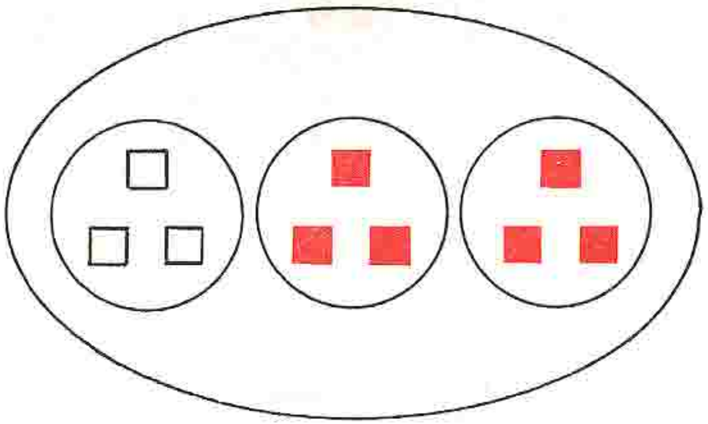
$\frac{1}{3}$

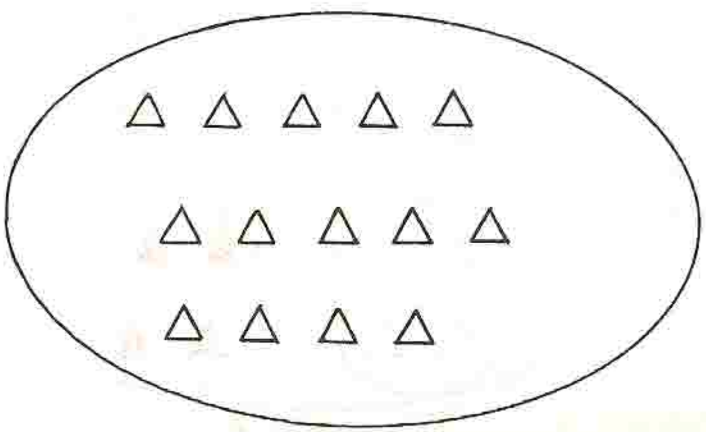
b)

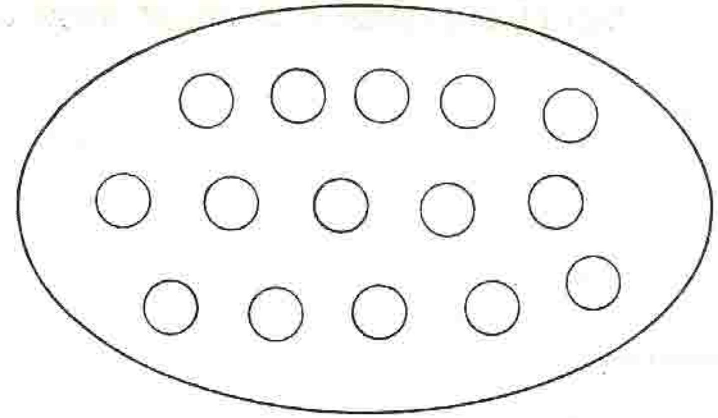


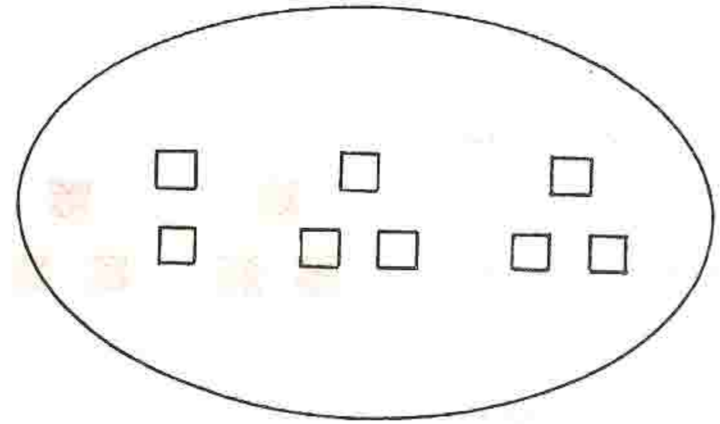
d) 

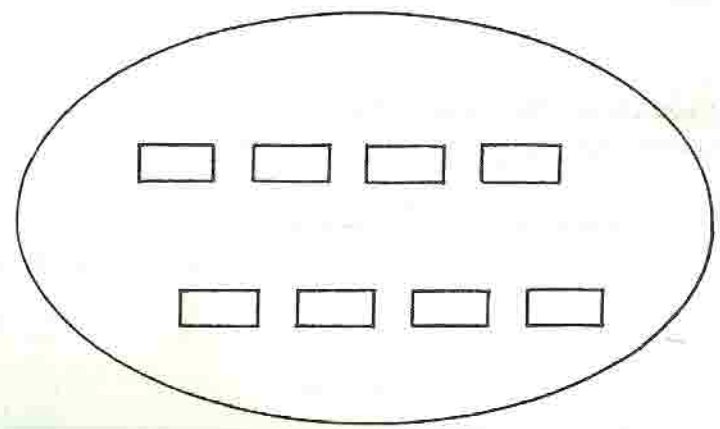
Ejercicio 5. Parta cada uno de los siguientes conjuntos en subconjuntos que tengan igual número de elementos y luego coloree algunos de tal manera que con ellos se ilustren las fracciones indicadas, tal como se muestra en el inciso a).

a) $\frac{2}{3}$ 

b) $\frac{5}{7}$ 

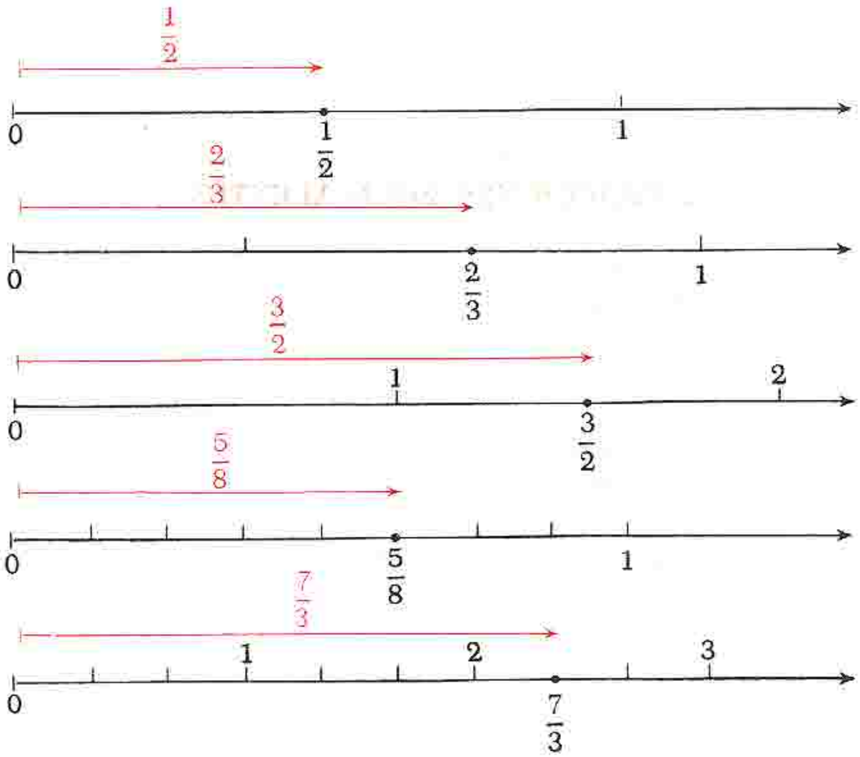
c) $\frac{3}{5}$ 

d) $\frac{7}{8}$ 

e) $\frac{3}{4}$ 

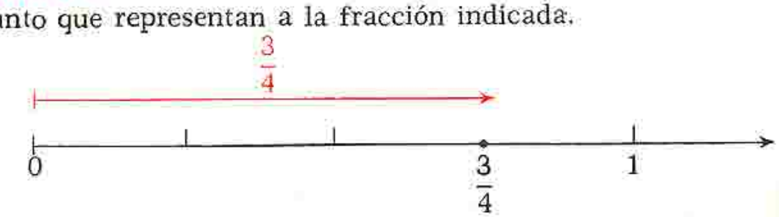
1. LAS FRACCIONES Y LA RECTA NUMERICA

Ya vimos cómo las fracciones comunes sirven para referirse a partes de regiones y partes de conjuntos. Los siguientes ejemplos ilustran cómo, de acuerdo con esta misma idea, podemos representar cada fracción con un punto en la recta numérica o con un desplazamiento.



Ejercicio 6. Tal como se hace en a), encuentre el desplazamiento y el punto que representan a la fracción indicada.

a) $\frac{3}{4}$



b) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{6}{10}$

d) $\frac{8}{3}$

e) $\frac{9}{8}$

f) $\frac{5}{5}$

2. FRACCIONES EQUIVALENTES

Sabemos ya que, por ejemplo, las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ representan lo mismo. En casos como éste decimos que las fracciones son equivalentes. Observamos aquí que en dichas fracciones se cumple que

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} \qquad\qquad 1 \times 4 = 2 \times 2$$

En general, dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ diremos que son equivalentes si se cumple que

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \qquad\qquad ad = bc.$$

Ejemplo:

a) $\frac{3}{8}$ y $\frac{6}{16}$ son fracciones equivalentes porque $3 \times 16 = 8 \times 6$

b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ no son fracciones equivalentes porque $1 \times 2 \neq 3 \times 1$

c) $\frac{8}{5}$ y $\frac{4}{10}$ no son fracciones equivalentes porque $8 \times 10 \neq 5 \times 4$

d) $\frac{3}{9}$ y $\frac{12}{36}$ son fracciones equivalentes porque $3 \times 36 = 9 \times 12$

e) $\dfrac{nb}{mb}$ y $\dfrac{n}{m}$ son fracciones equivalentes porque $nb \cdot m = mb \cdot n$

Ejercicio 7. Aplicando la definición anterior, determine si las fracciones dadas son o no equivalentes y luego indíquelo como se muestra en a) y en b).

a) $\dfrac{12}{75}$ y $\dfrac{24}{140}$ ya que $12 \times 140 \neq 24 \times 75$, las fracciones no son equivalentes.

b) $\dfrac{72}{50}$ y $\dfrac{36}{25}$ ya que $72 \times 25 = 50 \times 36$, las fracciones son equivalentes.

c) $\dfrac{18}{3}$ y $\dfrac{24}{4}$

d) $\dfrac{33}{33}$ y $\dfrac{1}{1}$

e) $\dfrac{0}{n}$ y $\dfrac{0}{m}$

f) $\dfrac{ad}{bd}$ y $\dfrac{a}{b}$

g) $\dfrac{3mn}{3mp}$ y $\dfrac{n}{p}$

h) $\dfrac{1}{2n}$ y $\dfrac{4}{8n}$

El ejemplo e) y el ejercicio f) anteriores nos muestran que dada una fracción, multiplicando su numerador y denominador por un mismo número natural obtenemos una fracción equivalente. Así, por ejemplo, una fracción equivalente a $\dfrac{3}{5}$ sería $\dfrac{3 \times 2}{5 \times 2}$, o sea, $\dfrac{6}{10}$.

Ejercicio 8. Busque tres fracciones equivalentes a cada fracción dada, multiplicando o dividiendo por un mismo número natural su numerador y denominador. Demuestre además que son equivalentes usando la definición que conoce.

a) $\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{9}{3}$

c) $\dfrac{12}{24}$

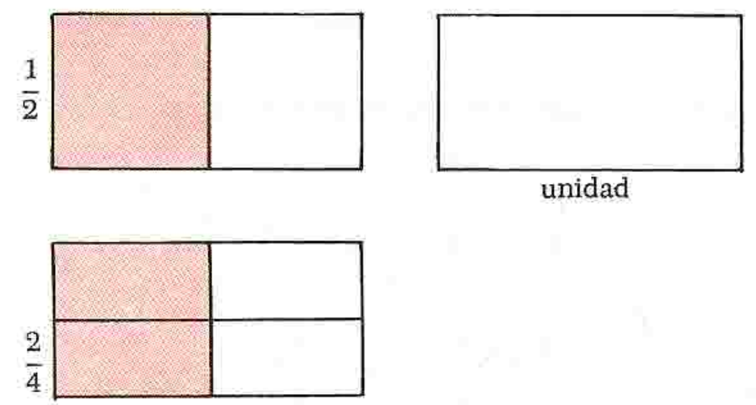
d) $\dfrac{18}{9}$

e) $\dfrac{0}{2}$

f) $\dfrac{a}{b}$

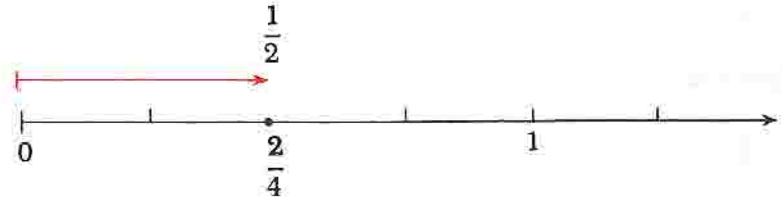
Veamos ahora cómo se interpreta la equivalencia de fracciones.

Ejemplo. Sabemos que $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{2}{4}$ son fracciones equivalentes porque $1 \times 4 = 2 \times 2$. Representemos estas fracciones de la siguiente manera:



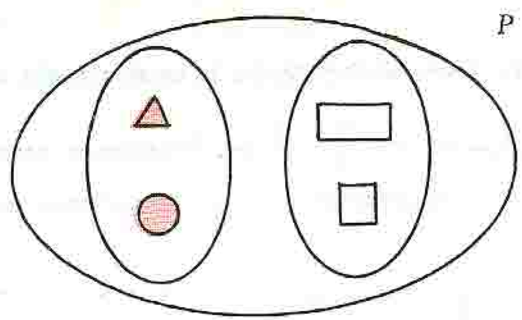
Observamos que a ambas fracciones $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{2}{4}$ les corresponde la misma parte de la unidad.

Busquemos en una recta numérica el punto y el desplazamiento que corresponda a las fracciones equivalentes $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{2}{4}$.

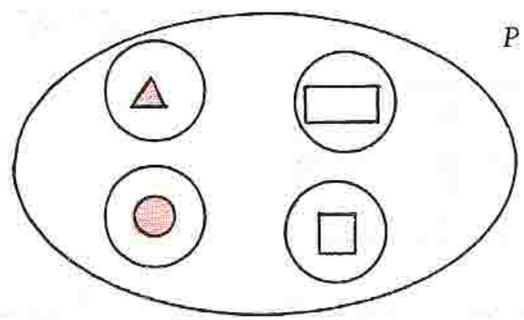


A las dos fracciones les corresponde el mismo punto y el mismo desplazamiento.

Por último, también podemos pensar que $\frac{1}{2}$ describe al siguiente subconjunto de P, el marcado con rosa.



y $\frac{2}{4}$ describe a los subconjuntos, también en rosa.



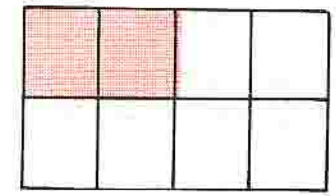
Notamos aquí que las dos fracciones equivalentes describen la misma parte del conjunto P.

A fracciones equivalentes cualesquiera, siempre les corresponde una misma parte de una región, un mismo punto o desplazamiento

en la recta numérica, y también describen una misma parte de un conjunto.

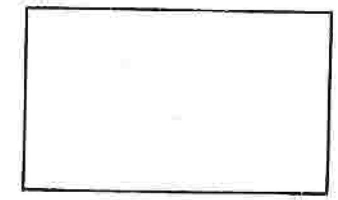
Ejercicio 9. Ilustre cada pareja de fracciones sobre la figura de la derecha considerada como unidad, y luego diga si son o no equivalentes, como se muestra en el inciso a).

a) $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}$

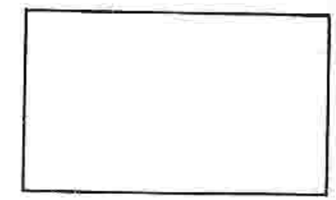


$\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{8}$ son equivalentes

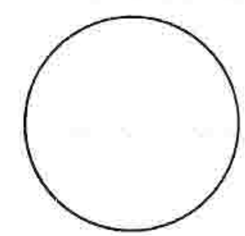
b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$



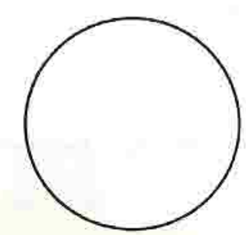
c) $\frac{1}{3}, \frac{3}{9}$



d) $\frac{1}{8}, \frac{2}{4}$



e) $\frac{1}{2}, \frac{4}{6}$



e) $\frac{a}{n}, \frac{3a}{3n}$

f) $\frac{2}{b}, \frac{8}{4b}$

g) $\frac{3}{9}, \frac{1}{3}$

h) $\frac{5}{6}, \frac{20}{24}$

i) $\frac{2n}{n}, \frac{8n}{4nn}$

j) $\frac{5b}{c}, \frac{10a}{2bc}$

Ejercicio 13. Escriba tres fracciones que representen el mismo número racional que se da en cada inciso.

a) $\frac{2}{5} = \quad = \quad =$

b) $\frac{3}{7} = \quad = \quad =$

c) $\frac{20}{12} = \quad = \quad =$

d) $\frac{a}{b} = \quad = \quad =$

En lo anterior hemos adquirido una idea de lo que son los números racionales. Para precisar mejor esa idea diremos que

Un número es racional si se puede expresar con una fracción común.

LOS NUMEROS NATURALES Y LOS NUMEROS RACIONALES

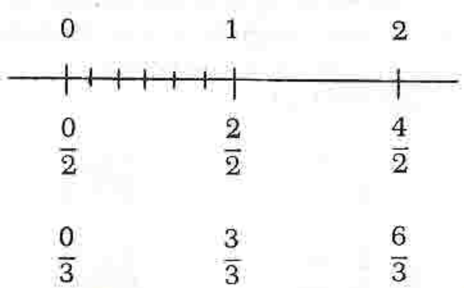
Los números naturales y el cero también se pueden representar con fracciones. Por ejemplo,

$0 = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{4}$, etc.

$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$, etc.

$2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$, etc.

$3 = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}$, etc.



Por lo tanto, *los números naturales y el cero son también números racionales.*

III. EL ORDEN EN LOS NUMEROS RACIONALES

Antes de estudiar el orden en el conjunto de los números racionales conviene que veamos cómo se pueden obtener dos fracciones con el mismo denominador que sean equivalentes respectivamente a dos fracciones dadas. Por ejemplo, consideremos las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Por la definición de equivalencia de fracciones,

$\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ (Observe que se multiplica por el denominador de $\frac{3}{4}$)

$\frac{3}{4}$ es equivalente $\frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$ (Aquí se multiplica por el denominador de $\frac{2}{3}$)

Las fracciones $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$ así obtenidas, tienen el mismo denominador.

En general, dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se tiene que

$$\frac{a}{b} \text{ es equivalente a } \frac{a \times d}{b \times d}$$

$$\frac{c}{d} \text{ es equivalente a } \frac{c \times b}{d \times b}$$

y los denominadores de $\frac{a \times d}{b \times d}$ y $\frac{c \times b}{d \times b}$ son iguales.

Ejercicio 14. Siguiendo el procedimiento anterior encuentre en cada uno de los incisos dos fracciones con un mismo denominador y equivalentes respectivamente a las fracciones dadas. (Las letras representan números naturales diferentes de cero).

a) $\frac{5}{3}, \frac{2}{8}$

b) $\frac{9}{7}, \frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{3}, \frac{2}{11}$

d) $\frac{u}{v}, \frac{r}{s}$

e) $\frac{2}{1}, \frac{3}{9}$

f) $\frac{3}{8}, \frac{a}{b}$

Como usted habrá observado, el denominador de las fracciones obtenidas es múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas.

Si consideramos un múltiplo arbitrario de los denominadores de dos fracciones, por ejemplo 12, que es múltiplo de 6 y 4, los denominadores de $\frac{7}{6}$ y $\frac{3}{4}$, tenemos que

$$12 = 6 \times 2; \text{ es decir, } 12:6 = 2$$
$$12 = 4 \times 3; \text{ es decir, } 12:4 = 3.$$

Tomando en cuenta las fracciones

$$\frac{7 \times 2}{6 \times 2}, \frac{3 \times 3}{4 \times 3}$$

tenemos que

$$\frac{7}{6} \text{ es equivalente a } \frac{7 \times 2}{6 \times 2} = \frac{14}{12}$$

$$\frac{3}{4} \text{ es equivalente a } \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

y 12 es denominador común de las fracciones obtenidas.

Observando cuidadosamente el ejemplo anterior resuelva lo siguiente:

Ejercicio 15. Encuentre, en cada uno de los incisos, fracciones respectivamente equivalentes a las dadas y que tengan como denominador común los números indicados.

a) $\frac{3}{6}, \frac{2}{4}$; denominadores comunes 12, 24, 48

b) $\frac{2}{5}, \frac{1}{10}$; denominadores comunes 20, 50, 40

c) $\frac{3}{2}, \frac{4}{7}$; denominadores comunes 14, 28, 42

d) $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}$; denominadores comunes 27, 54, 18

e) $\frac{3}{8}, \frac{12}{4}$ denominadores comunes 16, 32, 8

Es frecuente usar como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejercicio 16. Encuentre, en cada uno de los incisos, fracciones respectivamente equivalentes a las fracciones dadas y que tengan por denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores.

a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{12}$

b) $\frac{5}{10}, \frac{3}{20}$

c) $\frac{4}{7}, \frac{3}{14}$

d) $\frac{6}{9}, \frac{5}{6}$

e) $\frac{3}{2}, \frac{1}{14}$

f) $\frac{2}{5}, \frac{7}{15}$

g) $\frac{4}{7}, \frac{3}{8}$

h) $\frac{2}{5}, \frac{3}{20}$

i) $\frac{5}{8}, \frac{4}{10}$

j) $\frac{7}{6}, \frac{3}{21}$

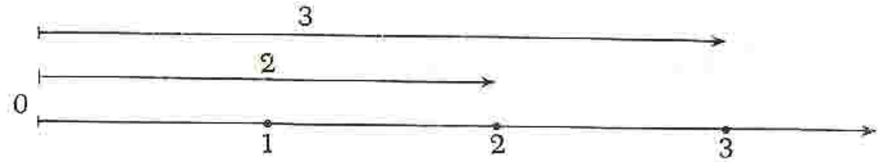
Ahora sí veamos cómo se puede considerar el *orden* entre números racionales.

Problema. Un automóvil recorre $\frac{7}{9}$ de la distancia de Córdoba a Veracruz en una hora mientras que otro recorre, en el mismo tiempo, $\frac{5}{7}$ de la misma distancia. ¿cuál de los dos cubre una distancia mayor?

Para poder resolver problemas como el anterior, es necesario estudiar el orden de los números racionales.

Recordemos cómo se interpreta el orden en los naturales en la recta numérica.

Después de ver la ilustración siguiente,

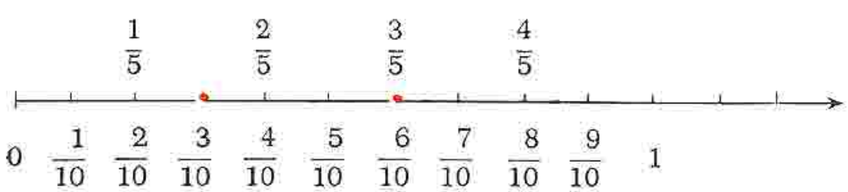


se afirma que $3 > 2$.

Para dar el orden entre los números racionales utilizaremos la misma idea.

Si r y s son números racionales, decimos que $r > s$ cuando en la recta numérica el punto correspondiente a r queda a la derecha del punto correspondiente a s.

Ejemplo. Comparemos los números $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{10}$.



Ya que $\frac{3}{5}$ está a la derecha de $\frac{3}{10}$ según lo anterior,

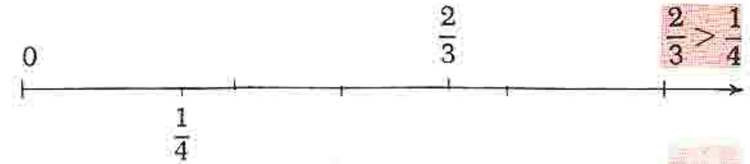
$$\frac{3}{5} > \frac{3}{10} \text{ (léase “}\frac{3}{5}\text{ es mayor que }\frac{3}{10}\text{”).}$$

Esto también puede expresarse así:

$$\frac{3}{10} < \frac{3}{5} \text{ (léase “}\frac{3}{10}\text{ es menor que }\frac{3}{5}\text{”).}$$

Ejercicio 17. Para cada una de las siguientes parejas indique cuál es el número mayor, como se hace en el inciso a).

a) $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}$



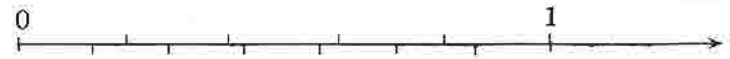
$\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$

b) 2, 5

c) $\frac{3}{3}, \frac{12}{4}$

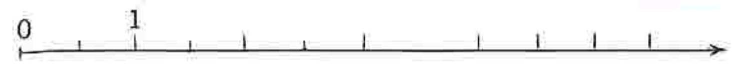
d) $\frac{3}{5}, \frac{7}{3}$

e) $\frac{3}{5}, \frac{2}{7}$



f) $\frac{10}{9}, \frac{12}{5}$

g) 3, $\frac{10}{2}$



Ejercicio 18. Localice en una recta numérica los siguientes números racionales y luego escriba en cada ▢ el símbolo $>$ o el símbolo $<$, según corresponda.

a) $\frac{2}{3}$ ▢ $\frac{5}{3}$

b) $\frac{1}{4}$ ▢ $\frac{1}{5}$

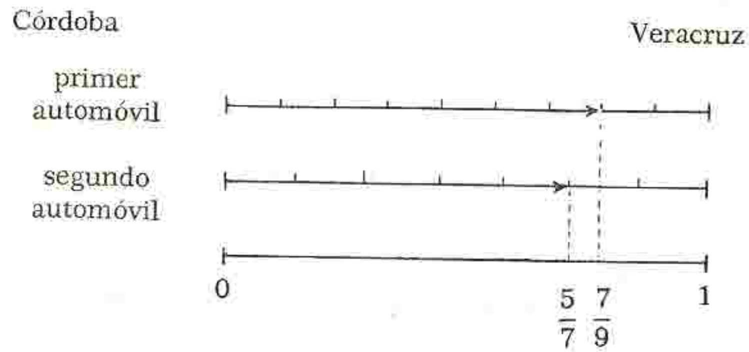
c) $\frac{3}{8}$ ▢ $\frac{4}{8}$

d) $\frac{2}{9}$ ▢ $\frac{2}{10}$

f) $3 \quad \frac{2}{7}$ h) $\frac{7}{3} \quad 3\frac{2}{4}$

g) $1\frac{1}{7} \quad \frac{7}{8}$ i) $\frac{4}{5} \quad \frac{5}{4}$

Resolvamos ahora el problema que habíamos planteado.



La ilustración anterior indica que $\frac{7}{9} > \frac{5}{7}$ y, por consiguiente, la distancia recorrida por el primer automóvil es mayor que la recorrida por el segundo.

Problemas.

1. Juan salta $\frac{7}{8}$ de lo que salta Julio; Pedro salta $\frac{6}{7}$ también de lo que salta Julio. ¿Quién de los tres salta menos y quién salta más?

2. La ilmenita contiene $\frac{8}{25}$ de titanio y $\frac{37}{100}$ de hierro. ¿Qué contiene más, titanio o hierro?

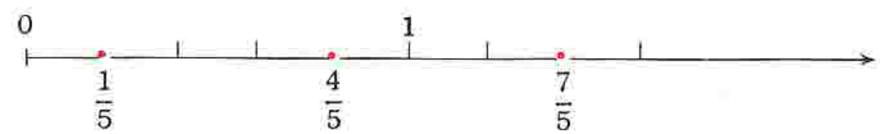
3. El óxido de zinc contiene aproximadamente $\frac{3}{15}$ de oxígeno, el óxido férrico contiene $\frac{3}{10}$ de oxígeno. ¿Cuál de estos óxidos contiene menos oxígeno?

4. Las cataratas de Sutherland en Nueva Zelandia tienen una altura de $\frac{29}{50}$ de kilómetro y las de Tugel en Sudáfrica $\frac{11}{20}$ de kilómetro. ¿Cuál de las dos cataratas tiene mayor altura?

5. Tomando como unidad la fuerza de gravedad de la Tierra, la de Mercurio es de $\frac{27}{75}$ y la de Marte es de $\frac{19}{50}$. ¿Dónde es mayor la fuerza de gravedad, en Marte o en Mercurio?

Comparar números racionales con el método gráfico que antes discutimos puede resultar a veces muy labioroso y poco preciso por eso conviene buscar otro método que nos permita decir con mayor facilidad cuándo un número racional es mayor que otro.

Consideremos el siguiente ejemplo:



Ya que $\frac{4}{5}$ representa 4 desplazamientos de $\frac{1}{5}$, y $\frac{7}{5}$ representan 7 desplazamientos también de $\frac{1}{5}$, tenemos que $\frac{7}{5} > \frac{4}{5}$.

En general,

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{b} \text{ si, y solamente si, } a > c$$

Ejercicio 19. Compare cada pareja de racionales y escriba en cada el símbolo $>$ o el símbolo $<$, según convenga. Compruebe su respuesta en una recta numérica.

a) $\frac{3}{4} \quad \frac{2}{4}$ d) $\frac{7}{5} \quad \frac{11}{5}$ g) $5 \quad 2$

b) $\frac{5}{16} \quad \frac{8}{16}$ e) $\frac{9}{8} \quad \frac{8}{8}$ h) $\frac{8}{3} \quad \frac{15}{3}$

c) $\frac{1}{2} \quad \frac{4}{2}$ f) $\frac{12}{7} \quad \frac{13}{7}$ i) $\frac{23}{35} \quad \frac{32}{35}$

Ahora bien, ¿cómo podemos comparar dos racionales representados con fracciones de diferente denominador? La respuesta es muy simple, pues dados dos números racionales sabemos cómo encontrar dos fracciones que los representen y que tengan un denominador común.

Ejercicio 20. Procediendo como en el inciso a), determine cuál es el signo adecuado ($>$, $<$) para cada $\square$.

a) $\frac{3}{4} \; \square \; \frac{2}{5}$ $\quad \begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \\ \frac{2}{5} = \frac{8}{20} \end{cases}$

y ya que $15 > 8$, entonces $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$.

b) $\frac{7}{5} \; \square \; \frac{2}{3}$	e) $\frac{3}{4} \; \square \; \frac{1}{8}$	h) $\frac{7}{3} \; \square \; \frac{3}{5}$
c) $\frac{1}{4} \; \square \; \frac{3}{7}$	f) $\frac{2}{5} \; \square \; \frac{3}{6}$	i) $\frac{10}{2} \; \square \; \frac{25}{6}$
d) $\frac{12}{5} \; \square \; \frac{9}{11}$	g) $\frac{3}{20} \; \square \; \frac{7}{10}$	j) $\frac{5}{14} \; \square \; \frac{6}{15}$

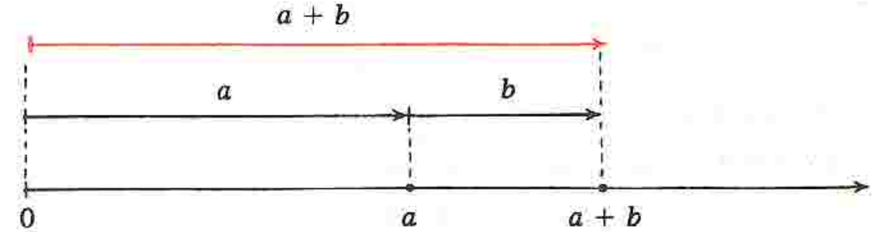
IV. OPERACIONES CON NUMEROS RACIONALES

1. ADICION

Un automovilista llenó de combustible el tanque de su vehículo al iniciar un viaje. Al hacer la primera parada de descanso notó que había consumido $\frac{1}{2}$ de ese combustible; en la segunda parada ya había gastado $\frac{1}{4}$ más del tanque completo. ¿Qué parte del combustible inicial se utilizó en esas dos etapas del viaje?

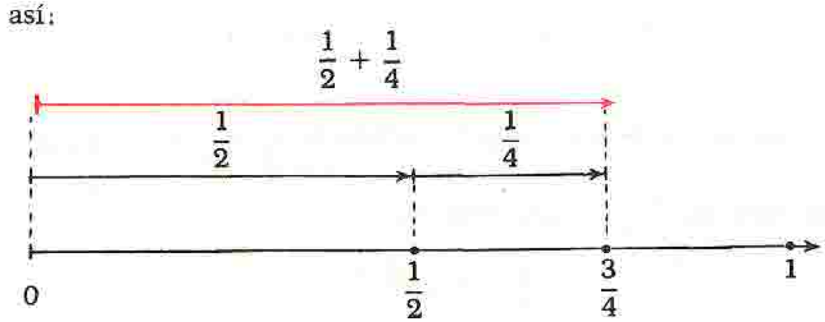
Para poder resolver problemas como éste, es necesario saber cómo se suman dos números racionales.

Según recordamos, la suma de dos números naturales a y b se ilustraba en la recta numérica así:



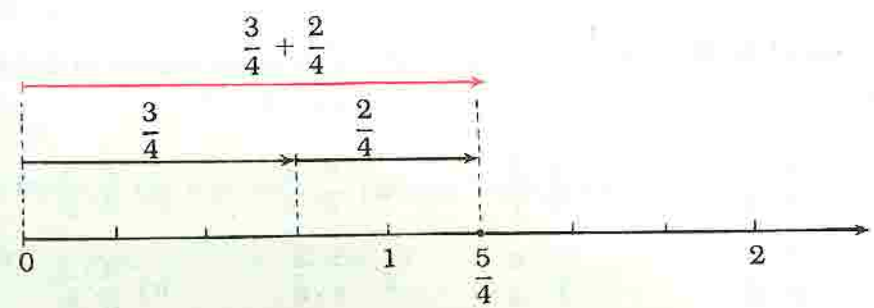
La suma de números racionales podemos ilustrarla en la misma forma:

Ejemplo. La suma de los números racionales $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{4}$ se representa así:



Aquí vemos que el punto extremo del desplazamiento que representa a la suma corresponde al racional $\frac{3}{4}$; por lo que podemos escribir $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Ejemplo. La representación de la suma de $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{4}$ en el eje numérico es la siguiente:



El punto que representa a la suma $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$ es el que corresponde a $\frac{5}{4}$.

Por eso podemos escribir $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$.

Ejercicio 21. Ilustre en la recta numérica las siguientes sumas:

a) $\frac{4}{6}+\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$ e) $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$

b) $\frac{5}{12}+\frac{3}{12}$ d) $\frac{7}{8}+\frac{5}{8}$ f) $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}$

Lo anterior nos sugiere la siguiente definición:

La suma de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ es el número racional $\frac{a+c}{b}$. En símbolos,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$

Ejemplo.

a) $\frac{2}{5}+\frac{6}{5}=\frac{2+6}{5}=\frac{8}{5}$

b) $\frac{5}{7}+\frac{4}{7}=\frac{5+4}{7}=\frac{9}{7}$

c) $\frac{15}{12}+\frac{18}{12}=\frac{15+18}{12}=\frac{33}{12}$

Ejercicio 22. Encuentre la suma de los números racionales dados en cada inciso.

a) $\frac{3}{4}, \frac{2}{4}$ b) $\frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ c) $\frac{3}{5}, \frac{6}{5}$ d) $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$

e) $\frac{7}{8}, \frac{1}{8}$ f) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ g) $\frac{5}{8}, \frac{3}{8}$ h) $\frac{4}{6}, \frac{3}{6}$

Usted ha observado que en la definición de adición de números racionales se han tomado fracciones que tienen el mismo denominador.

¿Cómo se encontrará la suma si los racionales se representan con fracciones de distinto denominador?

Por ejemplo, ¿cuál es la suma de $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$?

Para aplicar la definición es necesario, primero, encontrar dos fracciones con el mismo denominador y equivalentes a los sumandos. Por ejemplo,

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times 4}{6\times 4}=\frac{20}{24},$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 6}{4\times 6}=\frac{18}{24};$$

por lo tanto,

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{20}{24}+\frac{18}{24}=\frac{20+18}{24}=\frac{38}{24}.$$

Es claro que existen otras fracciones equivalentes respectivamente a $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$ que tienen un mismo denominador. Por ejemplo,

$$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{20}{24}=\frac{30}{36}=\frac{40}{48}=\ldots,$$

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}=\frac{18}{24}=\frac{27}{36}=\frac{36}{48}=\ldots$$

Para calcular la suma se puede considerar cualquier par de fracciones con el mismo denominador. Por ejemplo,

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{10+9}{12}=\frac{19}{12}$$

La fracción $\frac{19}{12}$ representa al mismo número racional que la fracción $\frac{38}{24}$ pues $19\times 24=12\times 38$.

Ejercicio 23. En cada uno de los siguientes incisos encuentre fracciones equivalentes a las dadas, con el denominador indicado, y después efectúe la adición señalada.

a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}$

$\frac{2}{3} = \frac{\square}{12}; \quad \frac{5}{4} = \frac{\square}{12}; \qquad \frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{\square}{12}.$

b) $\frac{7}{10}, \frac{11}{6}$

$\frac{7}{10} = \frac{\square}{30}; \quad \frac{11}{6} = \frac{\square}{30}; \qquad \frac{7}{10} + \frac{11}{6} = \frac{\square}{30}.$

c) $\frac{9}{8}, \frac{1}{2}$

$\frac{9}{8} = \frac{\square}{16}; \quad \frac{1}{2} = \frac{\square}{16}; \qquad \frac{9}{8} + \frac{1}{2} = \frac{\square}{16}.$

d) $\frac{7}{8}, \frac{1}{2}$

$\frac{7}{8} = \frac{\square}{8}; \quad \frac{1}{2} = \frac{\square}{8}; \qquad \frac{7}{8} + \frac{1}{2} = \frac{\square}{8}.$

e) $\frac{a}{9}, \frac{b}{6}$

$\frac{a}{9} = \frac{\square}{18}; \quad \frac{b}{6} = \frac{\square}{18}; \quad \frac{a}{9} + \frac{b}{6} = \frac{\square}{18}.$

Ejercicio 24. Encuentre la suma de los números racionales dados en cada inciso.

a) $\frac{9}{7}, \frac{5}{14}$ d) $\frac{3}{5}, \frac{2}{11}$ g) $\frac{a}{3}, \frac{b}{6}$ j) $\frac{4}{7}, \frac{y}{5}$

b) $\frac{7}{6}, \frac{11}{14}$ e) $\frac{17}{4}, \frac{3}{20}$ h) $\frac{u}{6}, \frac{v}{4}$ k) $\frac{7}{18}, \frac{26}{35}$

c) $\frac{25}{12}, \frac{111}{8}$ f) $\frac{9}{15}, \frac{1}{60}$ i) $\frac{x}{2}, \frac{3}{7}$ l) $\frac{m}{6}, \frac{n}{7}$

Un caso particular de la adición que conviene destacar es aquel en que uno de los sumandos es un número natural. Para resolver este caso basta recordar que, si a es un número natural, entonces

$$a = \frac{a}{1} = \frac{a \cdot n}{1 \cdot n}.$$

Así, por ejemplo,

$$3 + \frac{1}{4} = \frac{3}{1} + \frac{1}{4} = \frac{3 \times 4}{1 \times 4} + \frac{1}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 1}{4} = \frac{13}{4}.$$

Ejercicio 25. Encuentre las sumas que se indican.

a) $9 + \frac{1}{9}$ d) $4 + \frac{1}{2}$ g) $3 + \frac{5}{1}$

b) $\frac{5}{7} + 1$ e) $7 + \frac{2}{9}$ h) $a + \frac{4}{5}$

c) $\frac{3}{8} + 7$ f) $9 + \frac{2}{7}$ i) $a + \frac{b}{c}$

$(c \neq 0)$

Propiedades de la adición

A continuación, en una tabla, comparamos las propiedades de la adición de racionales con las propiedades de la adición de naturales y el cero.

Como podrá usted observar, la adición de números racionales tiene las mismas propiedades que la adición de naturales.

Propiedad	Números naturales	Números racionales
conmutativa	$a + b = b + a$	$r + s = s + r$
asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(r + s) + t = r + (s + t)$
neutro	$a + 0 = 0 + a = a$	$r + 0 = 0 + r = r$

Ya que la adición de racionales es asociativa, podemos, como en el caso de los naturales, considerar sumas de dos o más sumandos.

Ejemplo.

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{4}{6}$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

Para encontrar la suma en casos como éstos, podemos asociar convenientemente los sumandos para reducir el problema al caso simple de dos sumandos:

a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{9}\right)+\frac{4}{6}.$

b) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right).$

Por supuesto, existen varias formas de asociar; pero, debido a la propiedad asociativa de la adición, la suma siempre es la misma.

Mixtos

Usted ha oído y usado expresiones como "cinco y medio", "dos y un tercio", "uno y tres octavos", las cuales se acostumbra denotar como

$$5\frac{1}{2} \qquad 2\frac{1}{3} \qquad 1\frac{3}{8}$$

Estas expresiones, como usted sabe, representan sumas:

$$5\frac{1}{2}=5+\frac{1}{2} \qquad 2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3} \qquad 1\frac{3}{8}=1+\frac{3}{8}$$

Por lo tanto, tales expresiones denotan números racionales,

$$5\frac{1}{2}=5+\frac{1}{2}=\frac{10}{2}+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$$

$$2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$1\frac{3}{8}=1+\frac{3}{8}=\frac{8}{8}+\frac{3}{8}=\frac{11}{8}$$

Para recordar el significado de estas expresiones, denominadas mixtos, resuelva el siguiente ejercicio.

Ejercicio 26. Llene los espacios como se muestra en los incisos a) y g)

a) $2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}$ c) $6\frac{1}{7}=$ e) $8\frac{3}{5}=$

b) $3\frac{1}{7}=$ d) $9\frac{1}{4}=$ f) $4\frac{1}{6}=$

g) $6+\frac{1}{3}=6\frac{1}{3}$ i) $4+\frac{2}{7}=$ k) $12+\frac{3}{5}=$

h) $8+\frac{3}{5}=$ j) $5+\frac{1}{2}=$ l) $15+\frac{2}{7}=$

Ejercicio 27. Como se muestra en el inciso a), exprese en forma mixta los racionales indicados.

a) $\frac{19}{10}=\frac{10+9}{10}=\frac{10}{10}+\frac{9}{10}=1+\frac{9}{10}=1\frac{9}{10}$

b) $\frac{26}{23}=$

c) $\frac{14}{13}=$

d) $\frac{32}{27}=$

e) $\frac{46}{36}=$

Cuando en la escuela primaria le pedían expresar el racional $\frac{347}{28}$ como numeral mixto procedía así:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 28\overline{)347} \\ 67 \\ 11 \end{array}$$

y escribía

$$\frac{347}{28} = 12\frac{11}{28}.$$

Ejercicio 28. Usando el algoritmo de la división exprese en forma mixta los siguientes números racionales, como se muestra en el inciso a).

a) $\dfrac{43}{18}$ $\qquad 18\overline{)43}$ cociente 2, residuo 7 $\qquad \dfrac{43}{18} = 2\dfrac{7}{18}$

b) $\dfrac{127}{45}$ ▭ g) $\dfrac{806}{75}$ ▭

c) $\dfrac{218}{36}$ ▭ h) $\dfrac{849}{61}$ ▭

d) $\dfrac{4271}{351}$ ▭ i) $\dfrac{4311}{305}$ ▭

e) $\dfrac{3628}{576}$ ▭ j) $\dfrac{4071}{186}$ ▭

2. SUSTRACCION

Según recordamos, la sustracción de números naturales consiste en encontrar la solución de ecuaciones como $b + \square = a$. La sustracción de números racionales se define de manera semejante:

Si r y s son números racionales, la sustracción consiste en hallar la solución de la ecuación

$$r + \square = s.$$

La solución de la ecuación $r + \square = s$ se denota $s - r$ y se lee: "La diferencia entre s y r" o simplemente, "s menos r".

Ejemplo. La diferencia entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ es el número racional que resuelve la ecuación

$$\frac{1}{2} + \square = \frac{3}{4}$$

Este número es $\frac{1}{4}$ porque $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ por lo tanto,

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ejercicio 29. Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones, como se hace en el inciso a). (Las letras representan números naturales.)

Solución.

a) $\dfrac{4}{3} + \square = \dfrac{7}{3}$ $\qquad \dfrac{7}{3} - \dfrac{4}{3}$ $\qquad \dfrac{3}{3}$

b) $\dfrac{3}{5} + \square = \dfrac{9}{5}$ ▭ ▭

c) $\square + \dfrac{3}{4} = \dfrac{11}{4}$ ▭ ▭

d) $\dfrac{11}{10} = \square + \dfrac{2}{10}$ ▭ ▭

e) $\dfrac{a}{6} + \square = \dfrac{a+9}{6}$ ▭ ▭

f) $\square + \dfrac{3}{7} = \dfrac{b+3}{7}$ ▭ ▭

Ejercicio 30. Escriba en forma de adición la ecuación que se da en cada inciso, tal como se hace en a).

a) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \square$ $\qquad \square + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{8} = \square$ ▭

c) $\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{7} = \square$ ▭

d) $\frac{4}{6} - \frac{1}{3} = \square \qquad \square$

e) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \square \qquad \square$

f) $\frac{6}{5} - \frac{2}{5} = \square \qquad \square$

g) $\frac{8}{7} - \frac{4}{7} = \square \qquad \square$

h) $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = \square \qquad \square$

Ejercicio 31. Calcule la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{3}{4} + \square = \frac{5}{4}$ Solución: $\square$

b) $\frac{5}{9} + \square = \frac{13}{9}$ Solución: $\square$

c) $\square + \frac{10}{12} = \frac{23}{12}$ Solución: $\square$

d) $\square + \frac{6}{8} = \frac{15}{8}$ Solución: $\square$

Observe usted que en cada inciso del ejercicio anterior la solución de la ecuación es la diferencia entre la suma y el sumando dado. Esto es,

a) $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$ c) $\frac{23}{12} - \frac{10}{12} = \frac{13}{12}$

b) $\frac{13}{9} - \frac{5}{9} = \frac{8}{9}$ d) $\frac{15}{8} - \frac{6}{8} = \frac{9}{8}$

Estas diferencias se pueden calcular con un procedimiento como el siguiente:

a) $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4}$ c) $\frac{23}{12} - \frac{10}{12} = \frac{23-10}{12} = \frac{13}{12}$

b) $\frac{13}{9} - \frac{5}{9} = \frac{13-5}{9} = \frac{8}{9}$ d) $\frac{13}{9} - \frac{5}{9} = \frac{13-5}{9} = \frac{8}{9}$

En general,

La diferencia entre un número $\frac{a}{b}$ y otro número $\frac{c}{b}$ es el número $\frac{a-c}{b}$. En símbolos,

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Ejercicio 32. Tal como se hace en a), f) y l), calcule las diferencias.

a) $\frac{13}{35} - \frac{6}{35} = \frac{13-6}{35} = \frac{7}{35}$

b) $\frac{25}{8} - \frac{10}{8} = \square$

c) $\frac{14}{3} - \frac{2}{3} = \square$

d) $\frac{58}{20} - \frac{35}{20} = \square$

e) $\frac{75}{100} - \frac{28}{100} = \square$

f) $\frac{7}{9} - \frac{1}{3} = \frac{7}{9} - \frac{3}{9} = \frac{7-3}{9} = \frac{4}{9}$

g) $\frac{23}{7} - \frac{4}{3} =$

h) $\frac{2}{5} - \frac{4}{10} =$

i) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} =$

j) $\frac{7}{4} - \frac{1}{2} =$

k) $\frac{14}{7} - \frac{3}{4} =$

l) $2\frac{1}{3} - 1\frac{3}{4} = \frac{7}{3} - \frac{7}{4} = \frac{28}{12} - \frac{21}{12} = \frac{7}{12}$

m) $2\frac{3}{5} - 1\frac{3}{4} =$

n) $5\frac{1}{2} - 1\frac{3}{7} =$

ñ) $3\frac{3}{5} - \frac{17}{10} =$

o) $\frac{23}{4} - 3\frac{2}{5} =$

Problemas.

1. Las áreas de los estados de Sonora, Chihuahua y Coahuila son respectivamente $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{13}$ del área de la República Mexicana. ¿Qué parte de ésta, es la suma de las áreas de los estados mencionados?

2. El cinabrio está formado de mercurio y azufre. Si $\frac{7}{50}$ son de azufre, ¿qué parte le corresponde al mercurio?

3. La calcopirita contiene cobre, hierro y azufre. Si $\frac{61}{200}$ son de hierro y $\frac{7}{20}$ son de azufre, ¿qué parte le corresponde al cobre?

4. El satélite "Explorer 40" pesa $\frac{28}{125}$ de tonelada y el "Anna 1-B" pesa $\frac{4}{25}$ de tonelada. ¿Cuál es la diferencia de peso entre ambos satélites?

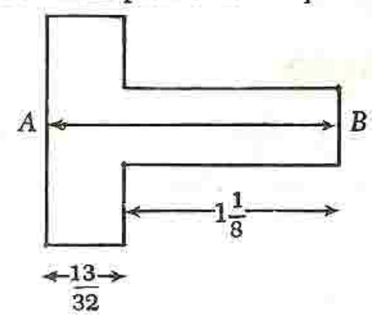
5. Al escalar una montaña, un alpinista, asciende el primer día $\frac{2}{7}$ de la altura total y el segundo día $\frac{3}{5}$. ¿Cuánto le queda por ascender?

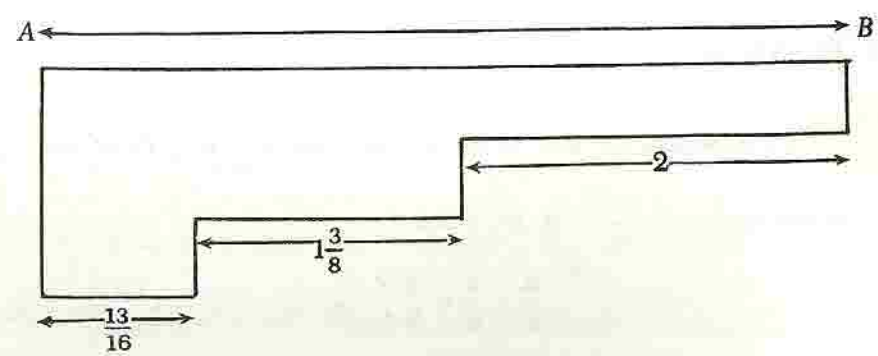
6. Las extensiones territoriales de España, Francia y Alemania, en relación con la de México, son respectivamente de $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{18}$ y $\frac{2}{11}$. Considerando a Francia y Alemania en un solo territorio, ¿es éste mayor que el de España?

7. En un grupo, $\frac{2}{3}$ de los alumnos miden menos de 1.65 m de altura, $\frac{1}{4}$ miden 1.65 m. ¿Qué parte del grupo mide más de 1.65 m?

8. Al mezclar $\frac{2}{7}$ de litro de pintura azul con $\frac{1}{4}$ de litro de pintura amarilla, ¿qué cantidad de pintura verde resulta?

9. Encuentre la longitud AB de las siguientes figuras, que representan piezas de máquinas. Las medidas están en pulgadas.





10. El señor Pedraza es un plomero. Para uno de sus trabajos necesita $2\frac{3}{4}$ metros de tubo y para otro $3\frac{2}{3}$ de metro.

a) ¿Cuántos metros de tubería requiere en total?
b) Si corta las dos piezas de un tubo de 8 metros de longitud, ¿cuántos metros le quedan?

11. Viajar de México a Acapulco en autobús requiere $6\frac{1}{2}$ horas. El mismo viaje pero en avión requiere $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cuántas horas se ahorran haciendo el viaje en avión?

12. Un alumno se tardó tres días en escribir una composición de 8 páginas. Si el primer día hizo $\frac{1}{4}$ de este trabajo y el segundo día escribió $\frac{5}{8}$, ¿cuántas páginas terminó el último día?

13. El señor Martínez ahorro $\frac{1}{3}$ de su salario mensual y gastó $\frac{1}{5}$ en renta. ¿Qué parte de su salario le quedó?

3. MULTIPLICACION

Desde la escuela primaria usted aprendió a multiplicar números racionales. Por ejemplo, para multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ procede usted de la siguiente manera:

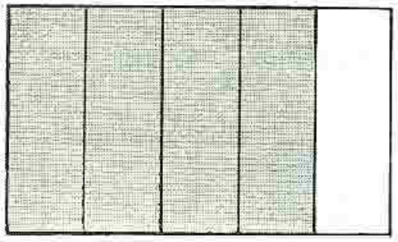
$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}.$$

En general,

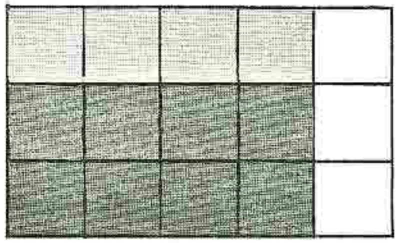
El ***producto*** *de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ es el número racional $\frac{ac}{bd}$. En símbolos,*

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

A continuación daremos una interpretación de la multiplicación de números racionales. Tomemos el ejemplo inicial, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$. Consideremos el siguiente rectángulo como unidad y representemos $\frac{4}{5}$ de él.



Consideremos ahora $\frac{2}{3}$ de esos $\frac{4}{5}$.

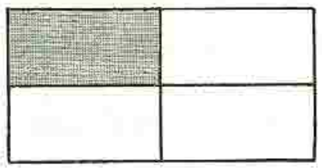


La región más oscura representa $\frac{8}{15}$ del rectángulo original. Vemos aquí que el resultado de tomar $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ del rectángulo unidad coincide con el que se obtiene al efectuar la multiplicación. Es decir, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ representa el producto

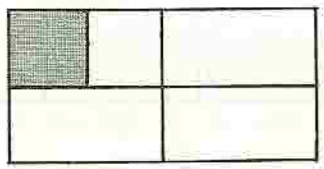
$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}.$$

Veamos otro ejemplo. El producto $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ se interpreta así:

Tomamos $\frac{1}{4}$ de una unidad:



A continuación consideramos $\frac{1}{2}$ de ese $\frac{1}{4}$:



Según vemos, la región más oscura es $\frac{1}{8}$ de la unidad. Por lo tanto,

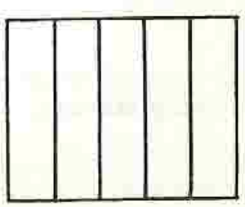
$\frac{1}{8}$ es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$.

Efectuando la multiplicación encontramos que

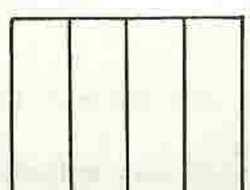
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}.$$

Esto es, multiplicar $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ se interpreta como tomar $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$.

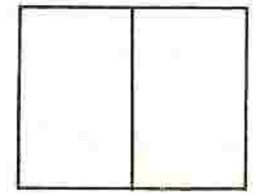
Ejercicio 33. Represente usted en los rectángulos siguientes las multiplicaciones indicadas y compruebe su resultado efectuando después la multiplicación.



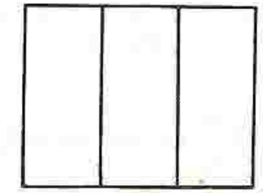
$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$



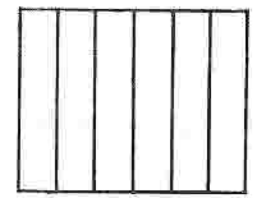
$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$



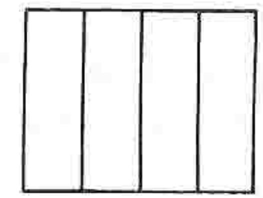
$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$



$\frac{3}{8} \times \frac{2}{3}$



$\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$



$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$

Propiedades de la multiplicación

La multiplicación de números racionales tiene las mismas propiedades que ya estudiamos en la multiplicación de números naturales; pero además tiene otra propiedad especial. Observe las siguientes multiplicaciones:

a) $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1$

b) $\frac{8}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{40}{40} = 1$

c) $\frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{4} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{4} = 1$

d) $7 \times \frac{1}{7} = \frac{7}{1} \times \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1$

Como puede usted ver en estas multiplicaciones, existen diferentes parejas de números racionales que al multiplicarse dan como resultado el número 1. Esta es una propiedad que no existía en los números naturales y puede enunciarse de la siguiente manera:

Si $\frac{a}{b}$ es un número racional distinto de cero, entonces existe el número $\frac{b}{a}$ tal que

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

A esta propiedad se le llama propiedad del *inverso multiplicativo* y se acostumbra decir que $\frac{a}{b}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{b}{a}$ y viceversa, $\frac{b}{a}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$.

Al inverso multiplicativo de un número también se le llama *recíproco* del número.

Ejercicio 34. Escriba usted el recíproco o inverso multiplicativo de los números indicados.

a) $\frac{5}{6}$	b) $\frac{3}{7}$	c) $\frac{8}{7}$	d) 2
e) 8	f) 3	g) $\frac{1}{12}$	h) $\frac{1}{3}$
i) 1	j) 10	k) $\frac{100}{33}$	l) 20

Problema. ¿Podría usted decir por qué en general el recíproco de un número natural *no* es un natural?

Ejercicio 35. Multiplique cada pareja de números y luego complete la oración que sigue, tal como se hace en los incisos a) y b).

a) $\frac{2}{8}, \frac{8}{3}$ $\frac{2}{8} \times \frac{8}{3} = \frac{16}{24}$ $\frac{2}{8}$ *no* es recíproco de $\frac{8}{3}$, porque su producto *no* es 1.

b) $8; \frac{1}{8}$ $8 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{8}$ 8 *sí* es recíproco de $\frac{1}{8}$, porque su producto *sí* es 1.

c) $3, \frac{1}{4}$ 3 es recíproco de $\frac{1}{4}$, porque su producto es 1.

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ es recíproco de $\frac{1}{4}$, porque su producto es 1.

e) $\frac{2}{4}, \frac{4}{2}$ $\frac{2}{4}$ es recíproco de $\frac{4}{2}$, porque su producto es 1.

f) $\frac{3}{5}, \frac{6}{3}$ $\frac{3}{5}$ es recíproco de $\frac{6}{3}$, porque su producto es 1.

g) $6, \frac{1}{6}$ 6 es recíproco de $\frac{1}{6}$, porque su producto es 1.

h) $\frac{1}{3}, 3$ $\frac{1}{3}$ es recíproco de 3, porque su producto es 1.

i) $2, \frac{2}{4}$ 2 es recíproco de $\frac{2}{4}$, porque su producto es 1.

j) $\frac{2}{6}, 3$ $\frac{2}{6}$ es recíproco de 3, porque su producto es 1.

En resumen, las propiedades de la multiplicación de números racionales son las siguientes:

Propiedad	Si r, s y t son números racionales, entonces
conmutativa	$rs = sr$
asociativa	$(rs)t = r(st)$
elemento neutro	$r \cdot 1 = 1 \cdot r = r$
distributiva	$r(s+t) = rs + rt$
inverso multiplicativo o recíproco	Si $r \neq 0$, existe s tal que $rs = 1$.

Compare las propiedades de este cuadro con las propiedades de la multiplicación de naturales.

4. DIVISION

Usted ya sabe efectuar divisiones con números racionales. Por ejemplo, para obtener el cociente de $\frac{3}{4}$ entre $\frac{2}{5}$ procede usted así:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}.$$

Este procedimiento que usted aplica puede expresarse en general de la siguiente manera:

El cociente de $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$ (siendo este divisor distinto de cero) es el número $\frac{ad}{bc}$. En símbolos,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Para dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$ se multiplica el dividendo $\frac{a}{b}$ por el recíproco del divisor $\frac{c}{d}$. En símbolos,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Ejemplo.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{1} = \frac{15}{4}$ $\left(\text{Aquí } \frac{5}{1} \text{ es el recíproco del divisor } \frac{1}{5}\right)$

b) $\frac{7}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{16}$ $\left(\frac{3}{2} \text{ es el recíproco del divisor } \frac{2}{3}\right)$

Ejercicio 36. Efectúe usted las siguientes divisiones procediendo como se hace en a).

a) $\frac{5}{6} \div \frac{4}{7} =$ $\frac{5}{6} \times \frac{7}{4} = \frac{35}{24}$

b) $\frac{7}{8} \div \frac{2}{3} =$

c) $\frac{10}{9} \div \frac{12}{15} =$

d) $\frac{2}{17} \div \frac{2}{15} =$

e) $\frac{5}{9} \div \frac{5}{9} =$

f) $\frac{6}{7} \div \frac{a}{x} =$

Al definir la división entre dos números naturales a y b indicamos que el cociente $a \div b$ era el número que resolvía la ecuación

$$b \times \square = a.$$

En la división de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, el cociente $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ es el número que resuelve la ecuación

$$\frac{a}{d} \times \square = \frac{a}{b}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{5}{6} \div \frac{4}{7} = \frac{5}{6} \times \frac{7}{4} = \frac{35}{24},$$

este número, $\frac{35}{24}$, es solución de la ecuación

$$\frac{4}{7} \times \square = \frac{5}{6}.$$

Comprobación:

$$\frac{4}{7} \times \frac{35}{24} = \frac{140}{168} = \frac{5}{6}.$$

Si ahora tenemos por ejemplo la ecuación

$$\frac{1}{2} \times \square = \frac{3}{5},$$

su solución es

$$\frac{3}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{6}{5}.$$

Comprobación:

$$\frac{1}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Observamos que aquí también, como en la división de naturales, el cociente es el número que multiplicado por el divisor da el dividendo

$$\underset{\text{dividendo}}{\frac{3}{5}} \div \underset{\text{divisor}}{\frac{1}{2}} = \underset{\text{cociente}}{\frac{6}{5}} \qquad \underset{\text{cociente}}{\frac{6}{5}} \times \underset{\text{divisor}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{10} = \underset{\text{dividendo}}{\frac{3}{5}}.$$

Ejercicio 37. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{1}{5} \times \square = \frac{3}{10}$

b) $\frac{2}{3} \times \square = \frac{3}{4}$

c) $\square \times \frac{5}{9} = \frac{3}{4}$

d) $\square \times 2 = \frac{1}{2}$

e) $\frac{4}{5} \times \square = 3$

f) $\frac{3}{7} \times \square = 1\frac{1}{2}$

g) $\square \times 2 = 1$

h) $\square \times 6 = 15$

i) $7 \times \square = 3$

j) $\square \times 2\frac{1}{4} = 3\frac{1}{5}$

k) $10 \times \square = 5$

l) $a \times \square = b$ (a y b son naturales)

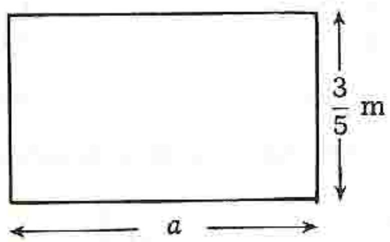
Problemas.

1. ¿Cuántos metros son $\frac{6}{5}$ de kilómetro?

2. Un objeto pesa en la Luna $\frac{1}{6}$ de lo que pesa en la Tierra. ¿Cuánto pesa en la Luna un objeto que en la Tierra pesa $\frac{3}{4}$ de kilogramo?

3. En el último juego de basquetbol, García anotó $\frac{2}{7}$ de los 105 puntos de su equipo. ¿Cuántos puntos anotó García?

4. Un espejo rectangular cuya área es $\frac{12}{15}$ m² tiene las siguientes medidas:



¿Cuál es el valor de a?

5. ¿Cuántos trozos de alambre de $\frac{3}{8}$ de decímetro de longitud se pueden cortar de un rollo de alambre que mide 72 decímetros?

6. La velocidad del sonido, en el aire, es, aproximadamente, $\frac{1}{3}$ de kilómetro por segundo. Un avión viaja a la velocidad del sonido. ¿Cuántos kilómetros recorre en

a) $\frac{1}{2}$ de hora,

b) $\frac{3}{4}$ de hora,

c) $1\frac{1}{2}$ horas,

d) 2 horas?

7. Guillermo ganó las elecciones para presidente de la sociedad de alumnos al obtener $\frac{3}{5}$ del número total de votos. ¿Cuántos alumnos votaron por él si el número total de votos fue de 325?

8. Un hombre hace un trabajo en $\frac{3}{4}$ de hora. Una máquina

hace el mismo trabajo en $\frac{1}{3}$ de ese tiempo. ¿Cuánto tarda la máquina en hacer el trabajo?

9. De las ganancias obtenidas en una fiesta, la sociedad de alumnos recibió \$388, que eran los $\frac{2}{3}$ de las ganancias totales. ¿Cuál fue el monto total de las ganancias?

10. Un camión de transporte se carga con máquinas que pesan $\frac{4}{5}$ de tonelada cada una. ¿Cuál es el número máximo de máquinas que puede cargar si su capacidad es de $4\frac{4}{5}$ de tonelada?

11. El perímetro de un cuadrado es de 17 cm. ¿Cuál es la longitud de un lado?

12. Un sastre compró $8\frac{1}{3}$ metros de casimir en 900 pesos. ¿Cuánto le costó el metro?

13. En una mezcla de concreto para una construcción, $\frac{1}{3}$ de la mezcla es arena. ¿Qué tanta arena hay en $3\frac{1}{4}$ metros cúbicos de concreto?

14. Un centímetro cúbico del elemento flúor pesa $1\frac{2}{3}$ de gramo aproximadamente.

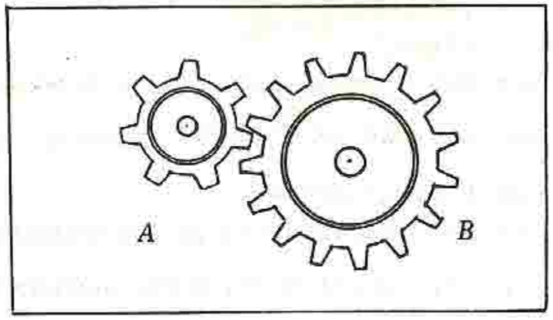
a) ¿Cuánto pesan $3\frac{1}{4}$ centímetros cúbicos?

b) ¿Qué volumen ocupan $7\frac{1}{2}$ de flúor?

15. Un hombre, caminando, recorre $\frac{2}{3}$ de kilómetro en $\frac{1}{3}$ de hora.

a) ¿Cuál es su velocidad?

b) Conociendo su velocidad y sabiendo que caminó $\frac{3}{4}$ de hora, ¿qué distancia recorrió?



16. Al girar una vuelta, el engrane A hace girar $\frac{8}{15}$ de vuelta al engrane B.

a) ¿Cuántas vueltas da el engrane B, si el engrane A gira $2\frac{1}{2}$ veces?

b) ¿Cuántas vueltas dio el engrane A, si el engrane B giró $3\frac{1}{4}$ vueltas?

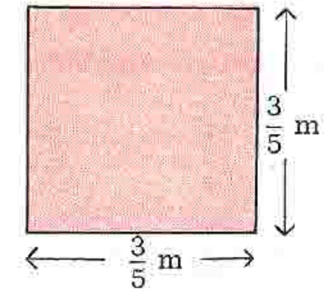
17. En los talleres con frecuencia se usa la fracción $\frac{22}{7}$ como valor aproximado de π. Use ese valor para resolver los siguientes problemas:

a) Una circunferencia tiene un radio de $\frac{3}{5}$ de metro. ¿Cuál es su longitud?

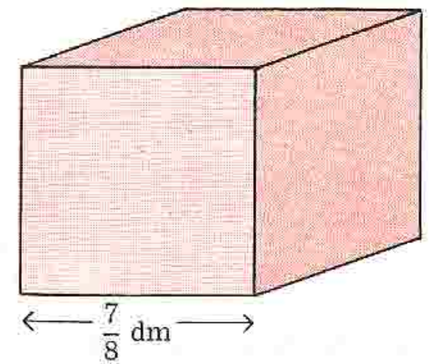
b) Una circunferencia mide de longitud $\frac{8}{9}$ de metro. ¿Cuánto mide su radio?

18. Una persona adulta respira, aproximadamente, $362\frac{7}{8}$ de litro de aire cada media hora. ¿Cuántos litros de aire respirará en $1\frac{3}{4}$ de hora?

19. Calcule el área de la siguiente figura:



20. Calcule el volumen del siguiente cubo.



V. NOTACION DECIMAL DE LOS NUMEROS RACIONALES

En la escuela primaria aprendimos una forma de nombrar a los números racionales a la cual llamamos *notación decimal*. Por ejemplo, en esa notación al racional $\frac{6}{10}$ lo expresábamos como .6, al racional $1\frac{3}{100}$ lo denotábamos como 1.03. Esto es,

$$\frac{6}{10} = .6 \quad \text{y} \quad 1\frac{3}{100} = 1.03$$

A las expresiones como .6 y 1.03 las llamaremos simplemente *decimales*.

Es muy fácil expresar en notación decimal un número racional que está indicado con una fracción cuyo denominador es 10 o una potencia de 10. El siguiente ejercicio le ayudará a recordar cómo se hace eso.

Ejercicio 38. Represente con notación decimal los racionales que se indican.

a) $\frac{1}{10} = .1$ b) $\frac{2}{10} =$ c) $\frac{3}{10} =$

d) $\frac{9}{10} =$ e) $\frac{1}{100} = .01$ f) $\frac{5}{100} =$

g) $\frac{9}{100} =$ h) $\frac{25}{100} =$ i) $\frac{73}{100} =$

j) $\frac{1}{1\,000} = .001$ k) $\frac{7}{1\,000} =$ l) $\frac{9}{1\,000} =$

m) $\frac{17}{1\,000} =$ n) $\frac{48}{1\,000} =$ o) $\frac{121}{1\,000} =$

p) $\frac{896}{1\,000} =$ q) $\frac{723}{1\,000} =$ r) $\frac{1}{10\,000} = .0001$

s) $\frac{26}{10\,000} =$ t) $\frac{125}{10\,000} =$ u) $\frac{6\,753}{10\,000} =$

Ejercicio 39. Represente con notación decimal los racionales que se indican.

a) $\frac{70}{10} =$ b) $\frac{53}{10} =$ c) $\frac{325}{10} =$

d) $\frac{125}{100} =$ e) $\frac{725}{100} =$ f) $\frac{8\,720}{100} =$

g) $\frac{3\,000}{1\,000} =$ h) $\frac{6\,953}{1\,000} =$ i) $\frac{5\,381}{1\,000} =$

Ejercicio 40. Represente con una fracción los siguientes racionales.

a) .00001 = b) .08 = c) .21 =

d) .086 = e) .96 = f) .628 =

g) 7.3 = h) 7.28 = i) 1.125 =

j) .23 = k) 3.001 = l) 50.1 =

Entre los números racionales encontramos algunas que están denotados con fracciones cuyo denominador no es una potencia de diez, pero pueden representarse con fracciones de este tipo. Y otros que no se pueden representar con fracciones de tal naturaleza. Los racionales $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{3}$ son ejemplos de estos casos.

(El racional $\frac{3}{4}$ puede representarse en la fracción $\frac{75}{100}$, que es equivalente a $\frac{3}{4}$. En cambio, no existe ninguna fracción equivalente a $\frac{5}{3}$, cuyo denominador sea una potencia de 10.)

En ambos casos podemos usar la división para encontrar el decimal que represente al racional dado. Esto se hace como se ve a continuación.

Consideremos primero al racional $\frac{3}{4}$. El decimal que corresponde a este número se obtiene dividiendo el numerador de la fracción entre el denominador.

$$\begin{array}{r|l} & .75 \\ \hline 4 & 3.00 \\ & 20 \\ & 0 \end{array}$$

Así encontramos que

$$\frac{3}{4} = .75$$

Consideremos ahora el número $\frac{5}{3}$ y procedamos en igual forma.

$$\begin{array}{r|l} & 1.66 \\ \hline 3 & 5 \\ & 20 \\ & \ \ 20 \\ & \ \ \ \ 20 \end{array}$$

Observamos que en esta división nunca aparecerá un residuo igual a cero y, por lo tanto, podemos continuar el proceso tanto como deseemos. Notamos además que, al continuar la división, la cifra 6 se repite en el cociente indefinidamente. Por consiguiente, el decimal que corresponde al número $\frac{5}{3}$ está formado por un 1, el punto decimal y una infinidad de cifras 6. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{5}{3} = 1.\overline{6}$$

(Usaremos una rayita arriba de la cifra o cifras de un decimal para indicar que ésta o éstas se repiten indefinidamente.)

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo. Para encontrar el decimal que corresponde al número $\frac{23}{11}$ procedemos así:

$$\begin{array}{r|l} & 2.090909 \\ 11 & 23 \\ & 100 \\ & \quad 100 \\ & \qquad 100 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\frac{23}{11} = 2.\overline{09}$$

A decimales como los de los últimos dos ejemplos se acostumbra llamarlos *decimales periódicos*. Se llama *periodo* al conjunto de cifras que se repiten indefinidamente en un decimal.

Ejercicio 41. Calcule el decimal que corresponde a cada uno de los siguientes números racionales.

a) $\frac{3}{5} =$ b) $\frac{2}{4} =$ c) $\frac{3}{8} =$

d) $\frac{15}{20} =$ e) $\frac{7}{5} =$ f) $\frac{15}{6} =$

g) $\frac{21}{2} =$ h) $\frac{75}{15} =$ i) $\frac{1}{3} =$

j) $\frac{7}{6} =$ k) $\frac{5}{9} =$ l) $\frac{17}{3} =$

m) $\frac{12}{7} =$ n) $\frac{7}{11} =$ o) $\frac{19}{13} =$

Ejercicio 42. Indique los decimales que representan al mismo número racional que las siguientes fracciones.

a) $\frac{4}{5} =$ b) $\frac{12}{15} =$ c) $\frac{24}{30} =$

d) $\frac{8}{10} =$ e) $\frac{16}{20} =$ f) $\frac{40}{50} =$

Con el procedimiento descrito podemos expresar a todo número racional en notación decimal.

Esta otra forma de nombrar a un número racional nos podría parecer excesiva, ya que todo número racional se puede expresar con una infinidad de fracciones. Sin embargo, el uso de la notación decimal se justifica por diversas razones. Señalemos algunas de ellas:

1) Usando la notación decimal, a cada número racional le corresponde *un solo símbolo*. (Observe los resultados del ejercicio anterior.)

2) Podemos operar con los números racionales, expresados decimalmente, en una forma muy simple. Basta con aplicar los procedimientos usados con los números naturales y algunas reglas muy sencillas sobre "el punto decimal".

Por ejemplo, cuando multiplicamos $2\frac{3}{10}$ por $\frac{8}{10}$ procedemos así:

$$2\frac{3}{10} \times \frac{8}{10} = \left(2 + \frac{3}{10}\right) \times \frac{8}{10} = \left(\frac{20}{10} + \frac{3}{10}\right) \times \frac{8}{10} = \frac{23}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{184}{100} = 1.84$$

Si los racionales $2\frac{3}{10}$ y $\frac{8}{10}$ hubieran estado expresados como 2.3 y 0.8 hubiéramos procedido así:

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times\ 0.8 \\ \hline 1.8\,4 \end{array}$$

Este procedimiento, salvo los puntos decimales, es el mismo que usamos al multiplicar los naturales 23 y 8.

Estos dos procedimientos no son independientes. El procedimiento para operar con números racionales expresados con decimales depende de la forma en que hemos definido las operaciones con racionales expresados con fracciones.

Para justificar, con algunos ejemplos, esta última afirmación, necesitamos de los siguientes conocimientos:

Todo decimal puede expresarse como el producto de un natural por una fracción de numerador 1 y denominador una potencia de 10, como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$1.3 = 1\frac{3}{10} = \frac{13}{10} = 13 \times \frac{1}{10}$$

$$0.85 = \frac{85}{100} = 85 \times \frac{1}{100}$$

$$2.4 = 2\frac{4}{10} = \frac{24}{10} = 24 \times \frac{1}{10}$$

Recíprocamente, el producto de un natural por una fracción de numerador 1 y denominador una potencia de 10 puede expresarse con un decimal, como se ve en los siguientes ejemplos:

$$6 \times \frac{1}{100} = \frac{6}{100} = 0.06$$

$$12 \times \frac{1}{10} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1.2$$

$$248 \times \frac{1}{100} = \frac{248}{100} = 2\frac{48}{100} = 2.48$$

Ejercicio 43. Exprese los siguientes números como el producto de un natural por una fracción de numerador 1 y denominador una potencia de 10.

2.75 =		0.09 =	
42.8 =		3.04 =	
3.6 =		0.008 =	
0.82 =		0.02 =	
3.92 =		2.06 =	

Ejercicio 44. Exprese como decimales los siguientes productos:

$7 \times \frac{1}{100} =$		$23 \times \frac{1}{10} =$	
$86 \times \frac{1}{10} =$		$45 \times \frac{1}{100} =$	
$32 \times \frac{1}{1\,000} =$		$112 \times \frac{1}{10} =$	
$4 \times \frac{1}{1\,000} =$		$218 \times \frac{1}{100} =$	
$92 \times \frac{1}{100} =$		$314 \times \frac{1}{1\,000} =$	

En los siguientes ejemplos veremos cómo dos reglas que usamos al operar con decimales se justifican con lo que sabemos sobre fracciones.

Ejemplo.

$$3.74 + 0.82 = 374 \times \frac{1}{100} + 82 \times \frac{1}{100}$$

$$\begin{array}{r} 3.74 \\ +\ .82 \\ \hline 4.56 \end{array}$$

$$= (374 + 82) \times \frac{1}{100} \quad \text{por la propiedad distributiva}$$

$$= 456 \times \frac{1}{100}$$

$$= 4.56$$

Ejemplo. $4.21 - 1.36 = 421 \times \frac{1}{100} - 136 \times \frac{1}{100}$

$$= (421 - 136) \times \frac{1}{100} \quad \text{por la propiedad distributiva}$$

$$\begin{array}{r} 4.21 \\ -\ 1.36 \\ \hline 2.85 \end{array}$$

$$= 285 \times \frac{1}{100}$$

$$= 2.85$$

Ejemplo.

$$3.14 \times 1.6 = 314 \times \frac{1}{100} \times 16 \times \frac{1}{10}$$

$$= 314 \times 16 \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} \text{ por la propiedad conmutativa}$$

$$\begin{array}{r} 3.14 \\ \times\ 1.6 \\ \hline 1\,884 \\ 314 \\ \hline 5.024 \end{array}$$

$$= 5\,024 \times \frac{1}{1\,000}$$

$$= 5.024$$

Ejemplo.

$$0.7 \overline{)\,37.8}$$

$$\frac{37.8}{0.7} = \frac{378 \times \frac{1}{10}}{7 \times \frac{1}{10}}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ 07.\overline{)\,378.} \\ 28 \\ 0 \end{array}$$

$$= \frac{378}{7}$$

$$= 54$$

Ejercicio 45. Efectúe las siguientes adiciones.

a) 3.2 + 8.25 + 3.4 =

b) 62.8 + .73 + 1.25 + 8.76 =

c) 527.28 + 37.407 + 86.9 + 73.9 + 11.776 =

d) 65.073 + 46.84 + 409.2 + 6 250 + .75 =

e) .075 + 1.8 + .367 + .021 + .9 + 11.26 =

f) 37.2 + .0746 + .82 + 1.096 + 4.777 =

g) 50.03 + 5.003 + .5003 + 5.3 + .003 + 5 =

h) 437 + 1.96 + .707 + 51.785 + .043 =

i) 56.08 + 47.96 + 1.709 + 805 + 47.36 =

j) 25 + 754 + 48.92 + 7.46 + .096 + 6.0008 =

Ejercicio 46. Efectúe las siguientes sustracciones.

a) 56.42 − 18.26 =

b) 35.405 − 11.362 =

c) 157.2 − 18.44 =

d) 36.217 − 7.49 =

e) .625 − .76 =

f) .8 − .507 =

g) 1.909 − 1.798 =

h) .975 − .1 =

i) 1.1 − .975 =

j) 35.8 − 7.6853 =

Ejercicio 47. Efectúe las siguientes multiplicaciones.

a) 36.5 × 8.3 =

b) 5.07 × .002 =

c) 26.3 × 46.9 =

d) .037 × .015 =

e) 1.046 × .001 =

f) 5 × .0005 =

g) 36.8 × 118.2 =

h) 4.009 × 20.05 =

i) 11.011 × .042 =

j) 23 × .0823 =

Ejercicio 48. Efectúe las siguientes divisiones.

a) $\frac{36.12}{86} =$

b) $\frac{10.971}{207} =$

c) $\frac{0.4375}{0.125} =$

d) $\frac{4365}{.005} =$

e) $\frac{9.375}{4.76} =$

(Calcule el cociente hasta milésimos.)

f) $\frac{43.45}{3.1416} =$

(Calcule el cociente hasta milésimos.)

g) $\frac{86.72}{372.6} =$

(Calcule el cociente hasta milésimos.)

h) $\frac{3.1416}{6.67} =$

(Calcule el cociente hasta milésimos.)

i) $\frac{34.675}{4.375} =$

(Calcule el cociente hasta milésimos.)

j) $\frac{3675}{.0875} =$

(Calcule el cociente hasta milésimos.)

Ejercicio 49. Efectúe las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{45.3 - 16.85}{8.2 + 3.7} =$

(Calcule el resultado final hasta milésimos.)

b) $\dfrac{36.7 \times 8}{5.7 + 6.4} =$

(Calcule el resultado hasta milésimos.)

c) $\dfrac{76.46 - 11.28}{5.26 \times 2} =$

(Calcule el resultado hasta milésimos.)

d) $\dfrac{875}{3.2 \times 1.5} =$

(Calcule el resultado hasta milésimos.)

e) $\dfrac{8 \times 36}{2.5} =$

(Calcule el resultado hasta milésimos.)

f) $\dfrac{56.8 \times 3.6}{7.5} =$

(Calcule el resultado hasta milésimos.)

VI. PROPORCIONALIDAD

En la escuela primaria usted aprendió a resolver cierto tipo de problemas empleando los conceptos de razón y proporción. Es conveniente recordar aquí estos temas, pues frecuentemente nos encontramos con problemas que se resuelven aplicando esos conceptos.

1. RAZONES

Para ilustrar el concepto de razón empezaremos con un ejemplo.

Un avión hace un recorrido en línea recta y durante él cubre distancias iguales en tiempos iguales. Si sabemos que recorre 2 400 kilómetros en 4 horas, decimos que la *velocidad* del avión es el cociente

$$\frac{2\,400}{4}.$$

Si dice también que la velocidad, en este caso, es la **razón** de la distancia recorrida por el avión entre el tiempo que tardó en recorrer tal distancia.

Como vemos en este ejemplo, una **razón** no es más que el cociente de dos números.

*La **razón** de un número m a un número n $(n \neq 0)$ es el cociente $\dfrac{m}{n}$.*

En la ciencia, la técnica y la práctica diaria encontramos muchas razones que a veces denominamos de una manera especial.

Ejemplos.

1. Si en un mapa cada centímetro representa 100 centímetros de un terreno, se dice que la escala del mapa es de $\dfrac{1}{100}$. En este caso, la escala es la razón de una longitud cualquiera del mapa entre la correspondiente longitud del terreno.

2. Supongamos que en un país hay 8 enfermos de reumatismo por cada 1 000 habitantes. Se dice entonces que la *morbilidad* es de $\dfrac{8}{1\,000}$. La morbilidad es la razón del número de enfermos entre el número de habitantes considerado.

3. Un beisbolista bateó 8 hits en 20 veces al bat. Se dice que su porcentaje de bateo es de $\dfrac{8}{20}$ o de .400. El *porcentaje de bateo* es la razón del número de hits entre el número de veces al bat.

4. Un automóvil recorrió 360 kilómetros con 30 litros de gasolina. El *rendimiento* es el cociente $\dfrac{360}{30}$ o sea 12. Decimos que la razón de los kilómetros recorridos entre los litros consumidos es el rendimiento del automóvil. En el ejemplo, el rendimiento del automóvil es de 12 kilómetros por litro de gasolina.

5. La llanta de un automóvil está a una *presión* de 2 kilogramos por centímetro cuadrado. La *presión* es la razón de la fuerza entre el área.

6. En la República Mexicana, de acuerdo con el censo de 1970, hay 48 313 438 habitantes y tiene una extensión de 1 972 546 kilómetros cuadrados. Su densidad de población es de 24.5 habitantes por kilómetro cuadrado. La *densidad de población* es la razón del número de habitantes entre el área que habitan.

7. La razón de la longitud de una circunferencia entre su radio es 2π. El número π es aproximadamente igual a 3.1416.

Ejercicio 50.

a) En un mapa, cada centímetro representa 10 000 centímetros. ¿Cuál es la escala?

b) Un ferrocarril recorrió con velocidad constante 180 kilómetros en 3 horas. ¿Cuál fue su velocidad?

c) En cierta ciudad hay 5 cardiacos por cada 1 000 habitantes, ¿Cuál es la morbilidad?

d) Un beisbolista que fue al bat 150 veces, bateó 45 hits. ¿Cuál fue su porcentaje de bateo?

e) Una fábrica produce 400 unidades tipo A por cada 600 unidades tipo B. ¿Cuál es la razón del número de unidades tipo A con respecto al número de unidades tipo B?

f) Un gramo de sal contiene .4 gramos de sodio. ¿Cuál es la razón del peso del sodio respecto al peso de la sal?

g) El Estado de Colima tiene una extensión de 5 455 kilómetros cuadrados y una población de 240 235 habitantes. ¿Cuál es su densidad de población?

2. PROPORCIONES

En el primer ejemplo con que ilustramos el concepto de razón hablamos de un avión que recorría 2 400 kilómetros en 4 horas. A continuación se describen, con la siguiente tabla, las distancias (en kilómetros) recorridos por dicho avión durante la segunda y la cuarta horas de vuelo.

DISTANCIA RECORRIDA	1 200	2 400
TIEMPO	2	4

Observamos aquí que la *velocidad* del avión durante 2 horas de vuelo es igual a la *velocidad* durante 4 horas de recorrido. Es decir,

$$\frac{1\,200}{2} = \frac{2\,400}{4}$$

Esta última igualdad recibe el nombre de **proporción.**

Como vemos, **una proporción no es más que la igualdad de dos razones.**

Si a, b, c y d son números racionales con b y d diferentes de cero, entonces la igualdad

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

es una **proporción.**

En una proporción, a los números a y d se acostumbra llamarles *extremos* y a los números b y c se les denomina *medios*.

Las proporciones tienen una propiedad que llamaremos **propiedad fundamental de las proporciones** y que se puede expresar de la siguiente manera:

En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

En símbolos,

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *entonces* $ad = cb$

Ejemplo.

a) $\frac{8}{20} = \frac{32}{80}$ es una proporción y en ella se cumple que $8 \times 80 = 32 \times 20$

b) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{7}} = \dfrac{\frac{6}{10}}{\frac{32}{28}}$ es una proporción y en ella tenemos que $\frac{3}{5} \times \frac{32}{28} = \frac{8}{7} \times \frac{6}{10}$.

c) $\frac{2.5}{10} \neq \frac{5}{12.5}$ no es una proporción y, por lo tanto,

$$2.5 \times 12.5 \neq 5 \times 10.$$

Ejercicio 51. Utilizando la propiedad fundamental, escriba el símbolo $=$ o $\neq$ para indicar si las razones dadas forman o no una proporción.

a) $\frac{8}{5} \quad \frac{24}{15}$ d) $\frac{16}{5} \quad \frac{12}{3}$

b) $\frac{5}{2} \quad \frac{10}{4}$ e) $\frac{16}{5} \quad \frac{12}{3}$

c) $\frac{7}{5} \quad \frac{11}{8}$ f) $\frac{27}{18} \quad \frac{9}{6}$

La propiedad fundamental de las proporciones nos es útil para resolver problemas en que, dada una proporción, se desconocen algunas de sus partes. Por ejemplo, si tenemos la proporción $\frac{x}{5} = \frac{9}{3}$, el número x lo podemos calcular así:

Como $\frac{x}{5} = \frac{9}{3}$, entonces $x \times 3 = 9 \times 5$ (propiedad fundamental).

De esta última ecuación y por la definición de división tenemos que

$$x = \frac{9 \times 5}{3} = 15.$$

Por consiguiente, el número buscado es 15.

Comprobación: $\frac{15}{5}$ sí es igual a $\frac{9}{3}$.

Ejercicio 52. Calcule, usando la propiedad fundamental de las proporciones, el valor de las letras en los siguientes incisos.

a) $\frac{a}{6} = \frac{8}{12}$ d) $\frac{3}{x} = \frac{21}{35}$ g) $\frac{22}{11} = \frac{21}{y}$

b) $\frac{15}{3} = \frac{t}{4}$ e) $\frac{w}{16} = \frac{2}{48}$ h) $\frac{15}{38} = \frac{x}{3}$

c) $\frac{18}{n} = \frac{28}{14}$ f) $\frac{26}{78} = \frac{2}{z}$ i) $\frac{92}{y} = \frac{46}{7}$

3. VARIACION PROPORCIONAL

Frecuentemente tenemos situaciones análogas a la que se describe a continuación: Si cada uno de los libros de una colección cuesta

\$15, podemos contestar inmediatamente cuánto cuestan 2 libros, 3 libros, 20 libros, etc., y formar con ello la siguiente tabla:

Número de libros	1	2	3	8	20
Costo	15	30	45	120	300

Observemos, en el ejemplo, que a cada número de libros le corresponde un precio y que la razón del número de libros a su precio es la misma en cada caso:

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{30} = \frac{3}{45} = \frac{8}{120} = \frac{20}{300}.$$

En este caso se dice que el precio *varía en forma directamente proporcional* al número de libros.

Observemos también que si aumentamos el número de libros el costo aumenta y que si disminuimos el número de libros el costo disminuye.

Consideremos el siguiente problema: Supongamos que la distribución de proteínas de la carne es uniforme y que 80 gramos de carne de res contiene 16 gramos de proteína; ¿cuántos gramos de proteínas contendrán 150 gramos de carne?

La suposición anterior se puede expresar también diciendo que el número de gramos de proteínas de la carne es directamente proporcional al número de gramos de carne que consideremos en cada caso.

Esto también podemos expresarlo diciendo que la razón que existe entre el número de gramos de carne y el número de gramos de proteína es siempre la misma. Por lo tanto, para resolver el problema podemos considerar la proporción

$$\frac{80}{16} = \frac{150}{x},$$

en la cual x es el número de gramos de proteína en 150 gramos de carne.

Al resolver la proporción tenemos que

$$x = \frac{16 \times 150}{80},$$

$$x = 30.$$

Esto nos indica que en 150 gramos de carne hay 30 gramos de proteína.

Ejemplo.

a) La distancia recorrida por un móvil es directamente proporcional al tiempo, si la velocidad es constante.
b) El número de obreros es directamente proporcional al trabajo que realizan, suponiendo a cada obrero el mismo rendimiento.
c) La distancia recorrida por un móvil es directamente proporcional a la velocidad, si ésta es uniforme y el tiempo es el mismo.
d) El volumen de un gas es directamente proporcional a su temperatura, si la presión es constante. (Dentro de ciertos límites.)
e) La longitud de la circunferencia es directamente proporcional a la longitud del radio del círculo.
f) La intensidad de una corriente es directamente proporcional al voltaje, si la resistencia es constante. (Dentro de ciertos límites.)

Discutiremos a continuación otro tipo de problemas que se presentan con cierta frecuencia. Por ejemplo, veamos el siguiente:

En una fábrica 6 obreros hacen cierto trabajo en 8 horas. Si solamente 3 de ellos se dedicaran a hacerlo, ¿en qué tiempo lo harían?

Si suponemos que el rendimiento de cada obrero es uniforme, es fácil ver que la mitad de los obreros necesitan el doble de tiempo. Esto es, si 6 obreros hacen cierto trabajo en 8 horas, 3 obreros ocupan 16 horas para hacer el mismo trabajo.

De acuerdo con el razonamiento anterior, podemos contestar a las preguntas, ¿cuánto tiempo tardan en hacer el mismo trabajo la tercera parte de los obreros?, ¿la sexta parte?, ¿ocho obreros?, ¿el doble de obreros?, etc. Los hechos anteriores podemos expresarlos en la siguiente tabla:

Número de obreros	Tiempo que tardan en hacer el trabajo
6	8
3	16
2	24
1	48
8	6
12	4

Note usted que en este ejemplo, a cada número de obreros le corresponde cierto tiempo para hacer el trabajo y que al considerar dos renglones cualesquiera de la tabla anterior, por ejemplo,

3	16
8	6

los productos 3×16 y 8×6 son iguales. Es decir,

$$3 \times 16 = 8 \times 6$$

Observemos también que si aumenta el número de obreros, disminuye el tiempo en que se hace el trabajo y que si disminuye el número de obreros, aumenta el tiempo en que se hace el trabajo (suponiendo que no se interfiere el trabajo cuando aumenta o disminuye el número de obreros). En este caso, se dice que el tiempo *varía en forma inversamente proporcional* al número de obreros.

En general, si expresamos el número de obreros de una primera situación con x_1 y el tiempo que le corresponde con y_1, y el número de obreros en una segunda situación con x_2 y el tiempo que le corresponde con y_2, podemos decir que

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$$

Con esta expresión podemos resolver problemas como el planteado inicialmente, en forma mecánica.

Problema.

En una fábrica, 5 obreros hacen cierto trabajo en 15 horas. Si se pusieran a hacer el mismo trabajo 10 obreros, ¿en qué tiempo lo harían?

Resolución. En este problema el tiempo varía en forma inversamente proporcional al número de obreros.

$$x_1 = 5; \quad y_1 = 15$$
$$x_2 = 10; \quad y_2 =$$

Por consiguiente,

$$5 \times 15 = 10 \times y_2$$

$$y_2 = \frac{5 \times 15}{10} = \frac{75}{10} = 7.5$$

Solución. Los 10 obreros harían el trabajo en 7.5 horas.

En muchas situaciones las cantidades que aparecen en ellas varían en forma inversamente proporcional una con respecto a la otra.

Ejemplo.

a) El tiempo que emplea un móvil en recorrer una distancia es inversamente proporcional a su velocidad, cuando la distancia es constante.

b) El largo de un rectángulo es inversamente proporcional al ancho, cuando el área es constante.

c) El volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión, si la temperatura es constante.

d) El tiempo que tarda en llenarse un tinaco es inversamente proporcional al número de surtidores que se emplean en el llenado, suponiendo que los surtidores proporcionan la misma cantidad de agua por unidad de tiempo.

Problemas. Resuelva cada uno de los siguientes problemas, determinando primero si se trata de una variación directa o inversamente proporcional.

1. Un médico ausculta los ruidos cardiacos de un enfermo con fiebre y encuentra que su corazón late uniformemente 25 veces en 15 segundos. ¿Cuántos latidos percibirá el médico durante un minuto?

2. Un avión Boeing 727, en condiciones normales de vuelo, gasta 10 toneladas de combustible volando 2 500 kilómetros de México a Los Angeles. ¿Cuántas toneladas gastará volando de México a Chicago en las mismas condiciones de vuelo, sabiendo que la distancia que recorrerá el avión es de 3 200 kilómetros?

3. Cierta cantidad de gas ocupa un volumen de 85 centímetros cúbicos a una presión de 570 milímetros de mercurio. ¿Cuál será el volumen que ocupará el mismo gas a una presión de 760 milímetros de mercurio a temperatura constante?

4. Normalmente los riñones filtran 180 litros de sangre en un día. ¿Cuántos litros de sangre filtran en una hora?

5. Dos terrenos rectangulares tienen la misma área. Si uno de ellos mide 20 metros de largo y 10 metros de ancho y el otro mide 25 metros de largo, ¿cuántos metros medirá de ancho?

6. Cierto depósito de agua tarda en llenarse 1.5 horas con 2 surtidores. ¿Cuántos surtidores debemos emplear para llenarlo en media hora?

7. Un comerciante compra 200 kilogramos de frijol a $1.80 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de frijol habría comprado con el mismo dinero si el precio hubiera sido de $2.40 el kilogramo?

8. Un automóvil gasta 20 litros de gasolina en un recorrido de 180 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorrerá con 30 litros de gasolina, suponiendo que el rendimiento del automóvil es constante?

9. En una zona donde se cultiva la caña de azúcar, en 8 hectáreas se producen 480 toneladas. ¿Cuántas toneladas se producirán en 15 hectáreas?

10. Ocho aviones Comet consumen 480 toneladas de combustible en 15 horas de servicio. ¿En cuántas horas gastarán el mismo combustible 10 aviones?

11. Un automovilista viaja a 60 kilómetros por hora y tarda 7 horas en su recorrido. ¿Qué tiempo tardaría en recorrer la misma distancia si viajara a 70 kilómetros por hora?

12. En el agua hay 16 gramos de oxígeno por cada 2 gramos de hidrógeno. ¿Cuántos gramos de oxígeno habrá en un volumen de agua que contiene 17 gramos de hidrógeno?

13. El corazón de un hombre adulto, bombea 5 litros de sangre por minuto. ¿Cuántos litros de sangre bombea en 6 horas?

14. En el óxido de mercurio hay 16 gramos de oxígeno por cada 200 gramos de mercurio. ¿Cuántos gramos de mercurio habrá en una porción de óxido de mercurio que contiene 250 gramos de oxígeno?

15. En un día, el corazón humano late 115 200 veces. ¿Cuántas veces latirá en un minuto?

16. A una presión de 850 milímetros de mercurio, cierto gas ocupa un volumen de 460 centímetros cúbicos. ¿Qué presión deberá tener el gas a temperatura constante para que ocupe un volumen de 1 150 centímetros cúbicos?

17. Un hombre en reposo respira 780 veces en una hora. ¿Cuántas veces respirará en un minuto?

LEONARDO FIBONACCI (1170–1250)

(Conocido también como Leonardo de Pisa)

Entre los diferentes aspectos de la matemática que él trabajó, destaca su estudio de los números enteros

SEXTA UNIDAD

LOS NUMEROS ENTEROS Y SUS OPERACIONES

1. EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS

Al principio de este curso de matemáticas estudiamos los números naturales y el cero. Estos números se usan en el planteamiento y la resolución de algunos problemas prácticos que implican la idea de contar o de medir. Pero hay muchos otros problemas del mismo tipo que no pueden resolverse con estos números. Por ello hemos tenido que estudiar y manejar también los números racionales.

Ahora, en esta unidad, estudiaremos una nueva clase de números que se utilizan en la resolución de otro tipo de problemas.

El problema "¿qué número sumado con 1 es igual a cero?", puede expresarse simbólicamente así: $\square + 1 = 0$, o bien así: $0 - 1 = \square$. Y ya antes hemos visto que ningún número natural o cero puede ser solución de dicho problema.

Las siguientes ecuaciones son del mismo tipo:

$13 + \square = 5$	$30 + \square = 15$	$1\,000 + \square = 350$
o bien,	o bien,	o bien,
$5 - 13 = \square$	$15 - 30 = \square$	$350 - 1\,000 = \square$

En general, si a y c son números naturales cualesquiera y además $c < a$, entonces las ecuaciones:

$$a + \square = c$$

y

o bien,

$$c - a = \square$$

no tienen ninguna solución si consideramos únicamente a los números naturales y al cero.

Los números que dan solución a este tipo de ecuaciones se llaman números enteros negativos y son los que estudiaremos a continuación.

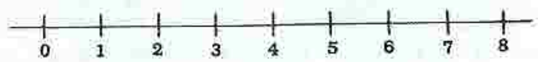
1. LOS NUMEROS ENTEROS NEGATIVOS

Por cada número natural hay un número entero negativo.

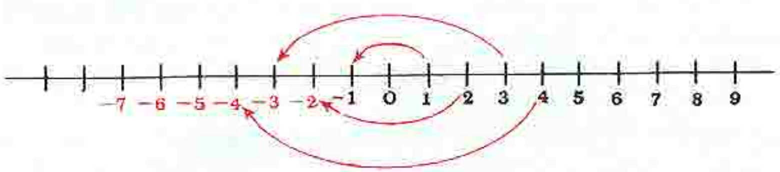
Ejemplo.

a) Al 1 le corresponde el entero negativo -1. (Léase: "menos uno".)
b) Al 2 le corresponde el negativo -2. (Léase "menos dos".)
c) Al 3 le corresponde el negativo -3 ("menos tres").
d) Al 5 le corresponde -5 ("menos cinco").
e) A 1 082 le corresponde $-1\,082$, etc.

Para darnos una idea de los números naturales y el cero, los hemos representado en una recta numérica así:



Ahora representaremos los enteros negativos en la misma recta numérica, de la siguiente manera:



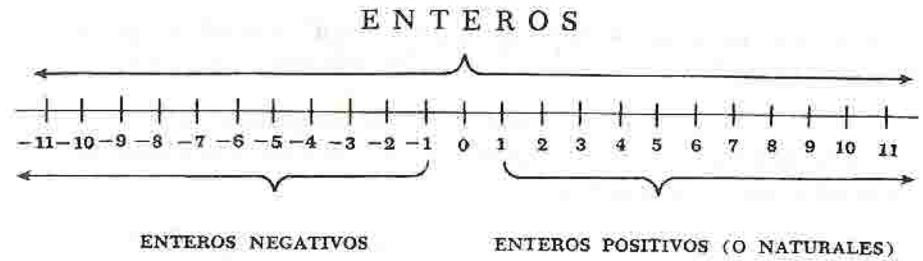
(Observe que los enteros negativos se representan a la izquierda del cero.)

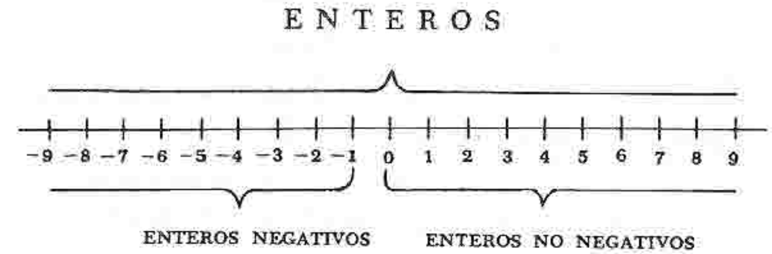
Ejercicio 1. En su cuaderno dibuje una recta numérica y represente en ella los números de 0 a 20 y los enteros negativos de -1 a -20.

2. EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS POSITIVOS

Los números naturales, el cero y los números enteros negativos forman lo que se llama el conjunto de los números enteros.

Al conjunto de los números naturales se le acostumbra llamar también "conjunto de los números enteros positivos". Y si se considera este conjunto con el cero, se habla entonces del "conjunto de los números enteros no negativos".



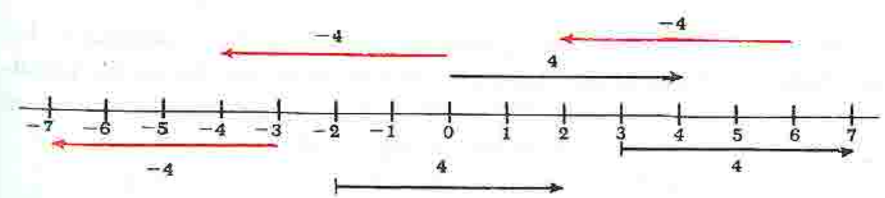


El conjunto de los números enteros se acostumbra denotar con la letra Z. Así tenemos que

$$Z = \{\cdots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots\}$$

Con los números enteros se pueden efectuar las mismas operaciones que con los números enteros no negativos. A fin de ilustrar algunas de esas operaciones representaremos también a los número enteros por medio de flechas.

Por ejemplo, en el siguiente dibujo representamos con flechas los números -4 y 4.



Observamos que el número 4 se representa con flechas cuya longitud es de 4 unidades y también las flechas que representan a -4 tienen una longitud de 4 unidades. La diferencia entre las flechas 4 y las flechas -4 radica en que tienen diferentes sentidos.

Al representar los números enteros con flechas adoptaremos la siguiente convención, que va de acuerdo con la representación que se hace por medio de puntos:

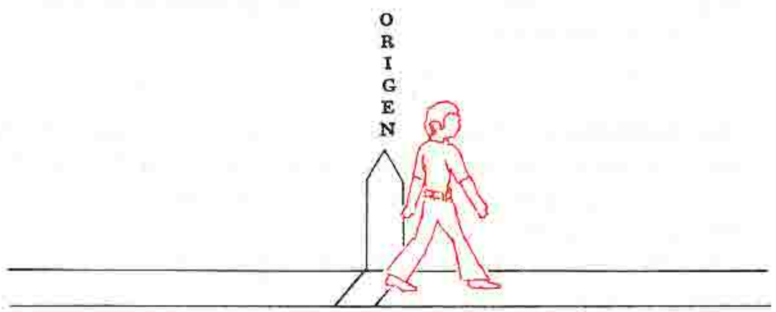
Las flechas hacia la derecha representarán números positivos y las flechas hacia la izquierda ilustrarán números negativos.

Ejercicio 2. Dibuje una recta numérica cuya unidad sea 1 centímetro y represente con un punto y una flecha cada uno de los siguientes números enteros.

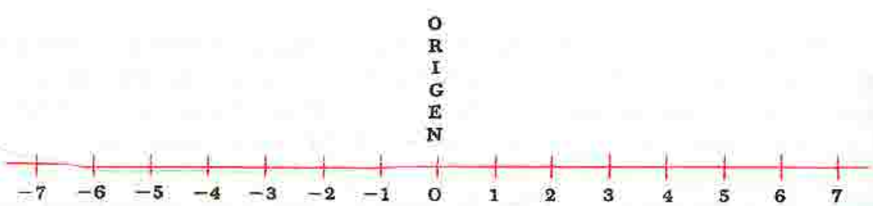
a) -3	b) 3	c) -8	d) 8
e) -5	f) 5	q) 10	i) -10
j) -1	k) 1	l) 0	

Con los números enteros y su representación en la recta numérica podemos describir situaciones como la siguiente:

En un camino recto, un hombre hace diversos recorridos a partir de un punto inicial. (A este punto inicial se acostumbra llamarle *origen*.)



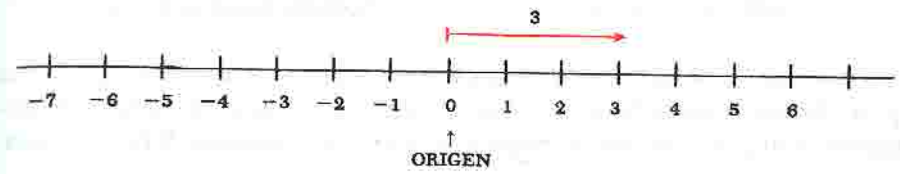
Con una recta numérica podemos representar el camino y los recorridos que hace el hombre, si consideramos los números positivos como distancias a la derecha del origen y los números negativos como distancias recorridas hacia la izquierda.



(La unidad de la recta numérica representa un metro.)

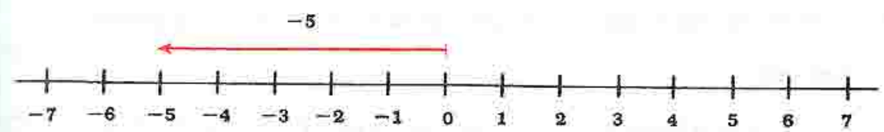
Ejemplo.

a) Un recorrido de 3 metros a partir del origen, y hacia la derecha, se puede representar así:



(Aquí 1 centímetro de la recta numérica representa un metro del recorrido real.)

b) Un recorrido de 5 metros desde el origen y hacia la izquierda se puede representar así:

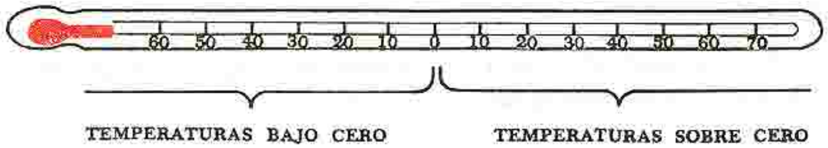


(Aquí podríamos decir que el hombre recorrió -5 metros, a partir del origen.)

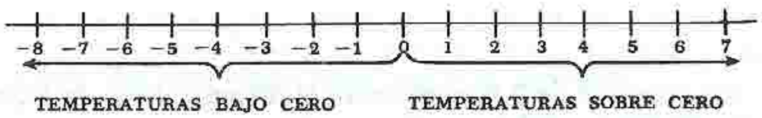
Ejercicio 3. Usando las convenciones usadas en los ejemplos anteriores ilustre en una recta numérica los siguientes recorridos.

a) Un recorrido de 5 metros a partir del origen y hacia la derecha.
b) Un recorrido de 1 metro a partir del origen y hacia la izquierda.
c) Un recorrido de 7 metros a partir del origen y hacia la izquierda.
d) Un recorrido de -5 metros a partir del origen.
e) Un recorrido de -3 metros a partir del origen.
f) Un recorrido de -5 metros a partir de un punto situado a 4 metros a la derecha del origen.
g) Un recorrido de 6 metros a partir de un punto situado a 3 metros a la izquierda del origen.
h) Un recorrido de -4 metros a partir del punto -2.
i) Un recorrido de -2 metros a partir del punto 5.

En muchos termómetros las temperaturas se miden en grados centígrados "bajo cero" o "sobre cero".



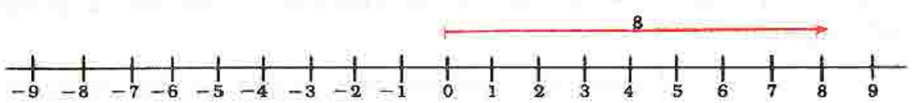
Si asociamos las temperaturas sobre cero con números positivos y las temperaturas bajo cero con números negativos, podemos entonces utilizar una recta numérica para representar temperaturas.



(Un grado se representa con una unidad de la recta numérica.)

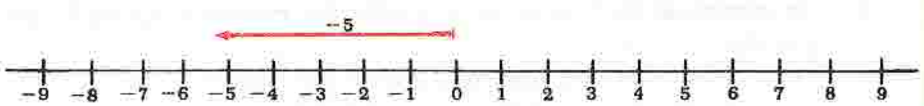
Ejemplo.

a) La temperatura de un cuerpo *aumentó* desde 0° hasta 8°C.



(Hubo un cambio de temperatura de 8 grados centígrados.)

b) La temperatura de un cuerpo *descendió* desde 0° hasta 5 grados bajo cero.



(Hubo un cambio de temperatura de −5 grados centígrados.)

Ejercicio 4. De acuerdo con las convenciones usadas en los ejemplos anteriores, ilustre en una recta numérica los siguientes cambios de temperatura.

a) Un aumento de temperatura de 4 grados a partir de cero grados.

b) Una disminución de temperatura de 10 grados a partir de cero grados.

c) Un aumento de temperatura de 5 grados a partir de una temperatura de 3°C.

d) Una disminución de temperatura de 5 grados a partir de 5 grados centígrados.

e) Un aumento de la temperatura de 4 grados a partir de una temperatura de −5 grados.

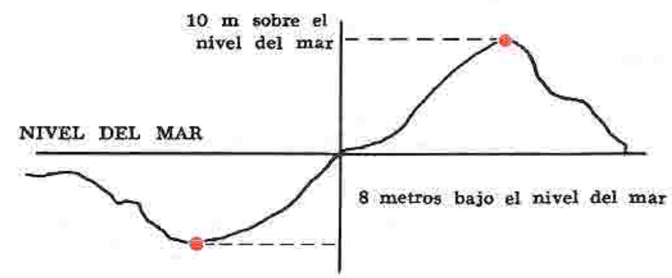
f) Una disminución de la temperatura de 3 grados a partir de −5 grados.

g) Una variación de temperatura de 5 grados a partir de 4 grados.

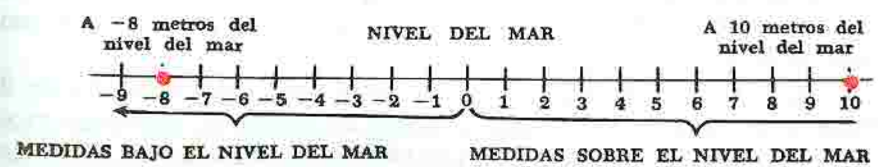
h) Una variación de temperatura de −10 grados a partir de −4 grados.

i) Un cambio de temperatura de −8 grados a partir de 4 grados.

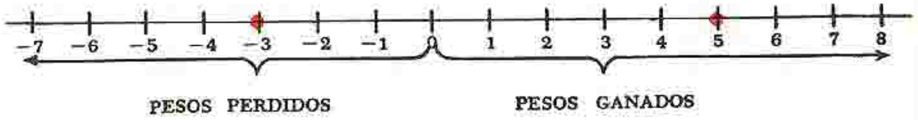
Muchas otras situaciones se pueden describir cómodamente usando los números enteros. Por ejemplo, la situación de un objeto sobre la superficie terrestre se mide en metros "sobre el nivel del mar" o "bajo el nivel del mar".



Podemos considerar con números positivos las medidas sobre el nivel del mar y con negativos las medidas abajo de ese nivel.



En la actividad comercial podemos considerar las ganancias de un negocio como positivas y las pérdidas como negativas. Por ejemplo, una ganancia de 5 pesos y una pérdida de 3 pesos se representarían así:



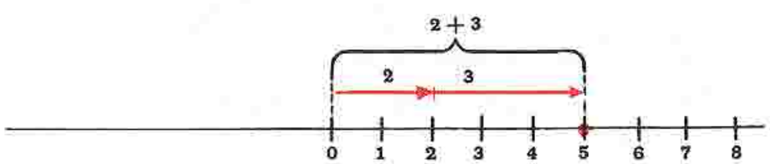
(Una unidad de la recta numérica representa un peso.)

Los números enteros pueden servir para describir situaciones en las que no únicamente es necesario contar o medir, sino también se requiere indicar un sentido. Más adelante, en sus estudios de las ciencias naturales y sociales, encontrará usted otras muchas situaciones en las que el uso de los números enteros facilita su comprensión y su manejo.

II. OPERACIONES CON NUMEROS ENTEROS

1. ADICION

Cuando manejábamos números no negativos representábamos una adición en la recta numérica utilizando flechas, como en el siguiente ejemplo:



(2 + 3 = 5)

Con la interpretación que hemos dado de los números enteros podríamos pensar en los siguientes problemas que se describen con la ecuación 2 + 3 = 5.

a) Un hombre realiza, en un camino recto, un recorrido de 2 metros a la derecha del origen y desde el punto al que llegó realiza otro recorrido de 3 metros también a la derecha. Al final de los dos recorridos, ¿quedó a la derecha o a la izquierda del origen? y ¿a qué distancia quedó de éste?

b) A partir de cero grados la temperatura aumentó 2 grados e inmediatamente después aumentó otros 3 grados. ¿Cuál fue la temperatura después de ese último aumento?

A continuación utilizaremos problemas o situaciones semejantes para ayudarnos a efectuar adiciones de números enteros.

Ejercicio 5. Interprete cada una de las expresiones siguientes por medio de flechas en una recta numérica, e invente un problema de recorridos y otros de temperaturas que se describan con ella.

a) $2 + 7 = 9$ c) $12 + 1 = 13$ e) $20 + 40 = 60$

b) $5 + 5 = 10$ d) $6 + 9 = 15$ f) $a + b = c$

El problema de encontrar la suma de dos números enteros negativos como, por ejemplo, −5 y −3 se simboliza así:

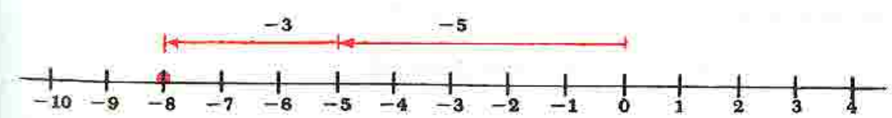
$$-5 + (-3) = \square$$

Para efectuar esta adición podemos imaginar los siguientes problemas.

a) Un hombre realiza, en un camino recto y a partir del origen, un recorrido de 5 metros hacia la izquierda (−5). Desde el punto al que llegó efectúa otro recorrido de 3 metros a la izquierda (−3). Al final de los dos recorridos, ¿quedó a la derecha o a la izquierda del origen? ¿A qué distancia quedó de éste?

b) A partir de 0° centígrados la temperatura *bajó* 5 grados (−5). Después volvió a bajar 3 grados más (−3). ¿Cuál es la temperatura final?

Cualquiera de los dos problemas se puede ilustrar en la recta numérica así:



Vemos entonces que

$$-5 + (-3) = -8$$

Ejercicio 6. Invente algún problema para cada una de las siguientes expresiones y con la ayuda de una recta numérica resuelva las adiciones.

a) $-3 + (-7) = \square$ b) $-5 + (-5) = \square$ c) $-8 + (-10) = \square$

d) $-2 + (-1) = \square$ e) $-12 + (-1) = \square$ f) $-9 + (-6) = \square$

g) $-3 + (-15) = \square$ h) $-15 + (-13) = \square$ i) $-7 + (-14) = \square$

j) $-7 + 0 =$ k) $0 + (-18) =$ l) $-35 + (-16) =$

m) $-12 + (-43) =$ n) $-26 + (-39) =$ ñ) $-70 + (-85) =$

Con la expresión

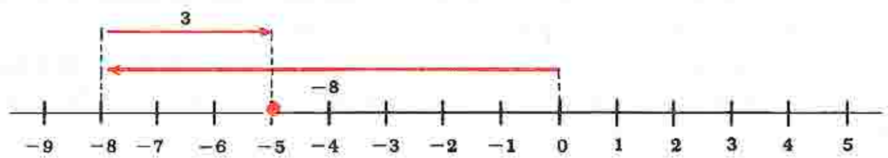
$$-8 + 3 =$$

Indicamos que se busca la suma de -8 y 3. Para efectuar esta adición podemos imaginar cualquiera de los dos siguientes problemas.

a) Un hombre hace un recorrido, a partir del origen, de 8 metros hacia la izquierda (-8) y a partir del punto al que llegó, hace un recorrido de 3 metros hacia la derecha (3). Al finalizar los dos recorridos, ¿quedó a la derecha o a la izquierda del origen? ¿A qué distancia quedó de éste?

b) A partir de cero grados centígrados se observó un descenso de temperatura de 8 grados (-8) y después un aumento de 3 grados (3). ¿Cuál fue la temperatura después de los dos cambios?

Cualquiera de éstos problemas se puede ilustrar así:



Y encontramos que

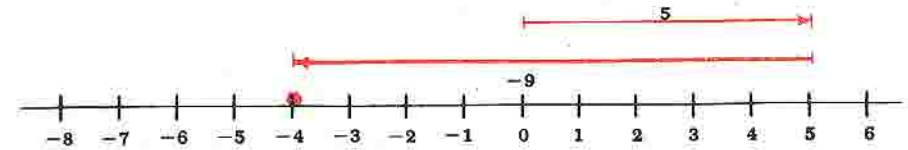
$$-8 + 3 = -5$$

Igual podemos pensar al efectuar la siguiente adición:

$$5 + (-9) =$$

a) Un hombre recorre, a partir del origen, 5 metros a la derecha y luego 9 metros a la izquierda. Al final de los dos recorridos ¿quedó a la izquierda o a la derecha del origen? ¿A qué distancia quedó de éste?

b) A partir de 0° centígrados la temperatura aumenta 5 grados y después disminuye 9 grados. ¿Cuál fue la temperatura después de las dos variaciones?



Tendremos entonces que

$$-8 + 3 =$$

Ejercicio 7. Efectúe las siguientes adiciones tal como se hizo en los ejemplos anteriores.

a) $5 + (-2) =$ b) $9 + (-3) =$ c) $15 + (-8) =$

d) $19 + (-13) =$ e) $27 + (-18) =$ f) $6 + (-9) =$

g) $8 + (-12) =$ h) $17 + (-20) =$ i) $14 + (-25) =$

j) $35 + (-63) =$ k) $-7 + 12 =$ l) $-4 + 10 =$

m) $-12 + 19 =$ n) $-14 + 25 =$ ñ) $-37 + 52 =$

o) $-6 + 2 =$ p) $-10 + 7 =$ q) $-18 + 6 =$

r) $-39 + 23 =$ s) $-78 + 57 =$

Hasta ahora hemos utilizado letras para representar números naturales y racionales. Ahora utilizaremos letras para representar también números enteros.

Con la expresión $m + n$ indicamos la suma de -8 y 5 si $m = -8$ y $n = 5$.

Si $r = 4$ y $s = -2$, entonces $r + s = 4 + (-2) = 2$.

Ejercicio 8. En cada inciso complete las igualdades.

a) Si $m = 3$ y $n = -2$, entonces $m + n =$

b) Si $r = -7$ y $s = -3$, entonces $r + s =$

c) Si $x = -2$ y $y = 17$, entonces $x + y =$

d) Si $a = 9$ y $b = -19$, entonces $a + b =$

e) Si $p = 16$ y $q = -10$, entonces $p + q =$

f) Si $t = 18$ y $u = -5$, entonces $t + u =$

g) Si $v = -16$ y $w = 7$, entonces $v + w =$

h) Si $g = -8$ y $h = -15$, entonces $g + h =$

Ejercicio 9. Complete la siguiente tabla

x	-1	2	7	-3	-7	-9	-15	8	6
y	3	-5	-7	0	4	-9	7	-12	-3
$x+y$									

Inverso aditivo

Ejercicio 10. **Efectúe las siguientes adiciones. Si lo desea utilice** la recta numérica para hallar la suma.

a) $-5+5=$ ☐ b) $2+(-2)=$ ☐ c) $-7+7=$ ☐

d) $35+(-35)=$ ☐ e) $-67+67=$ ☐ f) $85+(-85)=$ ☐

g) $475+(-475)=$ ☐ h) $-638+638=$ ☐ i) $-4\,876+4\,876=$ ☐

Ejercicio 11. **Resuelva las siguientes ecuaciones.**

a) $3+$ ☐ $=0$ b) $6+$ ☐ $=0$ c) $-9+$ ☐ $=0$

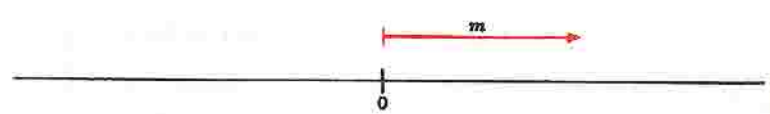
d) $-15+$ ☐ $=0$ e) ☐ $+10=0$ f) ☐ $+(-12)=0$

g) $-87+$ ☐ $=0$ h) ☐ $+(-375)=0$ i) $895+$ ☐ $=0$

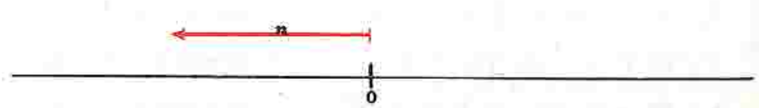
j) $-573+$ ☐ $=0$

Ejercicio 12. **En las rectas numéricas de abajo las flechas repre-**sentan números enteros cualesquiera. Dibuje en cada caso la flecha que representa al número que sumado con el que se ilustra da cero como suma.

a)



b)



Al resolver los tres ejercicios anteriores habrá usted notado que en todos los casos siempre había un número entero que sumado con otro da por resultado cero.

Esto es cierto en general:

Para todo número entero existe otro número entero que sumado con él da por resultado cero.

Si se nos da un número entero, por ejemplo 5, al número que sumado con él nos da cero lo denominamos el *simétrico o inverso aditivo de* 5. Así, -5 es el simétrico de 5 porque $5+(-5)=0$. Si consideramos el número -8, encontramos que 8 es su inverso aditivo o simétrico porque $-8+8=0$.

Ejercicio 13. **Llene la siguiente tabla, tal como se hace en a).**

	Número	Inverso aditivo	Porque:
a)	8	-8	$8+(-8)=0$
b)	-3		
c)	-5		
d)	-1		
e)	7		
f)	4		
g)	9		
h)	0		

Notación para el inverso aditivo

Si tenemos un número entero cualquiera a, al simétrico de ese número lo denotamos como $-a$. De esa manera, si $a = -2$, entonces $-a = 2$; si $a = 8$, entonces $-a = -8$.

Ejercicio 14. En cada inciso complete las igualdades.

a) Si $a = 3$, entonces $-a =$

b) Si $m = -10$, entonces $-m =$

c) Si $r = -4$, entonces $-r =$

d) Si $q = 12$, entonces $-q =$

e) Si $t = 1$, entonces $-t =$

f) Si $v = 0$, entonces $-v =$

g) Si $x =$ entonces $-x = 17$.

h) Si $y =$ entonces $-y = -14$.

i) Si $z =$ entonces $-z = 18$.

Ejercicio 15. En cada caso complete las igualdades.

a) Si $a = -2$ y $b = 5$, entonces $a + (-b) =$

b) Si $x = -6$ y $z = -4$, entonces $-x + (-z) =$

c) Si $p = 7$ y $q = -3$, entonces $-p + q =$

d) Si $r = 6$ y $s = -1$, entonces $-r + (-s) =$

e) Si $d = -8$ y $c = -10$, entonces $-d + c =$

Con la notación $-(-a)$ estamos indicando el inverso del inverso de a. Por ejemplo, si $a = 3$, el inverso de 3 es -3 y el inverso de -3 es 3, así que

$$-(-a) = -(-3) = 3$$

Si $a = -4$, el inverso de -4 es 4 y el inverso de 4 es -4, así que

$$-(-a) = -[-(-4)] = -4$$

Ejercicio 16. Complete las siguientes igualdades

a) Si $a = 7$, $-(-a) =$

b) Si $x = -6$, $-(-x) =$

c) Si $y = -17$, $-(-y) =$

d) Si $r = 0$, $-(-r) =$

e) Si $s = 9$, $-(-s) =$

Observe usted que en todos los casos, el inverso del inverso de un número, es el mismo número.

En símbolos:

Si a es un número entero cualquiera,

$$-(-a) = a.$$

Propiedades de la adición de números enteros

Al tratar la adición de números naturales encontramos que tenía varias propiedades importantes. La adición de números enteros tiene esas mismas propiedades que ya conocemos y otra más. Estudiémoslas a continuación.

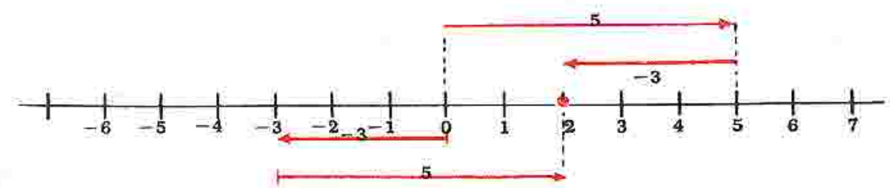
Propiedad conmutativa.

Si a y b son dos números enteros cualesquiera, entonces

$$a + b = b + a$$

Ejemplo:

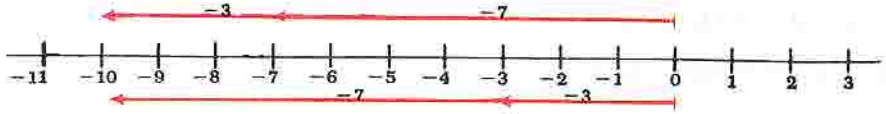
a) $5 + (-3) = 2$
$-3 + 5 = 2$



Esto es,

$$5 + (-3) = -3 + 5$$

b) $-7 + (-3) = -10$
$-3 + (-7) = -10$



Esto es,

$$-7 + (-3) = -3 + (-7)$$

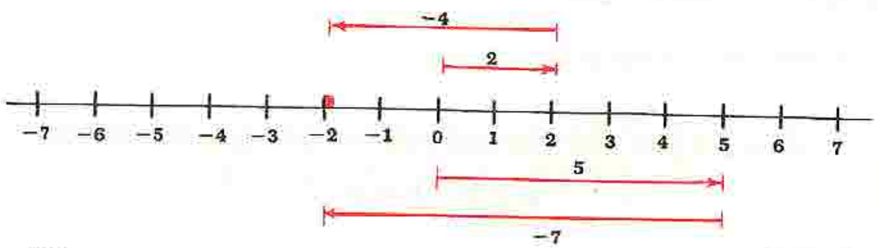
Propiedad asociativa.

> *Si a, b y c son números enteros cualesquiera, entonces*
>
> $$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Ejemplo.

$$[5 + (-3)] + (-4) = 2 + (-4) = \ -2$$

$$5 + [-3 + (-4)] = 5 + (-7) = \ -2$$



Esto es.

$$[5 + (-3)] + (-4) = 5 + [-3 + (-4)]$$

La aplicación reiterada de esta propiedad nos permite efectuar adiciones de 3 o más sumandos agrupando éstos de dos en dos.

Ejemplo.

$$3 + (-5) + (-7) + 8 = \ $$

Resolución.

Como $3 + (-5) = -2$, podemos escribir

Como $3 + (-5) = -2$, podemos escribir

$$3 + (-5) + (-7) + 8 = -2 + (-7) + 8$$

Como $-2 + (-7) = -9$, podemos escribir

$$-2 + (-7) + 8 = -9 + 8$$

y, por último,

como $-9 + 8 = -1$, tenemos que

$$3 + (-5) + (-7) + 8 = -1$$

Podríamos efectuar esta adición asociando los sumandos de manera diferente; pero en cualquier caso obtendremos la misma suma.

Ejercicio 17. Efectúe las siguientes adiciones.

a) $-3 + 7 + (-10) =$	b) $8 + (-6) + (-9) =$
c) $-4 + (-12) + 6 =$	d) $-7 + 12 + (-6) =$
e) $14 + (-9) + (-12) =$	f) $8 + 10 + (-23) =$
g) $-16 + (-5) + (-7) =$	h) $5 + (-6) + (-7) + 9 =$
i) $-8 + (-2) + 6 + (-5) =$	j) $-1 + 3 + (-9) + 7 =$

Propiedad del elemento neutro

> *Si a es un número entero cualquiera, entonces*
>
> $$a + 0 = a$$

Ejemplo.

a) $5 + 0 = 5$	b) $0 + 4 = 4$
c) $-8 + 0 = -8$	d) $0 + (-3) = -3$

Como puede usted notar, todas estas propiedades de la adición de números enteros son las mismas que tiene la adición de naturales y cero. La única propiedad nueva que tienen los enteros es la que enunciamos en seguida.

Propiedad del inverso aditivo

> *Si a es un número entero cualquiera, entonces*
>
> $$a + (-a) = 0$$
>
> *Esto es, la suma de un número y su inverso es cero.*

Ejemplo.

a) $8+(-8)=0$ b) $-3+3=0$

c) $n+(-n)=0$ d) $-x+x=0$

2. SUSTRACCION

Recuerde usted que las expresiones como $12-3=\square$ se usan para indicar una sustracción de números naturales. (En este caso particular se indica que hay que encontrar el número que sumado con 3 da 12.) Ahora usaremos expresiones del mismo tipo para indicar sustracciones de números enteros.

Ejemplo.

a) $5-(-2)=\square$ (¿Qué número sumado en -2 da 5?)

b) $-8-10=\square$ (¿Qué número sumado con 10 da -8?)

c) $-12-(-5)=\square$ (¿Qué número sumado con -5 da -12?)

Para efectuar estas sustracciones de números enteros procederemos de la siguiente manera:

Al minuendo le sumaremos el simétrico del sustraendo y el resultado será la diferencia.

Ejemplo.

a) $5-(-2)=\square$

Aquí el simétrico del sustraendo es 2. Por lo tanto, sumaremos $5+2=7$. Esto es,

$$5-(-2)=5+2=7$$

En este caso la diferencia es 7 comprobamos que así es porque 7 es el número que sumado con -2 nos da 5.

$$\underset{\text{Minuendo}}{5}\;-\;\underset{\text{Sustraendo}}{(-2)}\;=\;\underset{\text{Diferencia}}{7}\qquad\text{porque}\qquad\underset{\text{Diferencia}}{7}\;+\;\underset{\text{Sustraendo}}{(-2)}\;=\;\underset{\text{Minuendo}}{5}$$

b) $-8-10=\square$

Aquí sumamos $-8+(-10)=-18$ (pues el simétrico del sustraendo es -10) y encontramos que la diferencia es -18. Esto es.

$$-8-10=-18 \qquad \text{porque} \qquad -18+10=-8$$

c) $-12-(-5)=\square$

El simétrico de -5 es 5. Por consiguiente,

$$-12-(-5)=-12+5=-7$$

La diferencia es -7 porque $-7+(-5)=-12$.
En general,

> *Si a y b son números enteros, entonces*
>
> $$a-b=a+(-b)$$

Ejercicio 18. Efectúe las siguientes sustracciones y compruébelas sumando la diferencia con el sustraendo.

a) $5-(-7)=\square$ b) $8-(-3)=\square$ c) $9-(-7)=\square$

d) $18-(-22)=\square$ e) $-7-8=\square$ f) $-11-16=\square$

g) $-9-9=\square$ h) $-10-8=\square$ i) $-17-4=\square$

j) $-8-12=\square$ k) $-19-19=\square$ l) $-6-(-5)=\square$

m) $-8-(-10)=\square$ n) $-15-(-15)=\square$ ñ) $-8-(-9)=\square$

o) $-17-(-21)=\square$ p) $-3-(-21)=\square$ q) $0-(-8)=\square$

Si aplicamos este procedimiento para efectuar sustracciones como las que estudiamos en el curso anterior, encontraremos los mismos resultados. Por lo tanto, al efectuar sustracciones de ese tipo, podemos usar cualquiera de los dos procedimientos.

Ejemplo.

a) $8-2=6$; o bien, $8-2=8+(-2)=6$

b) $15-4=11$; o bien, $15-4=15+(-4)=11$

Pero además, al emplear este nuevo procedimiento estamos en posibilidad de resolver problemas como los que mencionamos al principio de esta unidad.

Ejemplo.

a) $0 - 1 =$

Resolución.

$$0 - 1 = 0 + (-1) = -1$$

Esto es, el número que sumado con 1 da 0, es -1

Comprobación: $-1 + 1 = 0$

b) $5 - 13 =$

Resolución:

$$5 - 13 = 5 + (-13) = -8$$

O sea, el número que sumado con 13 da 5, es -8.

Comprobación: $-8 + 13 = 5$.

Ejercicio 19. Efectúe las siguientes sustracciones y complete la oración del inciso i).

a) $5 - 17 =$ b) $9 - 40 =$

c) $18 - 36 =$ d) $15 - 37 =$

e) $10 - 100 =$ f) $1 - 35 =$

g) $0 - 8 =$ h) $0 - 50 =$

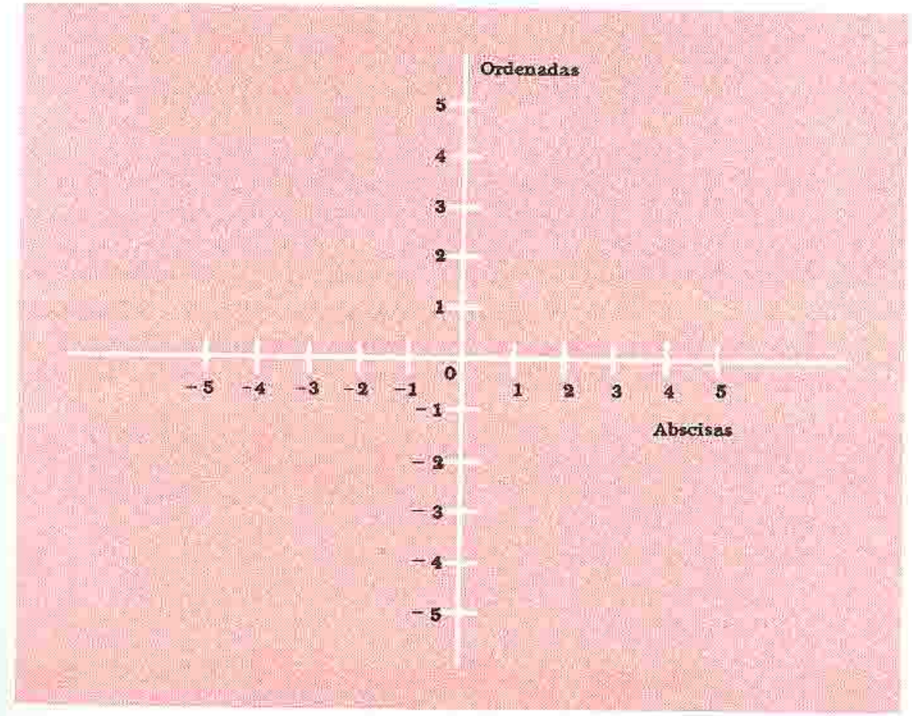
i) Si a y b son naturales y además $b > a$, entonces al restar $a - b$ el resultado es un número ____________.
(positivo, negativo)

Ya se habrá usted dado cuenta que al manejar números enteros, ***siempre es posible efectuar una sustracción.***

3. MULTIPLICACION

En una multiplicación de dos números enteros se pueden presentar tres casos distintos: O los dos factores son positivos; o un factor

es positivo y el otro es negativo; o bien, los dos factores son negativos. A continuación estudiaremos por separado cada una de estas posibilidades y la ilustraremos utilizando dos ejes numéricos, uno horizontal y el otro vertical, que se cortan en el origen. A esto le llamaremos sistema de coordenadas.



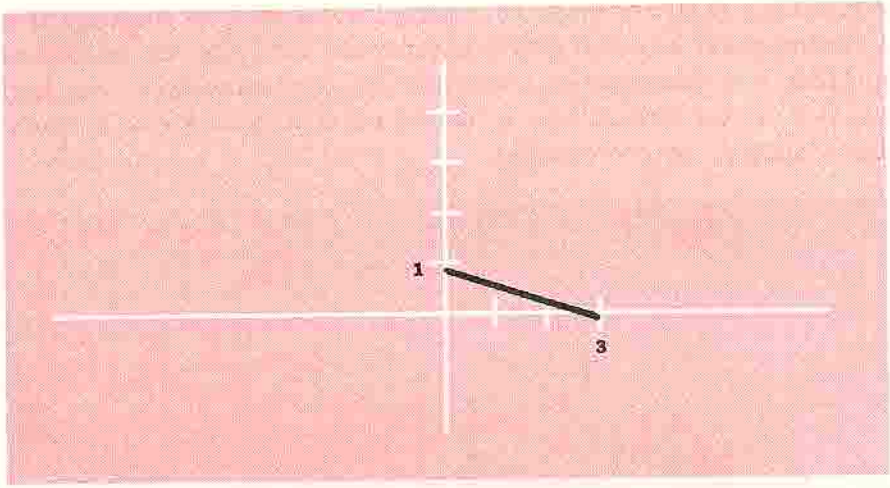
Al eje horizontal se le acostumbra llamar eje de las ***abscisas*** y al eje vertical se le acostumbra llamar eje de las ***ordenadas.***

Multiplicación de dos factores positivos

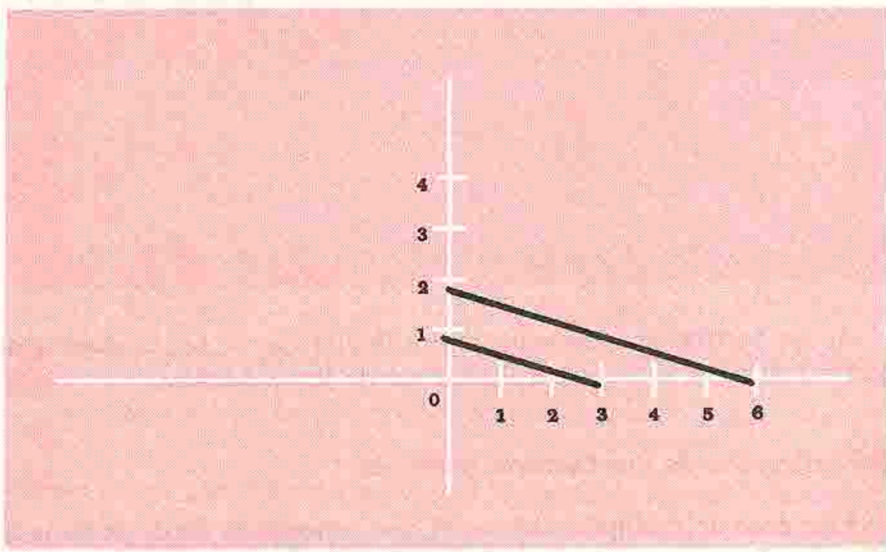
Este caso de multiplicación es el que conocemos desde la escuela primaria. Para ilustrarlo en un sistema de coordenadas procederemos como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Consideremos el producto 3×2 e ilustrémoslo.

1. En el eje de las abscisas localizamos el 3 y dibujamos el segmento que va de ese punto al punto 1 en el otro eje.



2. En el eje de las ordenadas localizamos el segundo factor, el 2, y trazamos una recta paralela al segmento que ya hemos trazado.



3. El punto donde la recta corta al eje de las abscisas es el producto 3×2. En este caso es el número positivo 6.

Ejercicio 20. En un sistema de coordenadas ilustre las siguientes multiplicaciones.

a) $2 \times 5 =$ ☐ b) $3 \times 4 =$ ☐

c) $4 \times 2 =$ ☐ d) $2 \times 3 =$ ☐

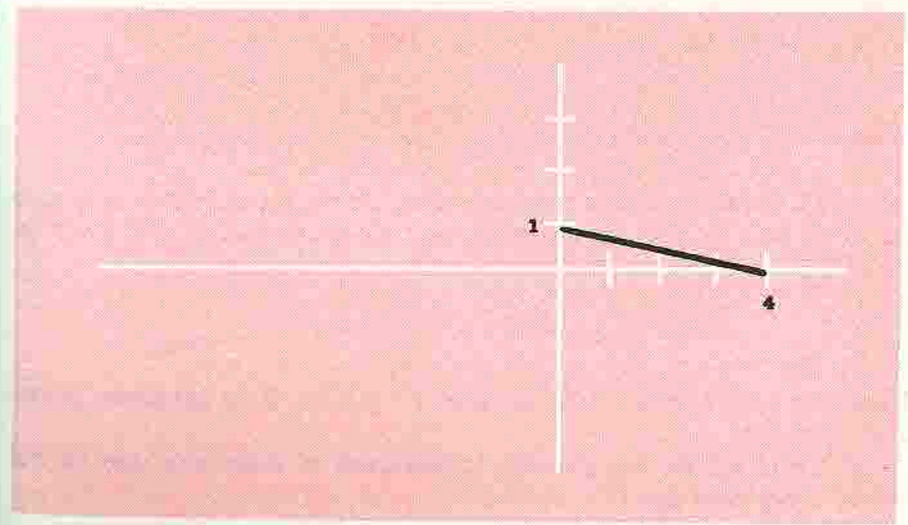
Observe usted que todos los productos obtenidos en el ejercicio anterior son números positivos. Esto ocurre siempre que se multiplican números positivos, y puede enunciarse como una ley en la siguiente forma:

El producto de dos factores positivos siempre es un número positivo.

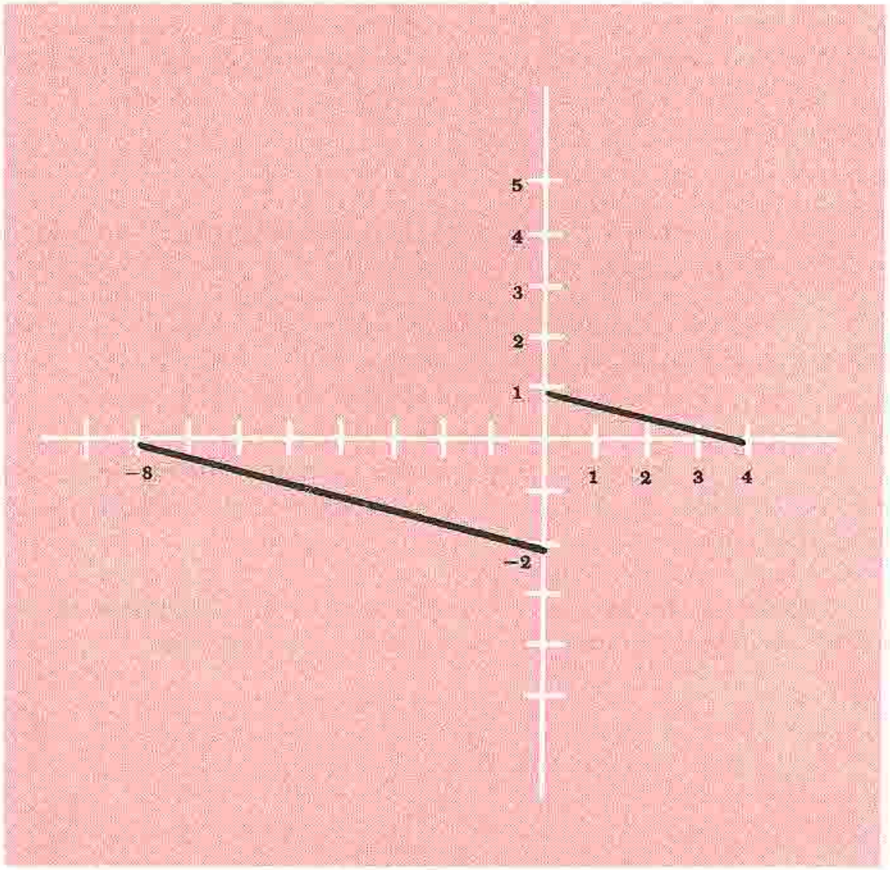
Multiplicación de un factor positivo por un factor negativo

Este caso de multiplicación también se puede ilustrar en un sistema de coordenadas. Por ejemplo, consideremos el producto $4(-2)$ e ilustrémoslo:

1. En el eje de las abscisas localizamos el 4 y dibujamos el segmento que une ese punto con el punto 1 en el otro eje.



2. En el eje de las ordenadas localizamos el segundo factor, que en este caso es -2, y trazamos una recta paralela al segmento que ya tenemos trazado.

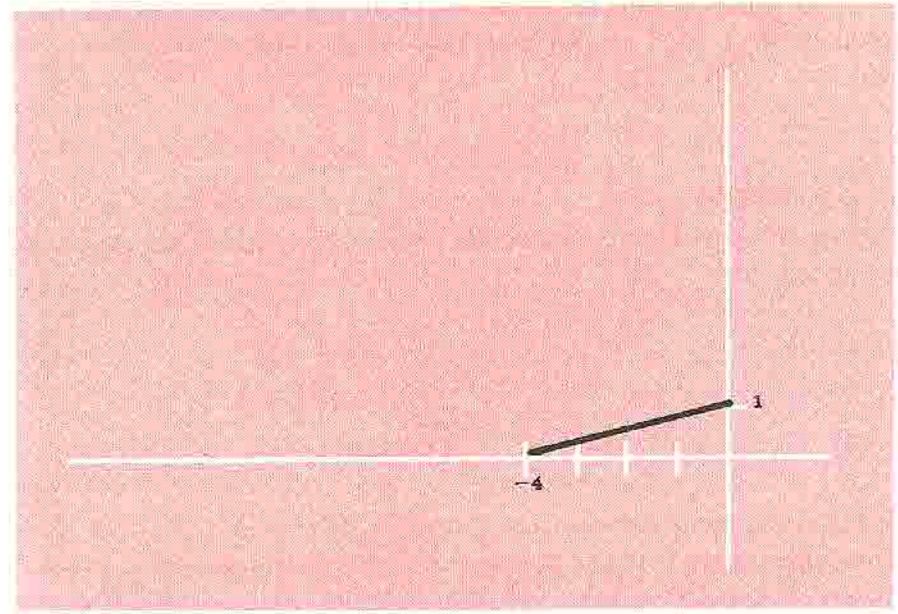


3. El punto donde la recta corta al eje de las abscisas es el producto de $4(-2)$. En este caso es el número negativo -8 Esto es,

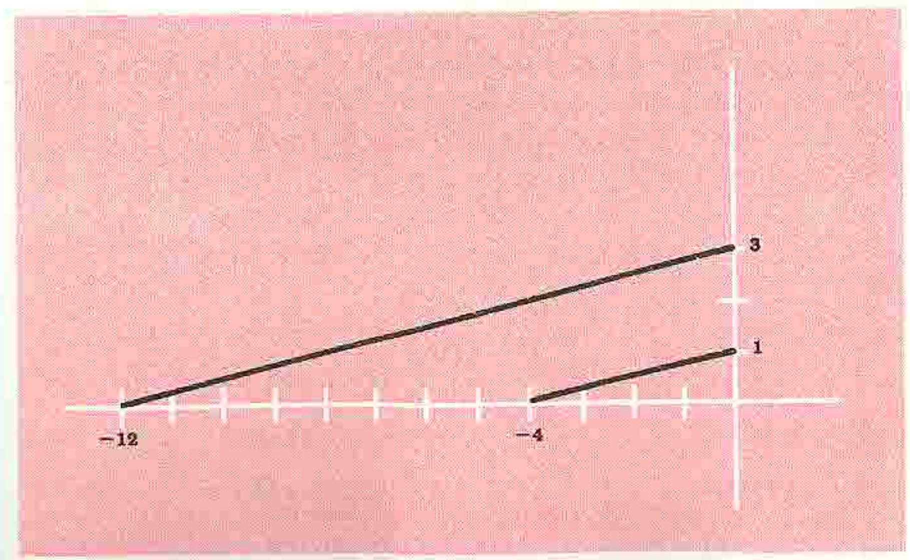
$$4(-2) = -8$$

Tomemos otro ejemplo: el producto $(-4)(3)$. Este producto puede ilustrarse así:

1. En el eje de las abscisas localizamos el segmento que va del -4 al 1 del otro eje.



2. Ahora localizamos el segundo factor (3) en el eje de las ordenadas y trazamos una recta paralela al segmento que va del -4 al 1.



3. El punto donde la recta corta al eje de las abscisas es el producto de $(-4)(3)$. En este caso es el número negativo -12. Esto es,

$$(-4)(3) = -12$$

Ejercicio 21. En un sistema de coordenadas ilustre las siguientes multiplicaciones.

a) $(-3)5 =$ 　　d) $(-3)2 =$

b) $5(-2) =$ 　　e) $4(-3) =$

c) $3(-2) =$ 　　f) $(-5)3 =$

En todos los productos obtenidos en el ejercicio anterior usted ha encontrado números negativos. Esto ocurre siempre que usted multiplique dos números tales que uno sea positivo y el otro negativo, y puede enunciarse como una ley en la siguiente forma:

El producto de dos factores es negativo cuando uno de esos factores es positivo y el otro es negativo.

Para encontrar el producto se puede proceder primero como si los dos factores fueran positivos; pero luego se tomará como producto el inverso aditivo del número que se haya obtenido al considerarlos en esa forma.

Ejercicio 22. Efectúe las siguientes multiplicaciones.

a) $20(-12) =$ 　　b) $30(-5) =$

c) $50(-8) =$ 　　d) $65(-10) =$

e) $(-8)1\,500 =$ 　　f) $(-6\,200)25 =$

g) $(-15)40 =$ 　　h) $(25)(-48) =$

i) $(-70(90) =$ 　　j) $(-86)50 =$

k) $368(-42) =$ 　　l) $(-926)34 =$

m) $(-587)(65) =$ 　　n) $1\,874(-415) =$

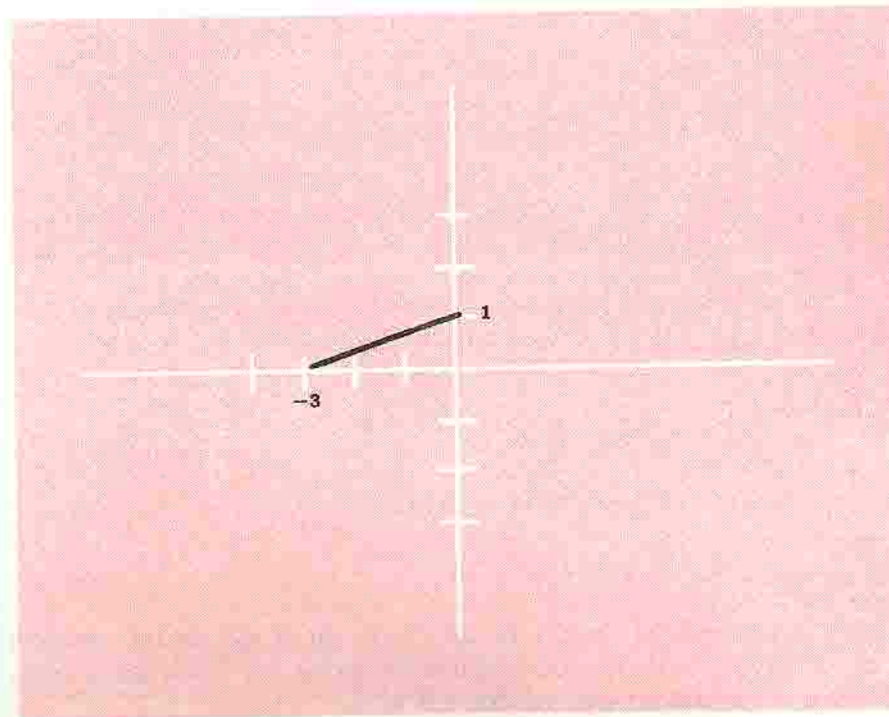
Multiplicación de dos factores negativos

Solamente falta por resolver el problema que se presenta cuando los dos factores son negativos. Por ejemplo, ¿cuál es el producto que resulta de multiplicar -3 y -2?

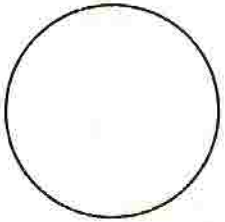
$$(-3)(-2) =$$

Este tipo de multiplicaciones también puede ilustrarse en un sistema de coordenadas:

1. En el eje de las abscisas localizamos el -3 y trazamos el segmento que une ese punto con el 1 del otro eje.

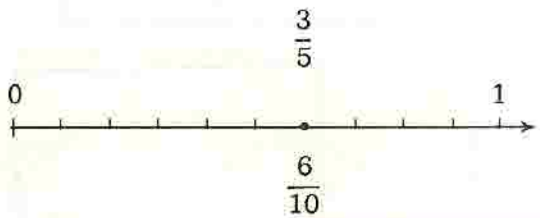


f) $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}$



Ejercicio 10. Localice en la recta numérica el punto correspondiente a cada fracción y luego indique si son o no equivalentes, como en el inciso a).

a) $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}$

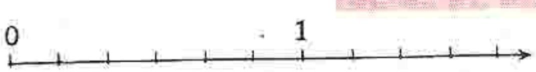


$\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ son equivalentes

b) $\frac{4}{5}, \frac{7}{10}$

c) $\frac{7}{4}, \frac{14}{8}$

d) $\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{20}{12}$

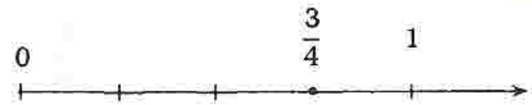


e) $\frac{8}{4}, \frac{15}{8}$

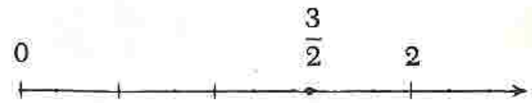
f) $\frac{1}{2}, \frac{4}{8}, \frac{2}{4}, \frac{8}{16}$

Ejercicio 11. Indique tres fracciones equivalentes a las cuales corresponda el punto señalado en cada recta numérica.

a)



b)



II. IDEA DE NUMERO RACIONAL

Según hemos visto, dos o más fracciones equivalentes representan una misma parte de un objeto o de un conjunto y les corresponde un mismo punto y un mismo desplazamiento en la recta numérica. Parece entonces natural considerar que fracciones equivalentes son las que representan un mismo número. Por ejemplo, si hablamos del número $\frac{1}{2}$, o del número $\frac{2}{4}$, o del número $\frac{3}{6}$, estaremos hablando del mismo número racional, pues todas esas fracciones $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{4} \text{ y } \frac{3}{6}\right)$ son equivalentes.

Para indicar que dos o más fracciones denotan un mismo número racional, se usa el signo de igualdad. Por ejemplo, en el caso último podemos escribir

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Ejercicio 12. Determine si en cada inciso se nombra un mismo número racional o se nombran dos números diferentes, y luego indíquelo con el símbolo = o el símbolo ≠. (Las letras denotan números naturales distintos de cero.)

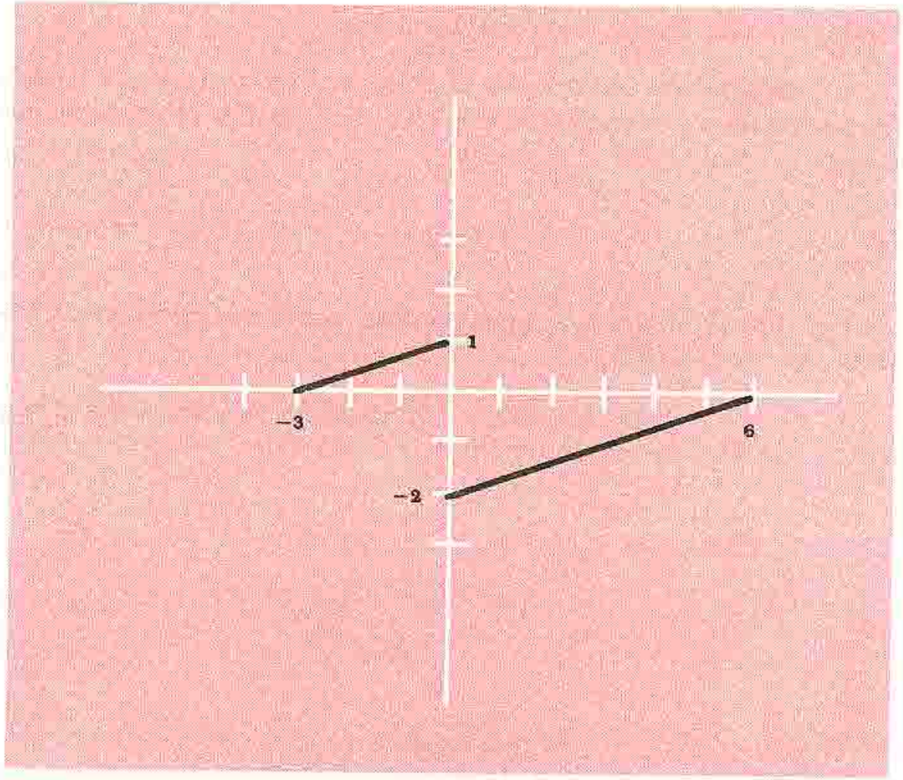
a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}, \frac{8}{12}$ $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

c) $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{10}, \frac{1}{2}$

2. A continuación, en el eje de las ordenadas, localizamos el segundo factor (-2) y trazamos una recta paralela al segmento que va del -3 al 1.



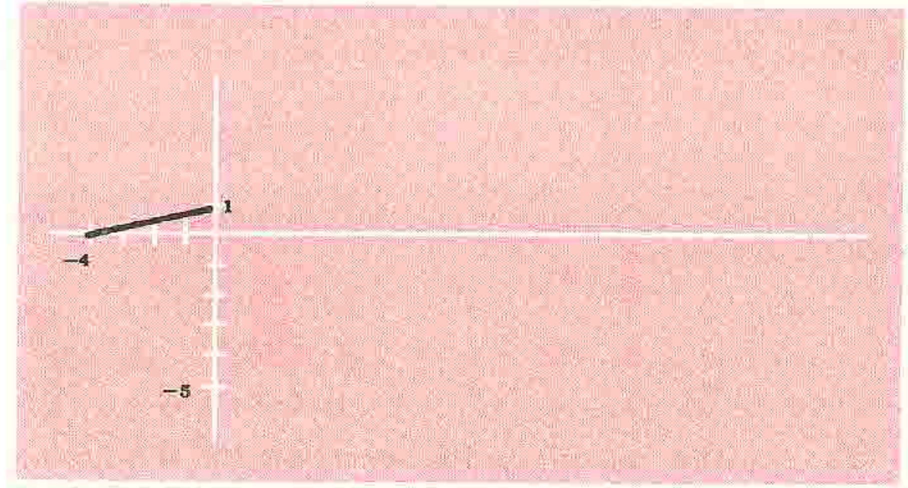
3. El punto donde la recta corta al eje de las abscisas es el producto de $(-3)(-2)$, o sea, el número positivo 6. Así es que,

$$(-3)(-2) = 6$$

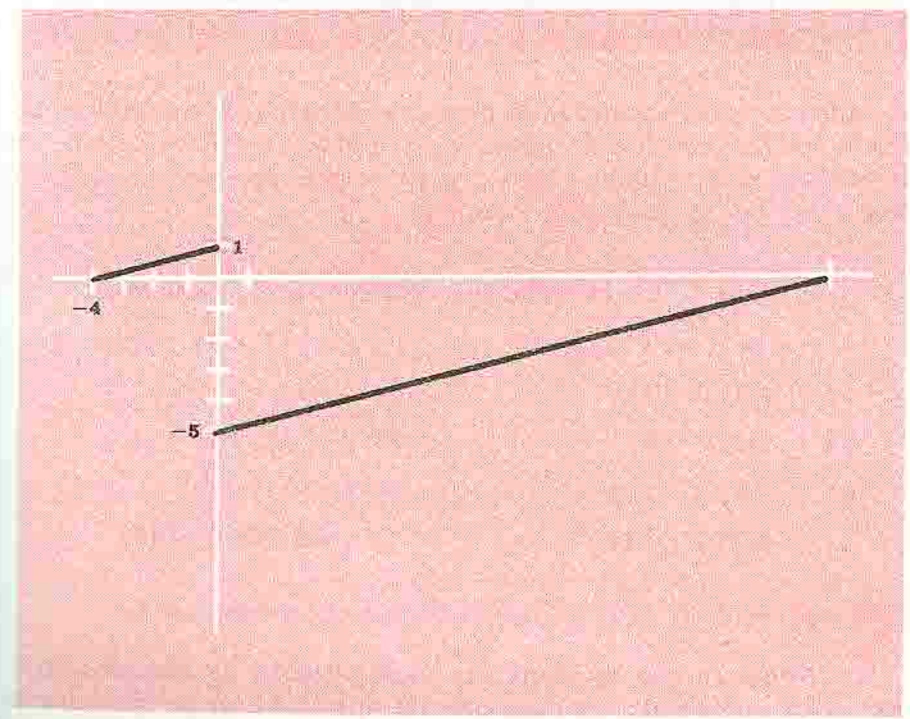
Veamos ahora por ejemplo el producto

$$(-4)(-5) = \square$$

1. Localizamos el primer factor (-4) en el eje de las abscisas y, de la misma manera que hicimos en todos los casos anteriores, trazamos el segmento que va del -4 al 1.



2. En el eje de las ordenadas localizamos el segundo factor (-5) y trazamos la recta paralela al segmento que ya trazamos del -4 al 1.



La recta corta al eje de las abscisas en el punto que corresponde al número positivo 20. Este es el producto de $(-4)(-5)$. Esto es,

$$(-4)(-5) = 20$$

Ejercicio 23. En un sistema de coordenadas ilustre las siguientes multiplicaciones.

a) $(-2)(-4) =$ ▒ b) $(-3(-5) =$ ▒

c) $(-4)(-3) =$ ▒ d) $(-3)(-3) =$ ▒

e) $(-5)(-2) =$ ▒ f) $(-6)(-3) =$ ▒

En el ejercicio anterior usted ha encontrado que al multiplicar dos números negativos, el producto siempre ha sido un número positivo. Esto ocurre en general, y puede enunciarse como una ley de la siguiente manera:

El producto de dos factores negativos siempre es un número positivo.

Además, para encontrar el producto usted puede multiplicar como si los factores fueran positivos. El producto que se obtiene en esa forma es un número positivo y así se deja por estar de acuerdo con la ley que acabamos de enunciar.

Ejercicio 24. Efectúe usted las siguientes multiplicaciones.

a) $(-25)(-6) =$ ▒ b) $(-14)(-4) =$ ▒

c) $(-40)(-12) =$ ▒ d) $(-60)(-11) =$ ▒

e) $(-35)(-23) =$ ▒ f) $(-74)(-5) =$ ▒

g) $(-567)(-15) =$ ▒ h) $(-894)(-38) =$ ▒

i) $(-1\,397)(-58) =$ ▒ j) $(-3\,645)(-147) =$ ▒

Propiedades de la multiplicación de números enteros

La forma en que se efectúa la multiplicación de números enteros se ha establecido así para que tal operación tenga las mismas

propiedades que la multiplicación de naturales y cero. A continuación enunciaremos esas propiedades y veremos algunos ejemplos.

Propiedad conmutativa.

Si a y b son números enteros cualesquiera, entonces

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplo.

a) $3 \cdot 8 = 24$, $8 \cdot 3 = 24$ — $3 \cdot 8 = 8 \cdot 3$

b) $(-6)(9) = -54$, $(9)(-6) = -54$ — $(-6)(9) = (9)(-6)$

c) $(-2)(-7) = 14$, $(-7)(-2) = 14$ — $(-2)(-7) = (-7)(-2)$

d) $(172)(-10) = -1\,720$, $(-10)(172) = -1\,720$ — $(172)(-10) = (-10)(172)$

Propiedad asociativa.

Si a, b y c son números enteros cualesquiera, entonces

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Ejemplo.

a) $(2 \cdot 5) \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30$
$2 \cdot (5 \cdot 3) = 2 \cdot 15 = 30$

b) $(-4 \times 3) \times (-2) = (-12)(-2) = 24$
$-4 \times (3 \times -2) = (-4)(-6) = 24$

c) $(-5 \times -4) \times -2 = (20)(-2) = -40$
$-5 \times (-4 \times -2) = (-5)(8) = -40$

d) $6 \times (-3 \times -4) = (6)(12) = 72$
$(6 \times -3) \times -4 = (-18)(-4) = 72$

Propiedad del elemento neutro.

Si a es un número entero, entonces

$$a \cdot 1 = a$$

Ejemplo.

a) $7 \cdot 1 = 7$ b) $(-4)(1) = -4$

c) $1 \cdot 26 = 26$ d) $(1)(-15) = -15$

Propiedad distributiva.

Si a, b y c son números enteros cualesquiera, entonces

$$a(b + c) = ab + ac$$

Ejemplo.

a) $-3 \times (5 + 4) =$

Si para efectuar esta multiplicación primero sumamos $5 + 4$, encontramos que el producto es -27, pues

$$-3 \times (5 + 4) = -3 \times 9 = -27$$

Si efectuamos la multiplicación aplicando la distributividad, también obtenemos -27 como resultado, pues

$$-3(5 + 4) = -3 \times 5 + (-3 \times 4) = -15 + (-12) = -27$$

b) $(5)(-2 + (-4)) = (5)(-2) + (5)(-4)$
$= -10 + (-20) = -30$
$(5)(-2 + (-4)) = (5)(-6) = -30$

c) $(4)(-7 + 5) = (4)(-7) + (4)(5) = -28 + 20 = -8$
$(4)(-7 + 5) = 4(-2) = -8$

d) $-2(-3 + (-7)) = (-2)(-3) + (-2)(-7)$
$= 6 + 14 = 20$
$-2(-3 + (-7)) = (-2)(-10) = 20$

En este momento seguramente ya observó usted que si la forma de multiplicar números positivos y negativos fuera distinta de como la hemos aprendido, entonces no se cumplirían las propiedades que acabamos de ver; sobre todo la última, la propiedad distributiva.

Además de estas propiedades básicas, podemos indicar que la multiplicación de enteros tiene las siguientes dos propiedades:

Propiedad del cero en la multiplicación.

Si a es un número entero cualquiera entonces

$$a \cdot 0 = 0$$

Ejemplo.

a) $(-6)(0) = 0$ b) $(25)(0) = 0$

c) $(0)(18) = 0$ d) $(0)(-45) = 0$

Propiedad del -1 en la multiplicación.

Si a es un número entero cualquiera, entonces

$$(-1)(a) = -a$$

Esto es, si multiplicamos un número a por -1, el resultado es el inverso aditivo de a.

Ejemplo.

a) $(-1)(8) = -8$ b) $(-1)(-5) = 5$

c) $(34)(-1) = -34$ d) $(-87)(-1) = 87$

Ejercicio 25. Efectúe usted las siguientes multiplicaciones.

a) $(7)(5)(-3) =$ b) $(-12)(4)(10) =$

c) $(-3)(-15)(6) =$ d) $(56)(-2)(5) =$

e) $(25)(584)(-4) =$ f) $(698)(-25)(4) =$

g) $(1\,562)(0)(312) =$ h) $(1\,913)(-1) =$

i) $(-1)(748)(0) =$ j) $(415)(2)(-1)(5) =$

k) $(-20)(-1)(8\,714)(-5) =$

Ejercicio 26. Efectúe las siguientes operaciones considerando que $a = 8$, $b = -2$, $c = -1$ y $d = 0$.

a) $ab = (8)(-2) = -16$
b) $(a+b)(c) =$
c) $a \cdot b \cdot c =$
d) $a \cdot a \cdot c =$
e) $(a+c)(b) =$
f) $b \cdot b =$
g) $a \cdot a \cdot a =$
h) $a^2 =$
i) $c^3 =$
j) $a \cdot b^2 =$
k) $a^2 + b^3 =$
l) $ac + b^2c =$
m) $a^2 \cdot b^3 \cdot c \cdot d =$
n) $(a^2)(b+c) =$
o) $(b^2)(a+c+d) =$
p) $(c^3)(a^3+d) =$
q) $(d)(a+b^2+c^5) =$
r) $(-1)(a^2) =$
s) $(b^3)(-1) =$
t) $a \cdot b + a^3 \cdot d =$

Ejercicio 27. Suponiendo que $x = -2$, $y = 4$, $z = 3$, $t = -6$ encuentre los valores de las siguientes expresiones:

a) $4(x+3)$
b) $2(t+5)$
c) $2t+5$
d) $(2z)^2$
e) $(3y)^2$
f) $3y^2$
g) $(x+1)(y+2)$
h) $(x+y)(z+t)$
i) $x(t-z)$
j) $(t-z)(t-x)$
k) $(y-x)^2$
l) $(t-y)z$

4. DIVISION

En una unidad anterior usamos símbolos para plantear el problema de encontrar un número que multiplicado por otro b dé como resultado un tercer número a. Hacíamos esto de la siguiente manera:

$$b \cdot \square = a$$

o bien, de esta otra

$$\frac{a}{b} = \square$$

Al encontrar la solución de este problema decíamos que habíamos efectuado una división.

Ahora, en esta sección efectuaremos algunas divisiones en las que el dividendo y el divisor son números enteros.

Notación. Una división de enteros la indicaremos, tal como lo hicimos antes con los números naturales.

Ejemplo.

a) $\frac{-30}{-6} =$ (¿Qué número multiplicado por -6 es igual a -30?)

b) $\frac{-28}{4} =$ (¿Qué número multiplicado por 4 es igual a -28?)

c) $\frac{100}{-10} =$ (¿Qué número multiplicado por -10 es igual a 100?)

Como ya hemos visto antes, algunos cocientes se pueden calcular directamente basándose en la experiencia adquirida al efectuar multiplicaciones. Igual pasa con las divisiones de enteros.

Ejemplo.

a) $\frac{-30}{-6} = 5$, porque sabemos que $\underset{\text{Cociente}}{(5)}\ \underset{\text{Divisor}}{(-6)} = \underset{\text{Dividendo}}{-30}$

b) $\frac{-28}{4} = -7$, porque sabemos que $(-7)(4) = -28$

c) $\frac{120}{-10} = -12$, porque sabemos que $(-12)(-10) = 120$.

Ejercicio 28. Calcule directamente los cocientes de las siguientes divisiones.

a) $\frac{-25}{5} =$
b) $\frac{-50}{10} =$
c) $\frac{-35}{7} =$
d) $\frac{-40}{8} =$
e) $\frac{-81}{9} =$
f) $\frac{-150}{30} =$
g) $\frac{-200}{50} =$
h) $\frac{-35}{-7} =$
i) $\frac{-64}{-8} =$

j) $\dfrac{-120}{-6} =$ k) $\dfrac{-72}{-9} =$ l) $\dfrac{-64}{-4} =$

m) $\dfrac{-60}{-12} =$ n) $\dfrac{-90}{-15} =$ ñ) $\dfrac{30}{-6} =$

o) $\dfrac{28}{-4} =$ p) $\dfrac{48}{-6} =$ q) $\dfrac{56}{-7} =$

r) $\dfrac{121}{-11} =$ s) $\dfrac{225}{-15} =$ t) $\dfrac{144}{-12} =$

u) $\dfrac{-1}{1} =$ v) $\dfrac{-1}{-1} =$ w) $\dfrac{1}{-1} =$

x) $\dfrac{0}{-4} =$ y) $\dfrac{0}{-1} =$ z) $\dfrac{-15}{-15} =$

Si deseamos efectuar una división como

$$\frac{-4\,116}{343} =$$

no podríamos hacerlo directamente. Sin embargo, podemos calcular el cociente de divisiones como ésa con los conocimientos que tenemos sobre la división entre números naturales y la forma en que hemos definido la multiplicación de enteros.

La observación de las siguientes divisiones nos permitirá elaborar un procedimiento aplicable a aquellas divisiones que no se pueden efectuar mentalmente.

$$\frac{120}{6} = 20 \qquad \frac{120}{-6} = -20$$

$$\frac{-120}{-6} = 20 \qquad \frac{-120}{6} = -20$$

El resultado, en todos los casos, es 20, o el simétrico de 20. Si encontramos el cociente efectuando la división con los positivos, sabemos que en los otros casos el cociente será 20, o bien su simétrico. Podemos decidir entre 20 o -20, utilizando lo que sabemos de la multiplicación de enteros.

Observe cómo se efectúan las siguientes divisiones utilizando la idea expuesta.

Ejemplo.

a) $\dfrac{-4116}{343} =$

Si la división fuera entre positivos tendríamos que:

$$\begin{array}{r|l} & 12 \\ 343 & 4116 \\ & 686 \\ & 0 \end{array}; \qquad \frac{4116}{343} =$$

La división inicial tendrá por cociente a 12 o a -12. Como el producto del cociente por el divisor debe ser igual al dividendo, el cociente en este caso debe ser negativo, ya que un factor negativo por un factor positivo dan un producto negativo. Por lo tanto,

$$\frac{-4116}{343} = -12$$

Comprobación: $(-12)(343) = -4116$.

b) $\dfrac{-294}{-14} =$

Si la división fuera entre positivos tendríamos lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} & 21 \\ 14 & 294 \\ & 14 \\ & 0 \end{array}; \qquad \frac{294}{14} =$$

El cociente de la división inicial es 21 o su simétrica -21. El cociente es 21 porque $21(-14) = -294$. Esto es,

$$\frac{-294}{-14} = 21$$

c) $\dfrac{980}{-28} =$

Entre positivos tendríamos:

$$\begin{array}{r|l} & 35 \\ 28 & 980 \\ & 140 \\ & 0 \end{array}; \qquad \frac{980}{28} = 35.$$

El cociente de la división inicial es -35, porque $-35\ (-28) =$ 980.

Ejercicio 29. Efectúe las siguientes divisiones (compruebe sus resultados).

a) $\dfrac{630}{-18} = \square$ b) $\dfrac{-684}{19} = \square$ c) $\dfrac{-1288}{56} = \square$

d) $\dfrac{833}{-17} = \square$ e) $\dfrac{-1118}{26} = \square$ f) $\dfrac{1876}{-28} = \square$

g) $\dfrac{-1794}{39} = \square$ h) $\dfrac{-3128}{-46} = \square$ i) $\dfrac{-5590}{-65} = \square$

j) $\dfrac{-4984}{-89} = \square$ k) $\dfrac{-6364}{74} = \square$ l) $\dfrac{-4216}{-62} = \square$

n) $\dfrac{-6298}{94} = \square$ n) $\dfrac{-4371}{-47} = \square$ ñ) $\dfrac{-4028}{53} = \square$

En todas las divisiones que hemos hecho el resultado es un número entero. En otras divisiones esto no es así. Por ejemplo,

$$\frac{-7}{4} = \square \qquad \frac{-8}{-16} = \square \qquad \frac{1}{-2} = \square$$

El cociente de estas divisiones no es, en ningún caso, un número entero. En el siguiente curso estudiaremos una nueva clase de números que son cocientes de divisiones, como las mostradas.

Ejercicio 30. Resuelva usted las siguientes ecuaciones.

a) $5 \cdot \square = -30.$

b) $-4 \cdot \square = -48$

c) $-7x = 56$ $x = \square$

d) $25a = -200$ $a = \square$

e) $(3)(-2)(b) = 90$ $b = \square$

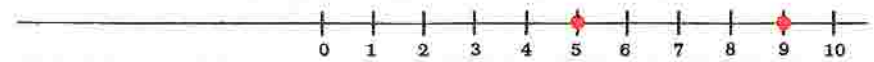
f) $(-4)(-12)(x) = 480$ $x = \square$

g) $(5)(n)(-3) = 3\,000$ $n = \square$

III. EL ORDEN EN LOS NUMEROS ENTEROS

Al estudiar los números naturales aprendimos un criterio que nos permitía determinar entre dos números cualesquiera cuál era mayor o menor que el otro. De tal manera que al considerar los números 5 y 9, por ejemplo, podíamos señalar que $9 > 5$, o bien, que $5 < 9$.

Representemos en una recta numérica los números del ejemplo anterior.

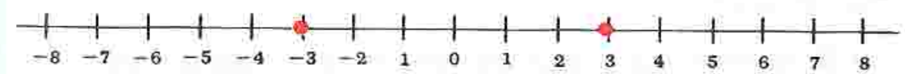


Observamos que el número mayor (9) está a la derecha del número menor (5). Igual pasa con dos números no negativos cualesquiera representados en la recta numérica: el *número mayor* se representa con un punto que *está situado a la derecha del menor*.

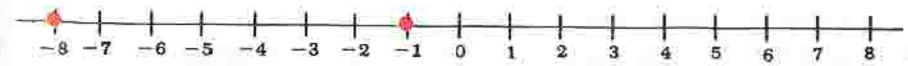
Ahora, para determinar si un número entero es mayor o menor que otro número entero, seguiremos el mismo criterio:

Un número entero a es mayor que otro número entero b, si al representarlos en una recta numérica, a queda a la derecha de b.

Ejemplo.



$3 > -3$ (o bien $-3 < 3$) porque 3 está a la derecha de -3.



$-8 < -1$ (o bien $-1 > -8$) porque -8 está a la izquierda de -1.

Ejercicio 31. De acuerdo con el criterio expuesto, llene los cuadritos de cada inciso con los símbolos $>$ o $<$, según corresponda.

a) $5 \square 3$ b) $0 \square 7$ c) $-3 \square -5$

d) $-7 \square -4$ e) $-12 \square -18$ f) $3 \square -5$

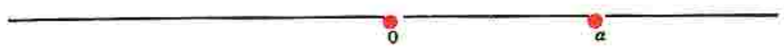
g) -7 □ 1 h) -11 □ 11 i) 5 □ -5

j) -7 □ 0 k) -100 □ 0 l) -9 □ 7

m) 8 □ -1 n) -700 □ -300 o) -500 □ -1500

p) 3000 □ 1 q) -120 □ -30000 r) -1000 □ 1000

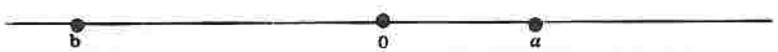
Ejercicio 32. Observe bien las ilustraciones y después complete las oraciones.

a) 

Cualquier número positivo a es ____________ (mayor, menor) que 0. (¿Por qué?)

b) 

Cualquier número negativo b es ____________ (mayor, menor) que 0. (¿Por qué:)

c) 

Cualquier número negativo b es ____________ (mayor, menor) que cualquier número positivo a. (¿Por qué?)

d) Si $m > 0$, entonces m puede ser cualquier número ____________ (positivo, negativo).

e) Si sabemos que $n < 0$, entonces también sabemos que n es un número ____________ (positivo, negativo).

La idea de orden, que en forma intuitiva acabamos de ver en la recta numérica, puede precisarse con la siguiente definición:

Si a y b son números enteros, se dice que a es mayor que b si la diferencia $a - b$ es un número positivo.

En símbolos:

$$a > b \text{ si y sólo si } a - b > 0$$

Ejemplo.

a) $8 > 2$ porque $8 - 2 > 0$

b) $13 > 10$ porque $13 - 10 > 0$

c) $7 < 12$ porque $7 - 12 < 0$

d) $-2 > -5$ porque $-2 - (-5) > 0$

e) $-9 > -20$ porque $-9 - (-20) > 0$

Ejercicio 33. Tal como se hace en los primeros incisos, de acuerdo con la definición de orden, escriba el símbolo adecuado en cada □.

a) $15 > -2$ porque $15 - (-2) > 0$

b) $-4 < -1$ porque $-4 - (-1) < 0$

c) 5 □ -1 porque $5 - (-1)$ □ 0

d) 20 □ -50 porque $20 - (-50)$ □ 0

e) -3 □ -6 porque $-3 - (-6)$ □ 0

f) 2 □ -6 porque $2 - (-6)$ □ 0

g) -4 □ 30 porque $-4 - 30$ □ 0

h) -53 □ 53 porque $-53 - 53$ □ 0

1. PROPIEDADES BASICAS DEL ORDEN

Propiedad transitiva.

Observando la recta numérica que se dibuja a continuación, vemos que, cualesquiera que sean los números llamados a, b y c, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

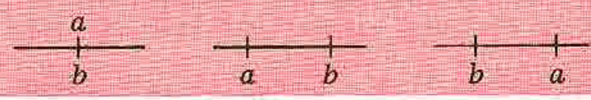
En la ilustración anterior se aprecia la llamada *propiedad transitiva del orden*, la cual enunciamos aquí de la siguiente manera:

Dados tres números enteros a, b, c, si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Propiedad de tricotomía.

El orden tiene otra propiedad básica denominada *tricotomía,* y que enunciamos de la siguiente manera:

> *Si a y b denotan números enteros, sólo puede ocurrir una de las tres posibilidades siguientes:*
>
> $$a = b \quad \text{o} \quad a < b \quad \text{o} \quad a > b$$



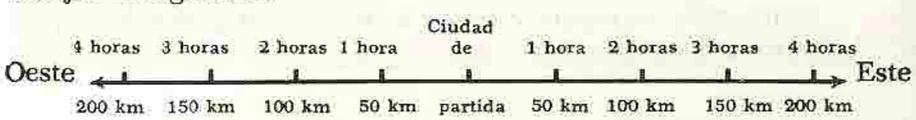
Ejercicio 34. Aplicando su conocimiento de las propiedades básicas del orden, complete usted los siguientes razonamientos.

a) Si $3 > a$	y	$a > b$,	entonces $3 > b$
b) Si $x < 8$	y	$8 < n^2$,	entonces
c) Si $4a > 4n$	y	$4n > b^2$,	entonces
d) Si $3a^2 > 5y$	y	$5y > 10m$,	entonces
e) Si $2a < b^2$	y	$b^2 < c^3$,	entonces
f) Si $m > x$	y	$z < x$,	entonces
g) Si $c > 34$	y	$a < 34$,	entonces

IV VALOR ABSOLUTO

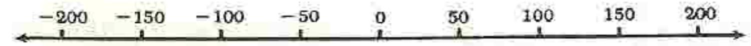
Problema. Dos vehículos parten de una ciudad y avanzan por una carretera recta en sentido opuesto, uno hacia el este y otro hacia el oeste. Si su velocidad promedio es de 50 kilómetros por hora, al cabo de cuatro horas, ¿cuál vehículo está más lejos de la ciudad de partida?

Si hacemos un esquema para resolver este problema, podemos dibujar lo siguiente:



Encontramos que, aun cuando los vehículos no estén juntos, ambos se han alejado de la ciudad la misma distancia. En consecuencia, podemos contestar: "Ninguno de los dos vehículos está más lejos de la ciudad que el otro".

En casos como éste sólo se piensa en el *valor absoluto* del desplazamiento, es decir, en la distancia recorrida, sin tomar en cuenta el sentido del movimiento. Si nos fijamos en la recta numérica,



cada punto corresponde a un número y este número nos indica qué tan lejos está ese punto del punto cero, y en qué sentido, positivo o negativo.

Así, el punto que corresponde a -200 no es el mismo punto que corresponde a 200; pero ambos puntos están a la misma distancia del punto cero. De modo que si pensamos sólo en la longitud de un desplazamiento, sin importarnos el sentido del mismo, podemos representar esta distancia siempre con un número positivo y decir que éste es su *valor absoluto.* Por ejemplo,

el valor absoluto de este desplazamiento es 200, y

el valor absoluto de este otro desplazamiento también es 200.

Si no se quieren trazar los esquemas de los desplazamientos, se puede emplear el siguiente simbolismo:

$$|200| = 200$$

(El valor absoluto del desplazamiento 200, que es en sentido positivo, es 200.)

$$|-200| = 200$$

(El valor absoluto del desplazamiento -200, que es en sentido negativo, es 200.)

Ejemplo.

a) $|8| = 8$

b) $|-8| = 8$

c) $|14| = 14$

d) $|-14| = 14$

e) $|\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$

f) $|-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$

g) $|-\frac{5}{7}| = \frac{5}{7}$

h) $|\frac{5}{7}| = \frac{5}{7}$

i) $|3 - 2| = |1| = 1$

j) $|5 - 7| = |-2| = 2$

k) $|3 \times 4| = |12| = 12$

l) $|(4)(-2)| = |-8| = 8$

Aunque el cero no representa ningún desplazamiento positivo ni negativo, de todas maneras se define su valor absoluto:

$$|0| = 0$$

y de esta manera **todo número entero tiene un valor absoluto.**

Como puede usted observar, se ha convenido en que el valor absoluto de un número entero cualquiera es otro número entero que nunca puede ser negativo. Podríamos expresar simbólicamente esto de la siguiente manera:

$$\textit{Si } x > 0, \textit{ entonces } |x| = x$$

(Si x representa un número positivo, el valor absoluto de x es él mismo)

$$\textit{Si } x = 0, \text{ entonces } |x| = 0$$

(Si x representa al número cero, su valor absoluto es él mismo)

$$\textit{Si } x < 0, \textit{ entonces } |x| = -x$$

(Si x representa a un número negativo, el valor absoluto de x es su opuesto, $-x$, que es un número positivo.)

Ejemplo.

a) Si $x = -3$, entonces $|x| = -(-3) = 3$
b) Si $x = -5$, entonces $|x| = -(-5) = 5$
c) Si $x = -2$, entonces $|x| = |-2| = -(-2) = 2$
d) Si $x = -7$, entonces $|x| = |-7| = -(-7) = 7$

Ejercicio 35. Indique cuáles son los valores absolutos de los siguientes números enteros.

a) $|20| =$

b) $|17| =$

c) $|-9| =$

d) $|-1| =$

e) $|\frac{1}{5}| =$

f) $|-\frac{4}{7}| =$

g) $|-\frac{2}{3}| =$

h) $|\frac{9}{10}| =$

i) $|0| =$

j) $|4 - 4| =$

k) $|3 - 8| =$

l) $|6 - 2| =$

m) $|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}| =$

n) $|\frac{3}{8} - \frac{3}{4}| =$

o) $|x| =$ (si $x > 0$)

p) $|x| =$ (si $x = 0$)

q) $|a| =$ (si $a < 0$)

r) $|b| =$ (si $b = 0$)

s) $|a - b| =$ (si $a - b > 0$)

t) $|x - y| =$ (si $x - y < 0$)

u) $|n^2| =$ (si $n > 0$)

v) $|n^2| =$ (si $n < 0$)

w) $|ax^2| =$ (si $a = 0$)

x) $|a^2 - b^2|$ (si $a > 0$ y $b = 0$)

NICOLAI IVANOVITCH LOBACHEVSKY (1793–1856)

Matemático ruso, que a la edad de 21 años era profesor de la Universidad de Kazan. En 1826 dio a conocer sus trabajos sobre una geometría que no dependía del postulado de Euclides sobre rectas paralelas

SEPTIMA UNIDAD

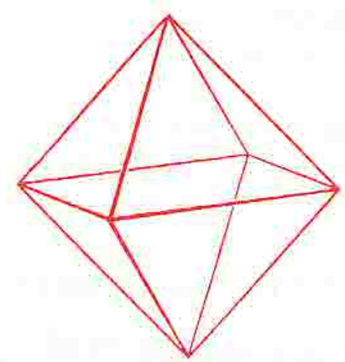
GEOMETRIA Y METRICA

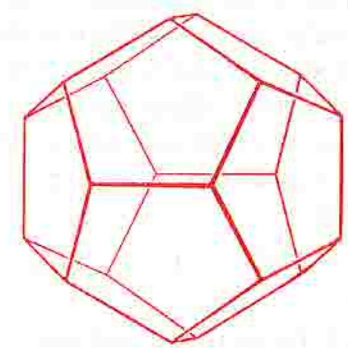
I. PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

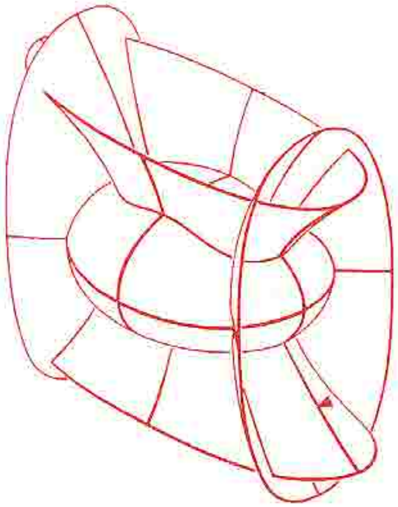
La geometría ha sido siempre considerada como una de las más bellas ramas de las matemáticas.

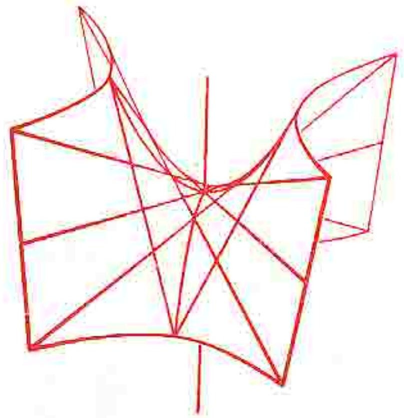
Toda persona, desde sus primeras experiencias de la infancia, va adquiriendo ciertas nociones intuitivas acerca de la forma y el tamaño de los objetos que la rodean. En los estudios de la escuela primaria y a medida que se va desarrollando nuestra capacidad de observación y análisis, estos conceptos relativos a figuras geométricas van adquiriendo mayor importancia. En esta unidad continuaremos el estudio de figuras geométricas, de su forma y de su medida.

A continuación se ilustran varias figuras geométricas.









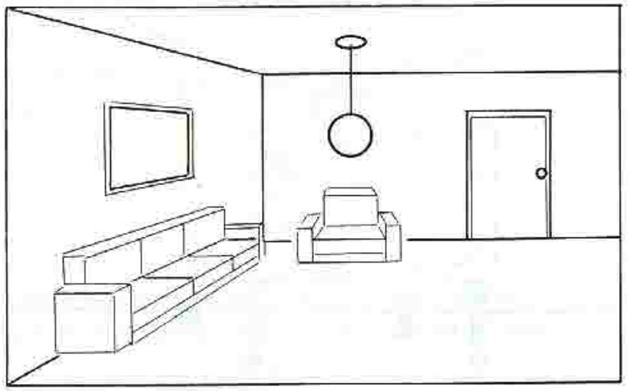
Ahora bien, en estudios más avanzados de matemáticas se consideran muchas geometrías: la geometría proyectiva, la topología, las geometrías no euclidianas, la geometría algebraica, etc. La que en general se trata en los estudios de la escuela primaria y que ahora continuaremos estudiando es la que guarda más estrecha relación con nuestras primeras observaciones del mundo que nos rodea. Se trata de la geometría euclidiana, llamada así en honor del gran sabio griego Euclides quien tan maravillosamente supo organizar los conceptos básicos y las deducciones de esta geometría.

En esta geometría consideramos al espacio como un conjunto de elementos que llamamos *puntos*. Hablamos de *figuras geométricas* las cuales son subconjuntos del espacio. Es decir, las figuras geométricas son conjuntos de puntos.

Cualquier objeto que observemos puede servirnos para visualizar figuras geométricas, por ejemplo *líneas* (y, en particular, líneas *rectas*), superficies (y, en particular, superficies *planas*) y *cuerpos sólidos*.

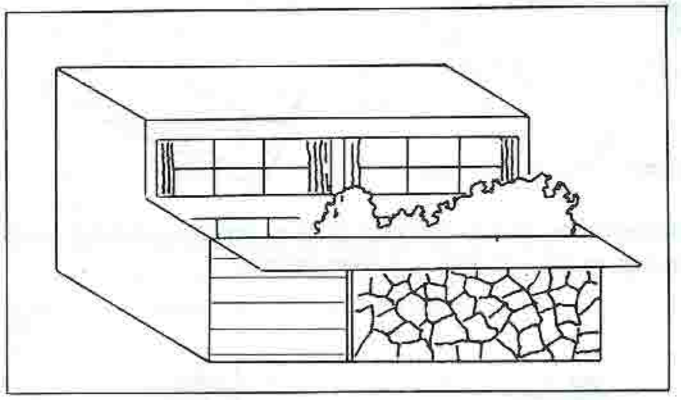
Ejercicio 1. En la siguiente ilustración identifique y marque con color

a) La recta que determina el cable de la lámpara.
b) El plano determinado por el piso de la habitación.
c) La esfera determinada por la lámpara.



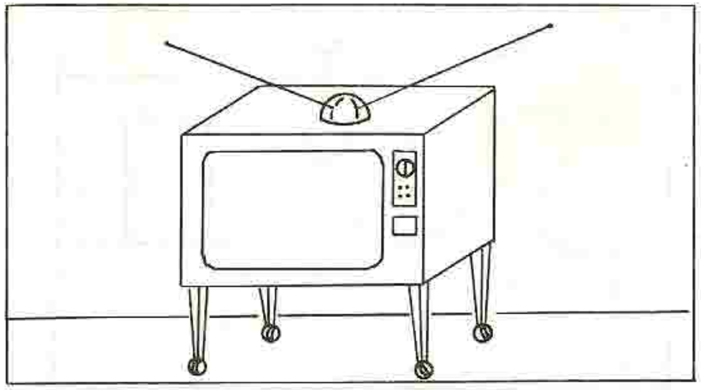
Ejercicio 2. En la siguiente ilustración marque con color

a) El plano determinado por la marquesina.
b) El plano determinado por el techo de la casa.
c) La recta en que se intersecan la pared de la izquierda y el piso.



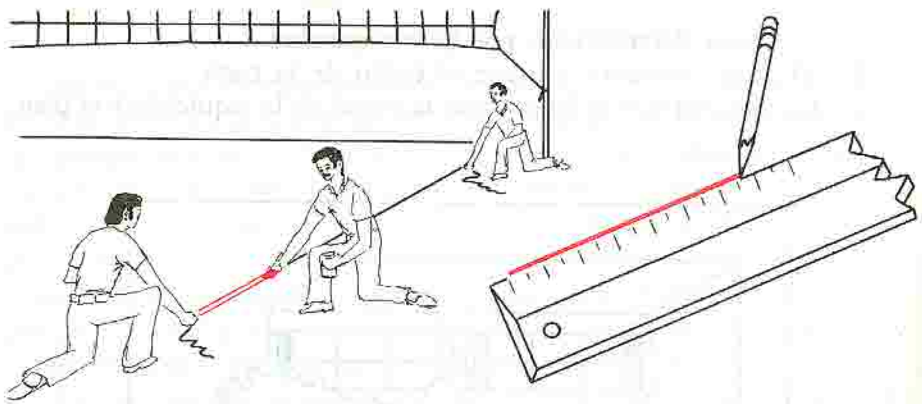
Ejercicio 3. Marque con color

a) La recta en que se intersecan la pared y el piso.
b) Las rectas determinadas por las antenas del televisor.
c) El paralelepípedo determinado por el televisor.

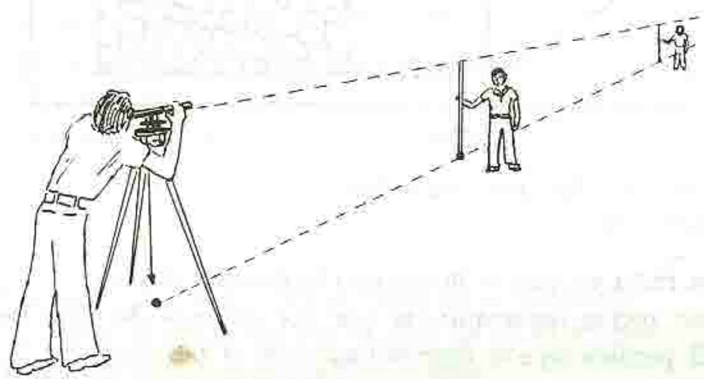


1. RECTAS

Para dibujar rectas en un plano se puede utilizar una regla. En algunos casos se usa un hilo o una cuerda.



Los topógrafos, para marcar trazos rectos utilizan instrumentos especiales como los tránsitos y estadales.



Ejercicio 4.

a) A continuación se han indicado dos puntos, el punto P y el punto Q.

Q

P

¿Puede usted trazar líneas (no necesariamente rectas) que pasen por los puntos P y Q? ¿Hay una sola línea o muchas que pasen por P y Q?

b) Pensemos en las mismas preguntas pero hablando no de líneas en general, sino de líneas *rectas*. Es decir, marcamos dos puntos P y Q:

Q

P

¿Puede usted trazar líneas rectas que pasen por los dos puntos P y Q? ¿Hay una sola recta o muchas que pasan por P y Q?

Ejercicio 5. Marquemos ahora un solo punto P.

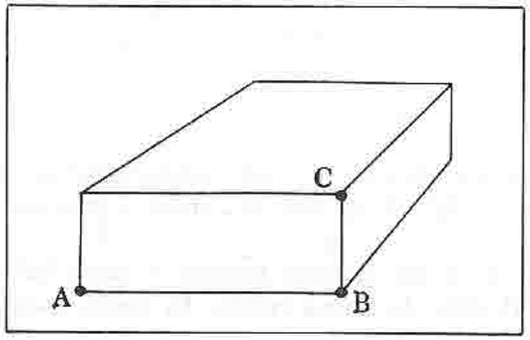
P

¿Hay rectas que pasen por P? ¿Hay una sola recta que pasa por P o hay muchas?

En geometría interesan las relaciones que hay entre unas figuras y otras. En los dos ejercicios anteriores usted habrá observado algunas relaciones elementales entre puntos y rectas:

> *Dados dos puntos P y Q hay una recta y solamente una que pasa por ellos.*
> *Por un punto pasan tantas rectas como se quiera.*

La primera de estas propiedades permite referirse a una recta mencionando únicamente dos de sus puntos. Por ejemplo, si en relación a la siguiente ilustración decimos "la recta que pasa por A y B" sabemos exactamente a qué recta nos estamos refiriendo, puesto que, según hemos observado, hay una sola recta que pasa por esos dos puntos. Asimismo, también sabemos exactamente de qué se trata al decir "la recta que pasa por B y C".



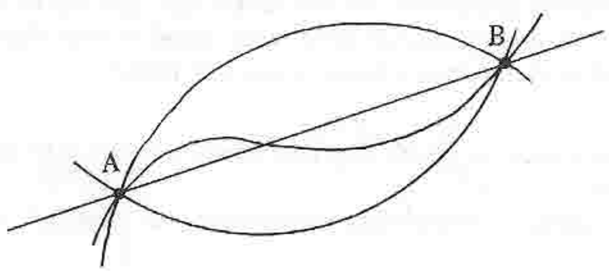
Para abreviar el lenguaje se acostumbra decir simplemente "la recta AB" en vez de "la recta que pasa por los puntos A y B". Y con el fin de abreviar la escritura, en vez de "la recta que pasa por los puntos A y B" se escribe simplemente

$$\overleftrightarrow{AB}$$

Así, por ejemplo, $\overleftrightarrow{BC}$ denota la recta BC.

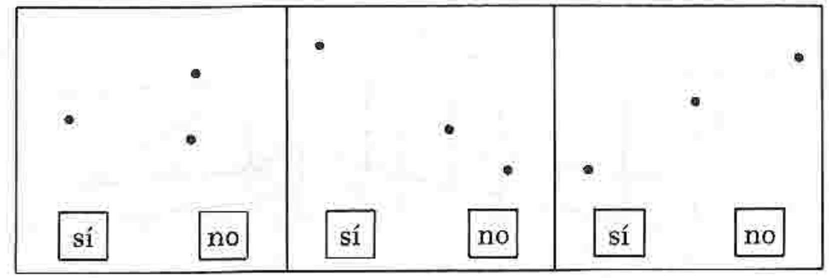
Ejercicio 6.

a) Refiriéndose a la siguiente ilustración, ¿sería correcto decir "la línea que pasa por A y B"? ¿Cuál de las 4 líneas dibujadas sería?



b) Si con respecto a la figura anterior se dice "la línea recta A B" o simplemente "la recta A B" ¿sabemos a cuál de las líneas nos estamos refiriendo? ¿Por qué?

Ejercicio 7. Supongamos ahora que nos dan 3 puntos. ¿Hay una recta que pase por los tres? Vea los siguientes casos.

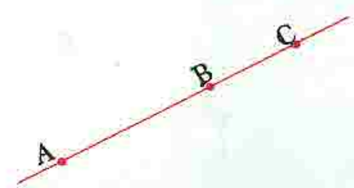


¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles son falsas?

	Correcto	Falso
a) Dados 3 puntos hay una recta que pasa por ellos.		
b) Por 3 puntos nunca pasa una recta.		
c) Por 3 puntos a veces pasa una recta.		

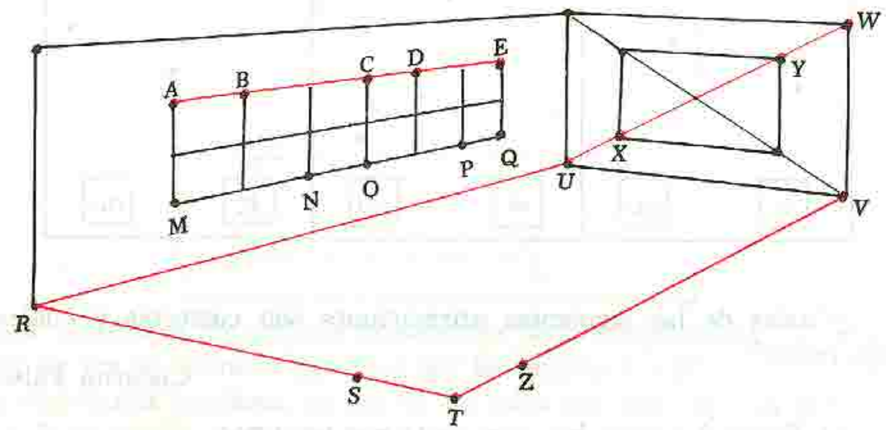
Puntos colineales

En el ejercicio anterior usted habrá observado que si damos tres puntos, a veces hay una recta que los contiene (como en la ilustración siguiente de la izquierda) y a veces no hay alguna recta que pase por los tres (como en la ilustración de la derecha, a continuación).

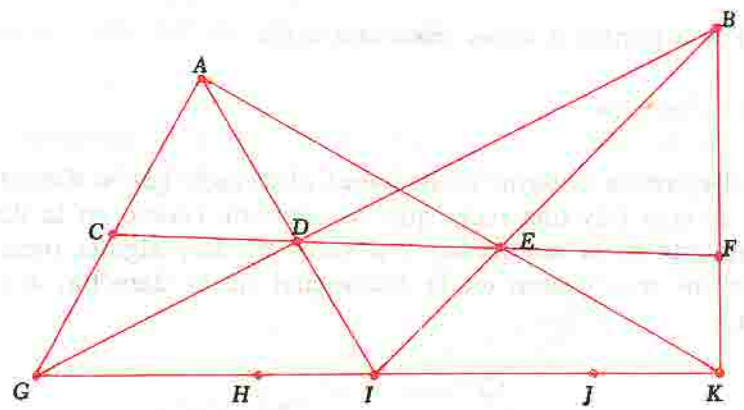


Cuando tres o más puntos están en una misma recta se dice que estos puntos son *colineales*.

Ejemplo. En la ilustración siguiente, los puntos A, B, C, D y E son colineales; los puntos R, U, W, X y Y no son colineales; los puntos U, X, Y y W sí son colineales; los puntos R, S, T, Z y V no lo son



Ejercicio 8. En la siguiente figura



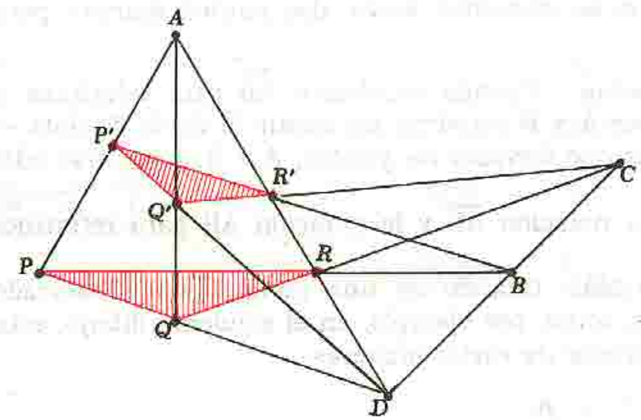
encuentre

a) 5 puntos colineales.

b) 4 puntos colineales.

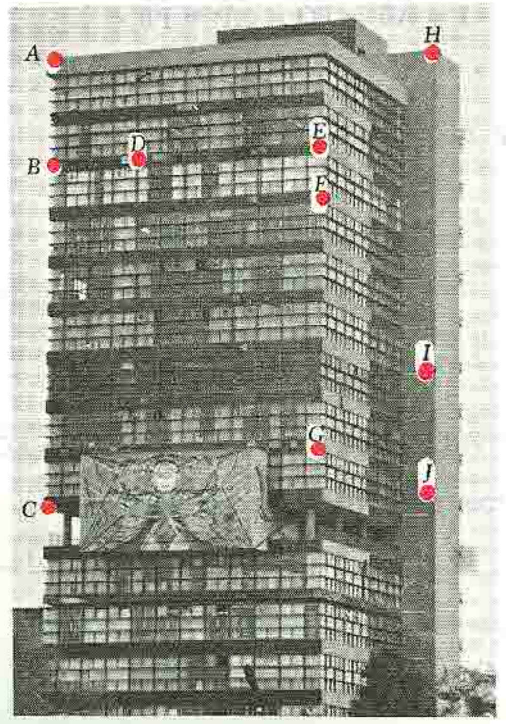
c) varias ternas de puntos colineales.

Ejercicio 9. En la siguiente figura



encuentre tantos conjuntos de puntos colineales como pueda.

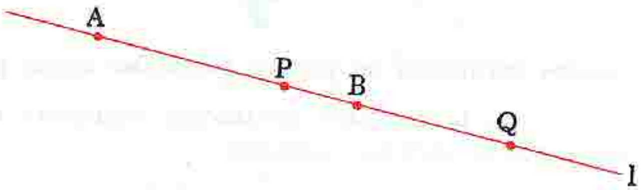
Ejercicio 10. En la siguiente ilustración encuentre tantos conjuntos como pueda de puntos colineales:



Observación. Habrá usted notado que cuando hablamos de puntos colineales siempre mencionamos 3 o más puntos. Esto se debe a que, como se mencionó antes, dos puntos siempre pertenecen a una recta.

Observación. Cuando escribimos $\overleftrightarrow{AB}$ para referirnos a la recta que pasa por A y B conviene no omitir la doble flechita $\leftrightarrow$ encima de las letras que denotan los puntos, A y B, pues más adelante utilizaremos la notación $\overline{AB}$ y la notación $\overrightarrow{AB}$ para referirnos a otros conceptos.

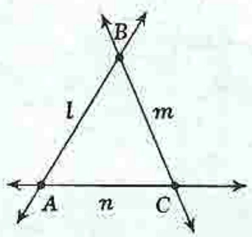
Observación. Cuando en una recta tenemos indicados tres o más puntos, como, por ejemplo, en el siguiente dibujo, esta recta la podemos denotar de varias maneras:



$$l = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{PB} = \ldots$$

Ejercicio 11.

a) En la figura

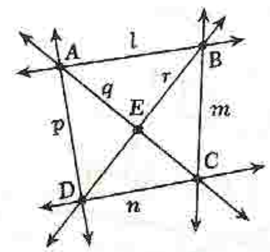


$l = \overleftrightarrow{AB}$, $n =$ ______ y ______ $= \overleftrightarrow{BC}$.

b) Escriba tres notaciones para la recta

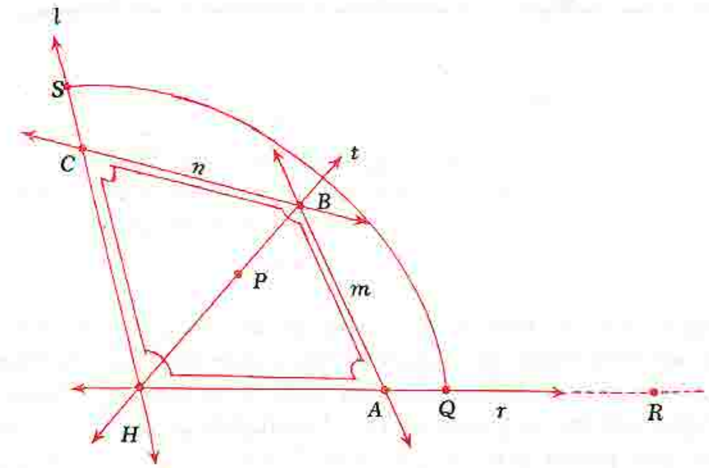
$l =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

c) En la figura



$l = \overleftrightarrow{AB}$	$\overleftrightarrow{BD} = r$
$n =$ ______	$\overleftrightarrow{ED} = r$
$m =$ ______	$\overleftrightarrow{AC} =$ ______
______ $= \overleftrightarrow{AD}$	$\overleftrightarrow{EC} =$ ______
______ $= \overleftrightarrow{DA}$	$\overleftrightarrow{AE} =$ ______

d)



En esta ilustración,

$r =$ ______ $=$ ______ $=$ ______ $=$ ______ $=$ ______

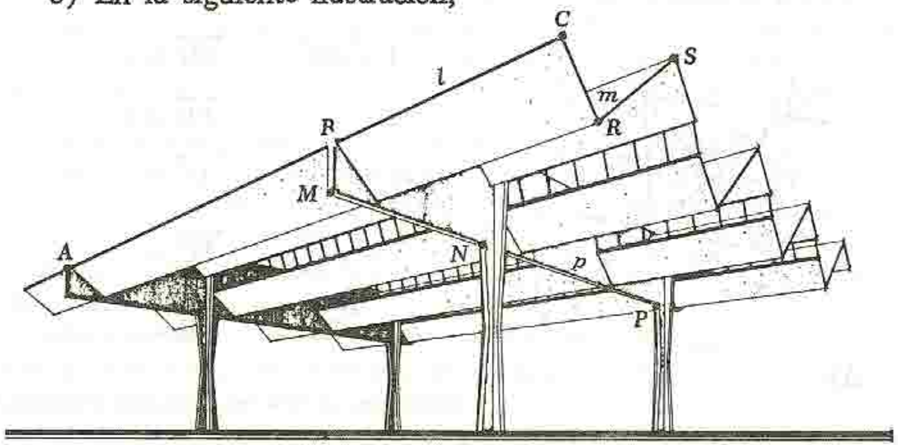
$m =$ ______ $=$ ______

$n =$ ______

$l =$ ______ $=$ ______ $=$ ______ $=$ ______

$t =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

e) En la siguiente ilustración,

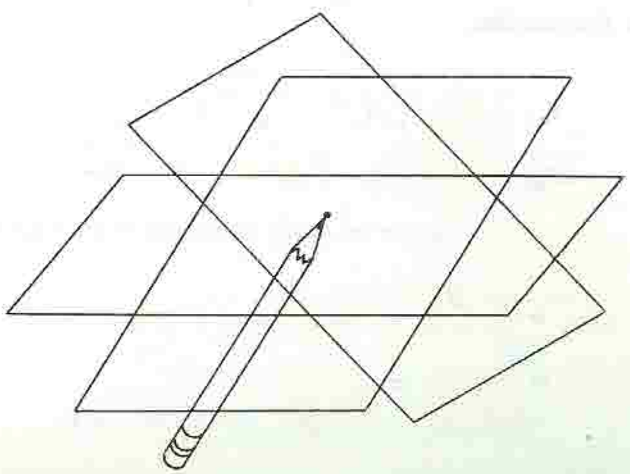


$l =$ ______ = ______ $m =$ ______

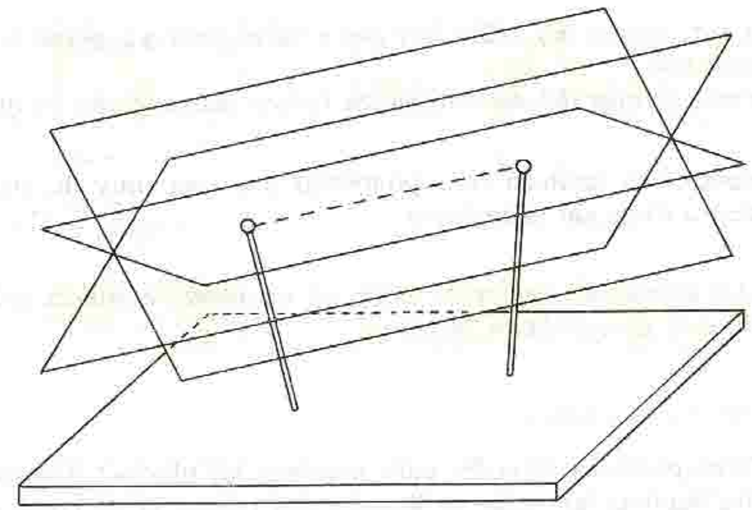
$p =$ ______ = ______ = ______

2. PLANOS

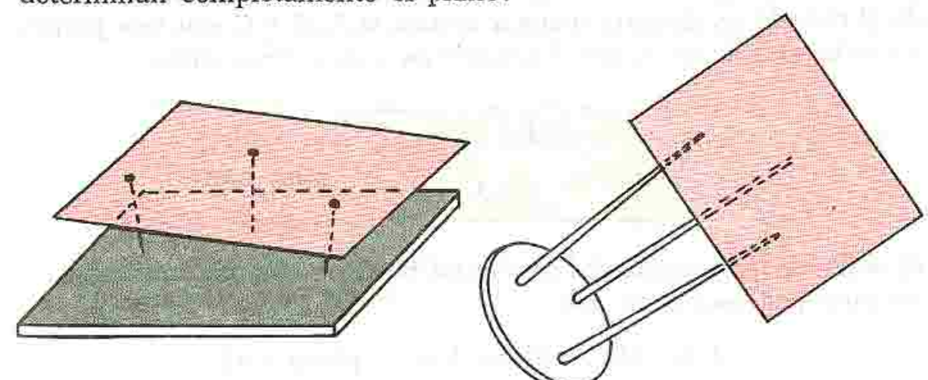
Así como dos puntos determinan una recta, para determinar un plano se necesitan tres puntos no colineales. En efecto, si como modelo de un plano tomamos un pedazo de cartón, vemos que podemos apoyarlo en un punto de muchas maneras. Es decir, hay muchos planos que pasan por un punto dado.

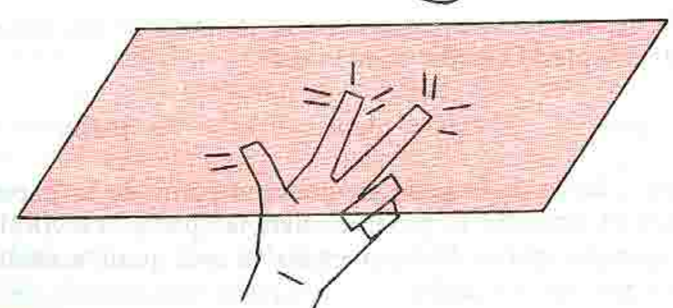


También si tomamos dos puntos, este cartón lo podemos apoyar de muchas maneras. O sea, hay muchos planos que pasan por dos puntos dados.



No así, si consideramos tres puntos no colineales. En cada una de las siguientes ilustraciones vemos que tres puntos no colineales determinan completamente el plano:





Así pues, aceptaremos esta propiedad:

Por tres puntos no colineales del espacio pasa un plano y solamente uno.
Por dos puntos del espacio pasan tantos planos como se quiera.

Aceptaremos también otra propiedad que está muy de acuerdo con nuestra intuición geométrica:

Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces toda la recta está contenida en el plano.

Notación para planos

¿Cómo podemos proceder para nombrar los planos? Recordemos que para denotar las rectas utilizamos dos puntos de la recta, pues, basta conocer dos puntos para que la recta quede determinada. En el caso de los planos, la propiedad aceptada nos dice que tres puntos no colineales determinan completamente un plano. Entonces, siguiendo el método usado para denotar rectas, si A, B y C son tres puntos no colineales de un plano, denotaremos a éste como sigue:

plano ABC

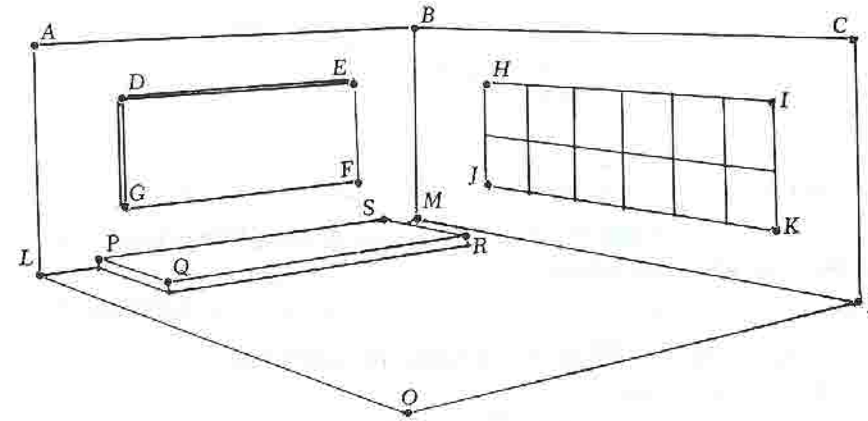
El orden en que escribamos los puntos no tiene ninguna importancia; así pues podemos decir que

$$\text{plano } ABC = \text{plano } BAC = \text{plano } CAB$$

¿Puede usted encontrar otra manera de ordenar las letras y describir el mismo plano en tres formas más?

Resp.: plano ______ = plano ______ = plano ______

Ejemplo. En la ilustración siguiente el plano de la pared donde se encuentra el pizarrón lo podemos denotar por plano ABM o también, por ejemplo, plano BLM, pues todos esos puntos están en dicho plano y no son colineales;



el plano del piso lo podemos denotar plano LMN, o bien, plano LON, o bien, plano MON; el plano de la pared de la ventana lo podemos denotar por plano BCN, plano HIC, plano HJK, etc.

Ejercicio 12. De acuerdo con la ilustración anterior,

a) denote de tres maneras distintas el plano del pizarrón (suponemos que este plano no es el mismo de la pared pues el pizarrón está "salido");

b) denote de cinco maneras distintas (y distintas de las mencionadas en el ejemplo) el plano de la pared donde se encuentra la ventana;

c) ¿cómo denotaría usted el plano del techo del salón?;

d) dé varias notaciones para el plano superior de la tarima;

e) lo mismo para el plano del piso.

3. SEGMENTOS

En geometría, a las rectas se les considera "ilimitadas" por ambos lados. Dicho de otra manera, se considera que se "prolongan indefinidamente en ambos sentidos". En la práctica se trabaja muchas veces con "pedazos" de recta, o, como se dice, con *segmentos* de recta. Cuando nos referimos, por ejemplo, al segmento de extremos A y B, nos estamos refiriendo al conjunto de todos los puntos de la recta AB que "están entre A y B" (incluyendo a A y B), como se ilustra en color en el siguiente dibujo

Para denotar el segmento de extremos A y B se escribe $\overline{AB}$.

Ejercicio 13. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles son falsas.

Correcto Falso

a) El segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de todos los puntos colineales con A y B.

b) Todos los puntos de $\overline{AB}$ son colineales con A y B.

c) Todos los puntos del segmento $\overline{AB}$ pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

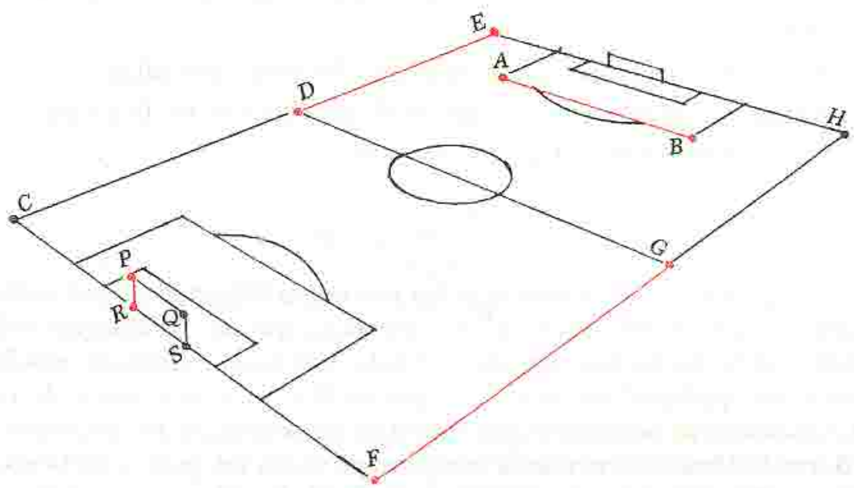
d) Todos los puntos de $\overleftrightarrow{AB}$ pertenecen a $\overline{AB}$.

e) $\overline{AB}$ está contenido en $\overleftrightarrow{AB}$.

f) $\overleftrightarrow{AB}$ está contenida en $\overline{AB}$.

Ejercicio 14.

a) En la ilustración siguiente,



los segmentos marcados con rojo son $\overline{AB}$, , y

b) ¿Cómo denotaría usted los segmentos llamados comúnmente "líneas de meta" en la ilustración de arriba?

Resp. y .

¿Cómo denotaría la llamada línea de medio campo?

Resp. .

¿Y el travesaño de la portería cuyos extremos están indicados con P y Q?

Resp. .

¿Y el poste derecho de la misma portería?

Resp. .

¿Y la "banda izquierda" del campo?

Resp. .

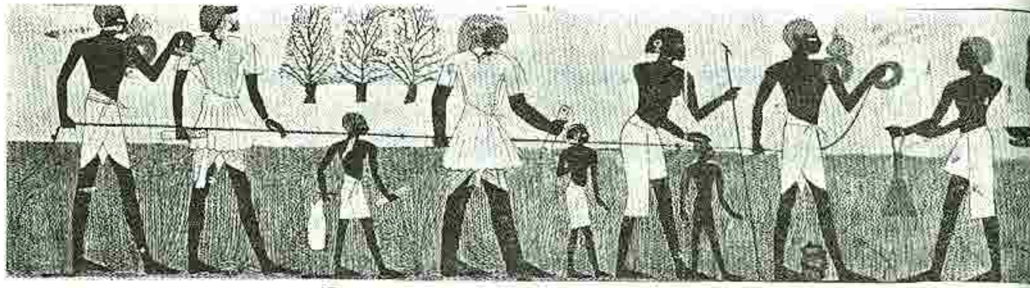
II. LONGITUD

Todos estamos familiarizados con la idea de **medida.** Desde los tiempos antiguos, el hombre, por necesidades inherentes a su forma de vida, ha tenido necesidad no solamente de contar, sino también de **medir.** Necesitó hablar de la distancia entre dos lugares, del área de un terreno, del volumen de un cilindro, etc.

En la época actual, el concepto de medida ha sido motivo de profundos estudios. Al mismo tiempo los procedimientos para medir han alcanzado un grado extraordinario de perfección.

Estos conocimientos han sido básicos para el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Podemos afirmar que muchas de las comodidades de que ahora disfrutamos se deben, en buen grado, a los conocimientos científicos acumulados a lo largo de la historia. La teoría de la medida ha sido fundamental para el desarrollo de estos conocimientos de la ciencia moderna.

En esta sección nos ocuparemos de las ideas básicas acerca de la medida, para lo cual estudiaremos la medida de segmentos (longitud). Posteriormente estudiaremos la medida de regiones planas (área) y la de algunos cuerpos sólidos (volumen).

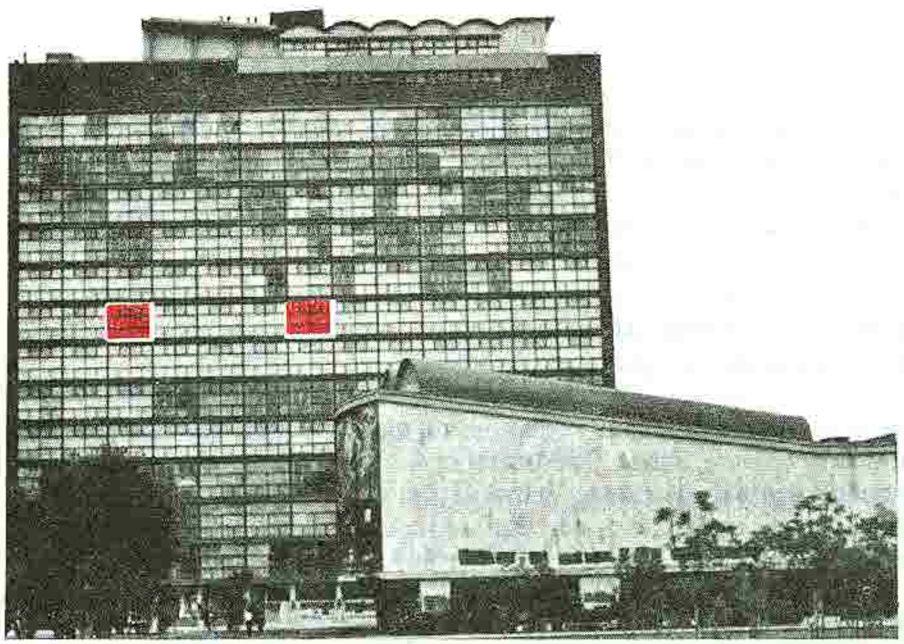


Desde la antiguedad el hombre ha necesitado medir

1. CONGRUENCIA DE SEGMENTOS

Con frecuencia, al referirnos a objetos que tienen características comunes decimos que éstos son iguales.

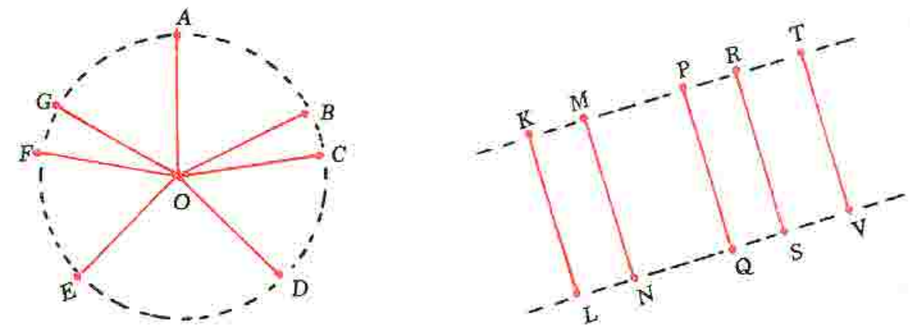
Por ejemplo, al hablar de las ventanas de un edificio como el de la fotografía decimos que son "iguales".



En geometría, en situaciones semejantes, hablaremos de figuras **congruentes.** Así pues, diremos que los rectángulos representados por dichas ventanas son congruentes.

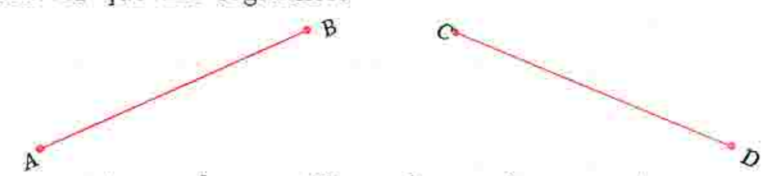
En este párrafo estudiaremos el concepto de congruencia de segmentos.

Las siguientes figuras ilustran la congruencia de segmentos:



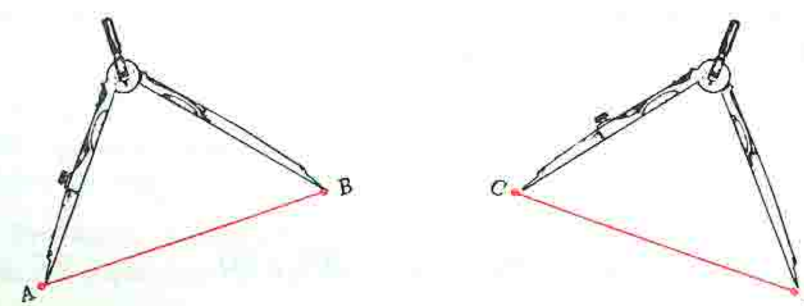
En la primera, los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ y $\overline{OG}$ son congruentes entre sí. En la segunda, los segmentos $\overline{KL}$, $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ y $\overline{TV}$ son congruentes entre sí.

Para ver que dos segmentos

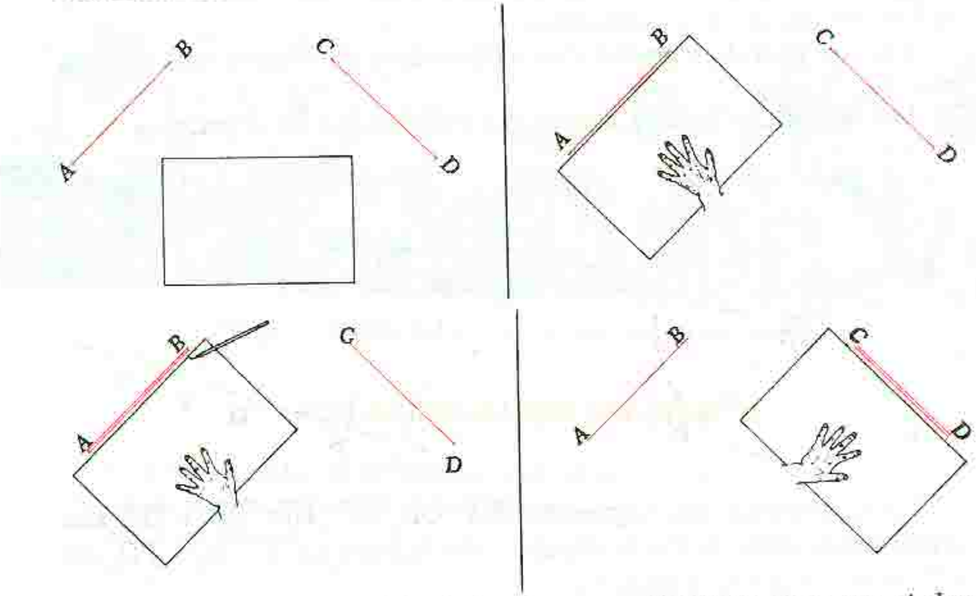


son congruentes, podemos utilizar el compás como sigue:

Abrimos el compás de tal manera que sus puntas coincidan con A y B. Con esta abertura, colocamos una de las puntas del compás en C. Si girando el compás sobre esta punta vemos que la otra punta coincide con D, entonces los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes



También podemos utilizar una hoja de papel, como se muestra a continuación:



¿Podría usted describir algún otro procedimiento para ver si dos segmentos dados son congruentes?

Para indicar que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes escribimos:

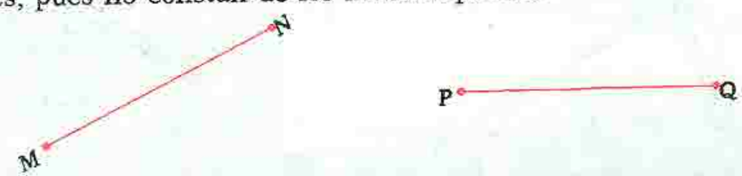
$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

(y leemos $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$). En caso contrario, es decir, cuando no son congruentes, escribimos

$$\overline{AB} \ncong \overline{CD}$$

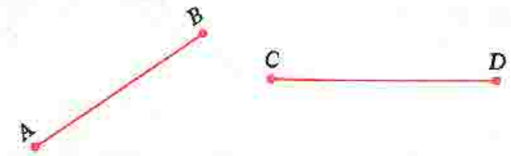
(y leemos $\overline{AB}$ no es congruente con $\overline{CD}$)

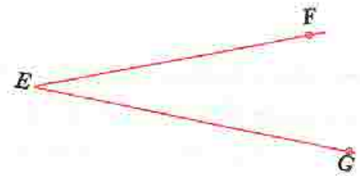
Conviene observar la distinción entre *congruencia* e *igualdad*. Por ejemplo, los siguientes segmentos son congruentes pero no son iguales, pues no constan de los mismos puntos:

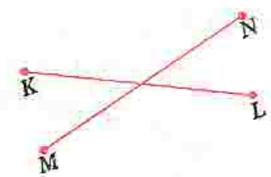


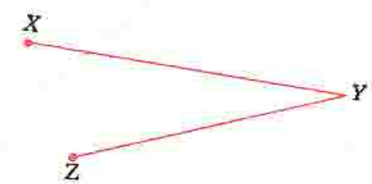
$\overline{MN} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{MN} \neq \overline{PQ}$

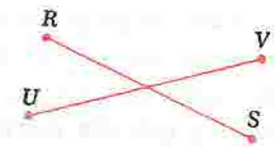
Ejercicio 16. Usando un compás determine si son o no congruentes los siguientes segmentos y luego use los signos $\cong$ o $\ncong$ para indicar su resultado.

a)  $\overline{AB}$ $\overline{CD}$

b)  $\overline{EF}$ $\overline{EG}$

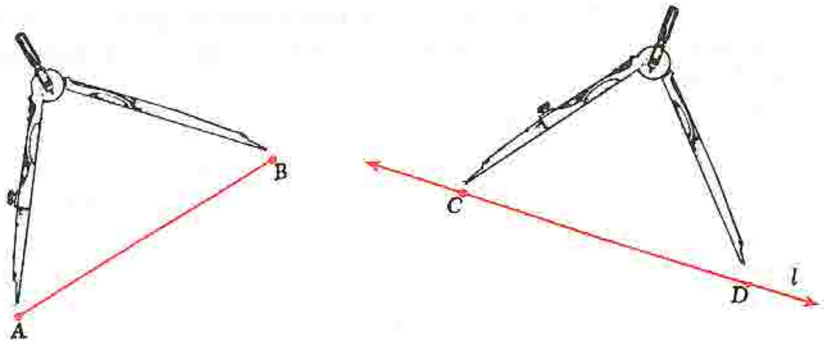
c)  $\overline{KL}$ $\overline{MN}$

d)  $\overline{XY}$ $\overline{YZ}$

e)  $\overline{RS}$ $\overline{UV}$

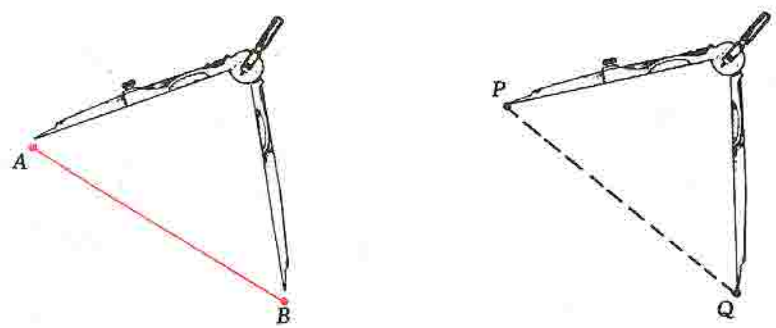
Veremos ahora cómo se puede usar la regla y el compás para resolver algunos problemas de construcción de segmentos congruentes con un segmento dado.

Problema. Construir un segmento congruente con un segmento dado $\overline{AB}$ y que esté en una recta l.



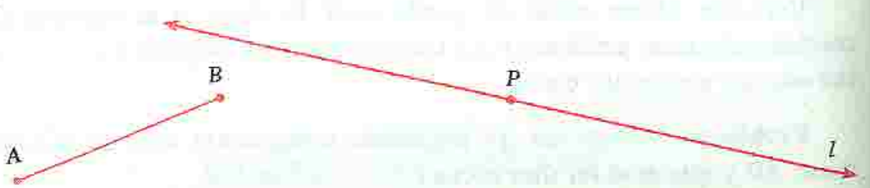
Solución. Con una abertura del compás determinada por los extremos del segmento $\overline{AB}$, marcamos dos puntos C y D sobre la recta l. El segmento $\overline{CD}$ nos da una solución del problema.

Problema. Construir un segmento congruente con un segmento dado $\overline{AB}$ y con extremo en un punto dado P.



Solución. Tomamos en el compás una abertura determinada por los extremos del segmento $\overline{AB}$ y luego apoyamos una de sus puntas en el punto P. Cualquier punto determinado por la otra punta del compás y el punto P determinan un segmento congruente con $\overline{AB}$.

Problema. Construir un segmento que esté contenido en una recta l, con extremo en un punto P de l y que sea congruente con $\overline{AB}$.

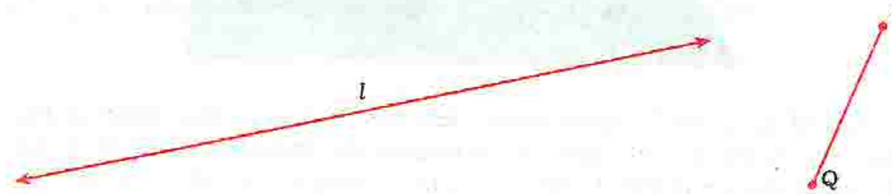


Después de haber resuelto los dos primeros problemas no tendrá usted dificultad alguna en resolver éste

Es conveniente observar que los dos primeros problemas tienen tantas soluciones como se quiera, mientras que este último tiene únicamente dos soluciones.

Ejercicio 17. Utilizando la regla y el compás efecúe las construcciones siguientes:

a) Sobre la recta l trace tres segmentos congruentes con $\overline{PQ}$.



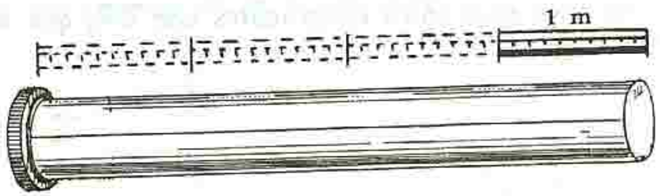
b) Trace once segmentos congruentes con $\overline{UV}$, que tengan como extremo el punto R.

c) Trace un segmento congruente con $\overline{AB}$, de modo que uno de sus extremos sea el punto C y el otro esté en la recta l.

2. LONGITUD DE UN SEGMENTO

Con bastante frecuencia tenemos que medir objetos que pueden ser representados por segmentos. Por ejemplo, podemos medir el ancho de una masa en palmos.

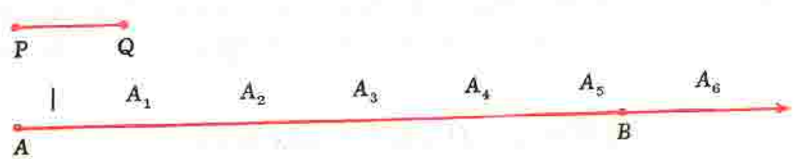
En el caso de la ilustración decimos que la mesa mide 5 palmos de ancho. En el caso de la ilustración siguiente, decimos que el tubo mide 4 metros de largo, o que su longitud es de 4 metros:



Podríamos también medir la longitud de este tubo con pasos o con pies o con alguna otra unidad de medida apropiada. Observemos que para medir un segmento, en primer lugar elegimos una unidad de medida; después colocamos esta unidad una y otra vez sobre el segmento y llamamos longitud al número de veces que podemos hacerlo.

Examinemos con más detalle este proceso.

Consideremos un segmento fijo $\overline{PQ}$ al que llamaremos **unidad de longitud** y un segmento arbitrario $\overline{AB}$:



En la recta $\overleftrightarrow{AB}$ marcamos puntos A_1, A_2, A_3, etc., de tal manera que los segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, etc., sean congruentes con la unidad $\overline{PQ}$.

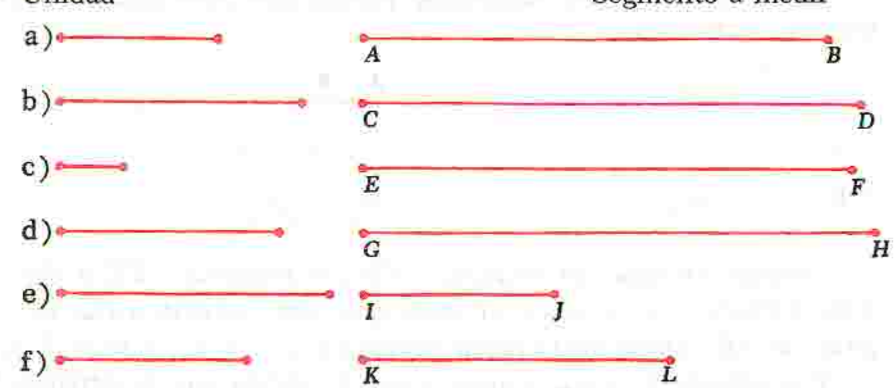
Diremos entonces que

La longitud (aproximada hasta unidades) *de* $\overline{AB}$ *con respecto a* $\overline{PQ}$ *es el número de segmentos* $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, *etc., que están contenidos en* $\overline{AB}$.

Por ejemplo, en el caso ilustrado, la longitud de $\overline{AB}$ con respecto a $\overline{PQ}$ es 5.

Observemos que, en esta forma, una vez fijada la unidad de longitud, a cada segmento le podemos asociar un número entero: su longitud (aproximada hasta unidades).

Ejercicio 18. Tomando como unidad de longitud el segmento de la izquierda, encuentre la longitud del segmento de la derecha. (Para trazar segmentos congruentes use el compás.)



Para indicar la longitud de un segmento $\overline{AB}$ escribiremos AB (léase: "la longitud del segmento $\overline{AB}$") y si queremos especificar la unidad de longitud PQ, escribiremos AB respecto a $\overline{PQ}$.

Observación: No debemos confundir las notaciones

$$\overleftrightarrow{AB}, \quad \overline{AB}, \quad AB.$$

¿Recuerda usted el significado de cada una de ellas?

Ejercicio 19. Para los segmentos del ejercicio anterior, indique sus longitudes como se muestra en los incisos a) y e).

a) $AB = 3$	c) $EF =$	e) $IJ = 0$
b) $CD =$	d) $GH =$	f) $KL =$

Hasta aquí, después de fijar una unidad de longitud, hemos asociado a cada segmento un número entero que hemos llamado su longitud. Pero es claro que esta medida no es, en muchos casos, bastante precisa. Por ejemplo, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que a continuación se ilustran tienen la misma longitud (aproximada hasta unidades) respecto a $\overline{PQ}$:

$AB = 2$

$CD = 2$

Para lograr una mejor aproximación al medir segmentos, podemos continuar el proceso en la forma siguiente:

En el segmento $\overline{PQ}$ marcamos puntos que determinen 10 segmentos congruentes.

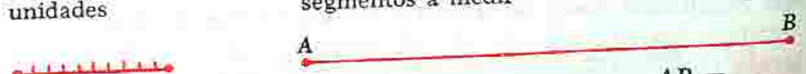
Después medimos el segmento $\overline{A'B}$ con respecto a $\overline{PR}$ y obtenemos el número 3. Decimos entonces que, con respecto a $\overline{PQ}$, la longitud de $\overline{AB}$ (aproximada hasta décimos) es $2 + \frac{3}{10}$, o bien, 2.3.

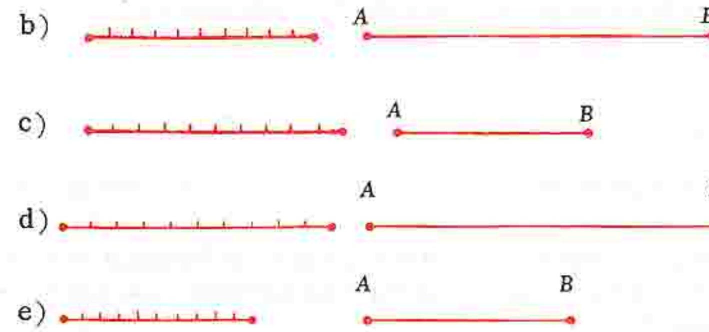
Procediendo de igual manera con $\overline{CD}$ vemos que la longitud de $\overline{CD}$ (aproximada hasta décimos) es $2 + \frac{7}{10} = 2.7$.

Así pues, con este proceso, hemos asociado a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ los números racionales 2.3 y 2.7. Escribiremos $AB = 2.3$ y $CD = 2.7$. Por lo tanto, las longitudes aproximadas hasta décimos de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son distintas.

Ejercicio 20. **Encuentre la longitud (aproximada hasta décimos)** de los siguientes segmentos, con respecto a la unidad indicada.

unidades	segmentos a medir	longitud
a)		$AB =$





b) $AB =$

c) $AB =$

d) $AB =$

e) $AB =$

Con un procedimiento similar al utilizado para encontrar la longitud aproximada hasta décimos, podemos hallar la longitud **aproximada hasta medios, hasta tercios, cuartos, etc.**

Ejemplo. Sea $\overline{PQ}$ la unidad de longitud y R un punto en $\overline{PQ}$ de tal manera que los 7 segmentos señalados en la figura sean congruentes con $\overline{PR}$:

Con respecto a la unidad PQ, la longitud del siguiente segmento $\overline{AB}$, aproximada hasta séptimos, es $3 + \frac{5}{7}$.

Ejemplo. La longitud del segmento $\overline{AB}$ con respecto a $\overline{PQ}$, en la figura siguiente, aproximada hasta cuartos, es $5 + \frac{3}{4}$.

Ejercicio 21

a) Encuentre la longitud, aproximada hasta quintos, de $\overline{AB}$ con respecto a $\overline{PQ}$.

$AB =$

b) Encuentre la longitud, aproximada hasta medios, de $\overline{AB}$ con respecto a $\overline{PQ}$:

$AB =$

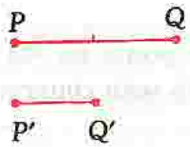
c) Encuentre la longitud, aproximada hasta cuartos, de $\overline{AB}$ con respecto a $\overline{PQ}$:

B $AB =$

Al medir segmentos hemos notado que su longitud depende de la unidad que se considere.

Ahora bien, si tomamos distintas unidades de longitud para medir un segmento dado, ¿habrá alguna relación entre las longitudes que se obtengan?

Analicemos un ejemplo. Consideremos dos unidades de longitud $\overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'}$ tales que la longitud de $\overline{PQ}$ con respecto a $\overline{P'Q'}$ sea 2:



$PQ = 2$ (respecto a $\overline{P'Q'}$)

Supongamos que un segmento $\overline{AB}$ tiene longitud 5 con respecto a $\overline{PQ}$:

¿Cuál es la longitud de $\overline{AB}$ con respecto a la unidad $\overline{P'Q'}$?

Observando la figura anterior vemos fácilmente que

$AB = 10$ (respecto a $\overline{P'Q'}$)

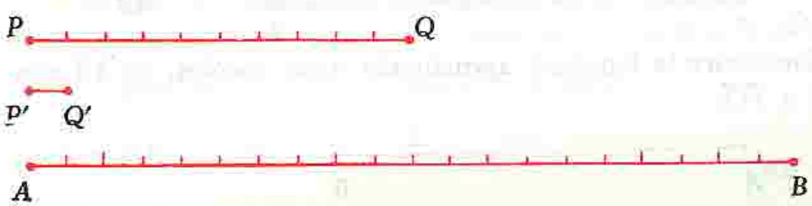
Es decir, si $PQ = 2$ (respecto a $\overline{P'Q'}$)

$AB = 5$ (respecto a $\overline{PQ}$),

entonces

$AB = 5 \times 2 = 10$ (respecto a $\overline{P'Q'}$).

El siguiente ejemplo ilustra esta misma propiedad:



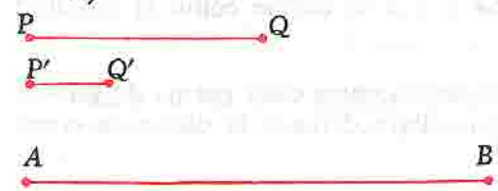
$PQ = 10$ (respecto a $\overline{P'Q'}$)

$AB = 2$ (respecto a $\overline{PQ}$)

$AB = 2 \times 10 = 20$ (respecto a $\overline{P'Q'}$).

Ejercicio 22. En los siguientes incisos proceda como en el ejemplo anterior:

a)

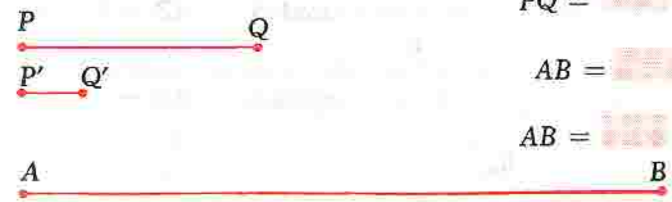


$PQ =$ (respecto a $\overline{P'Q'}$)

$AB =$ (respecto a $\overline{PQ}$)

$AB =$ (respecto a $\overline{PQ}$)

b)



$PQ =$ (respecto a $\overline{P'Q'}$)

$AB =$ (respecto a $\overline{P'Q'}$)

$AB =$ (respecto a $\overline{P'Q'}$)

c)

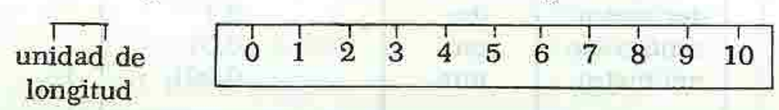
$PQ =$ (respecto a $\overline{P'Q'}$)

$AB =$ (respecto a $\overline{PQ}$)

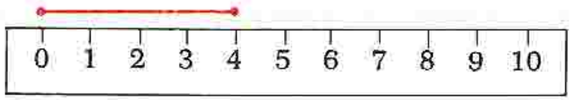
$AB =$ (respecto a $\overline{P'Q'}$)

La regla graduada

Cuando se conviene en utilizar cierta unidad fija de longitud para medir segmentos es cómodo el uso de la regla graduada. Esta consiste en una regla en la que se han marcado puntos que determinan segmentos congruentes con la unidad de longitud determinada.



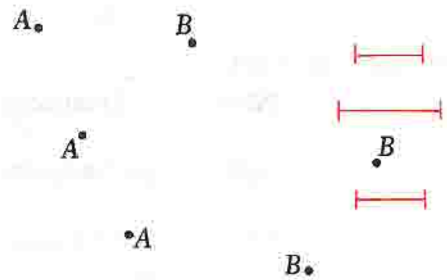
Para medir un segmento se coloca el punto marcado con 0 en un extremo del segmento a medir, y su longitud, aproximada hasta unidades, queda indicada por el último número que corresponda a un punto del segmento:



$AB = 4$

La distancia entre dos puntos A y B se define como la longitud del segmento $\overline{AB}$.

Ejercicio 23. Encuentre la distancia entre cada pareja de puntos con respecto a la unidad indicada. (Para denotar la distancia entre A y B se escribe AB.)



a) unidad $AB =$

b) unidad $AB =$

c) unidad $AB =$

3. SISTEMA METRICO DECIMAL

Por necesidades de orden práctico se han adoptado internacionalmente ciertas unidades de longitud, con respecto a las cuales se determinan las longitudes y las distancias. En casi todos los países se utiliza el sistema métrico decimal, cuyas unidades de longitud son:

Nombre	Símbolo	Equivalencia con respecto al metro
miriámetro	mam	10 000
kilómetro	km	1 000
hectómetro	hm	100
decámetro	dam	10
metro	m	1
decímetro	dm	0.1
centímetro	cm	0.01
milímetro	mm	0.001

Cuando se utilizan estas unidades, en vez de decir, por ejemplo, que "la longitud de $\overline{AB}$ es 3, con respecto a la unidad de longitud cm", se dice simplemente que "la longitud de $\overline{AB}$ es 3 cm" y se escribe $AB = 3$ cm.

Nota: Para medidas de mucha precisión se utiliza como unidad de longitud la micra, que se denota con μ y su equivalencia con respecto al milímetro es:

$$1 \text{ mm} = 1\,000\ \mu.$$

Para medidas muy grandes, como por ejemplo, para descubrir las distancias entre cuerpos celestes se utiliza el año luz. Un año luz es la distancia que recorre la luz (a 300 000 km por segundo) en un año y su equivalencia es, aproximadamente,

$$1 \text{ año luz} = 9\,460\,800\,000\,000 \text{ km}$$

(unas 63 072 veces la distancia de la Tierra al Sol).

En algunos países, además del sistema métrico decimal, se utilizan otros sistemas de medidas como, por ejemplo, el sistema inglés. Las unidades principales de longitud del sistema inglés son la pulgada, el pie, la yarda y la milla terrestre. La tabla de equivalencias entre estas unidades es:

12 pulgadas	=	1 pie
1760 yardas	=	1 milla terrestre
3 pies	=	1 yarda
2 yardas	=	1 braza

y la siguiente tabla nos da su equivalencia con respecto al metro:

1 pulgada	=	0.0254 m
1 pie	=	0.3048 m
1 yarda	=	0.9144 m
1 braza	=	1.829 m
1 milla terrestre	=	1 609 m
1 milla náutica	=	1 853 m

4. PROPIEDADES BASICAS DE LA LONGITUD

Entre las propiedades más importantes de la longitud de segmentos, podemos mencionar las siguientes:

a) *La longitud de un segmento es un número.*

b) *Segmentos congruentes tienen la misma longitud.*

c) *Si un segmento* $\overline{AB}$ *está contenido en otro* $\overline{CD}$, entonces $AB \leq CD$.

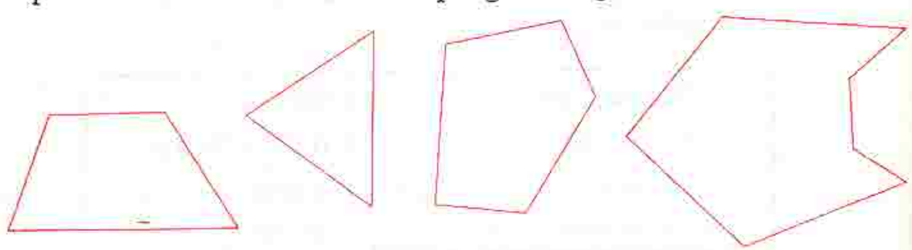
$AB \leq CD$

d) *Si C es un punto interior de un segmento AB, entonces* $AC + CB = AB$.

5. PERIMETROS

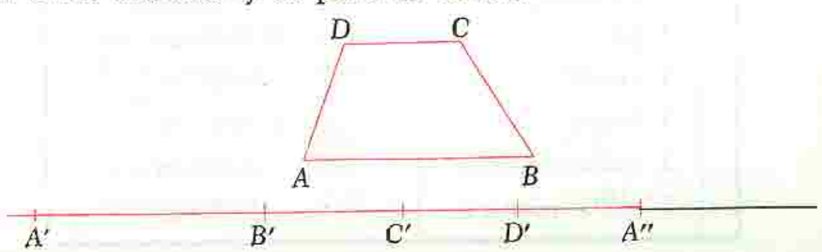
El perímetro de un polígono es, por definición, la suma de las longitudes de sus lados. Por lo tanto, el perímetro de un polígono regular de n lados es el producto de n por la longitud de un lado.

Ejercicio 24. Usando la regla graduada, encuentre en milímetros el perímetro de cada uno de los polígonos siguientes:



Para medir perímetros podemos también proceder en otra forma:

Ejemplo. Para encontrar el perímetro del polígono $ABCD$ podemos trazar una recta y un punto A' en ella



Después marcamos con un compás segmentos, uno a continuación del otro de tal modo que

$$\overline{A'B'} \cong \overline{AB} \quad \overline{B'C'} \cong \overline{BC} \quad \overline{C'D'} \cong \overline{CD} \quad \overline{D'A''} \cong \overline{DA}$$

El perímetro del polígono $ABCD$ es igual a la longitud del segmento $\overline{A'A''}$, la cual encontramos midiéndolo.

(Este procedimiento nos da, en general, resultados más correctos pues haciéndolo en la primera forma hay un error de medición en cada lado del polígono, mientras que de la segunda manera se efectúa una sola medición.)

Ejercicio 25. Utilizando el procedimiento del ejemplo anterior encuentre nuevamente los perímetros de los cuatro polígonos del último ejercicio.

Ejercicio 26. Encuentre el perímetro de cada uno de los siguientes polígonos regulares:

a) Un cuadrado que mide 13 metros de lado.

b) Un triángulo equilátero que mide 28 centímetros de lado.

c) Un pentágono regular que mide 16.8 metros de lado.

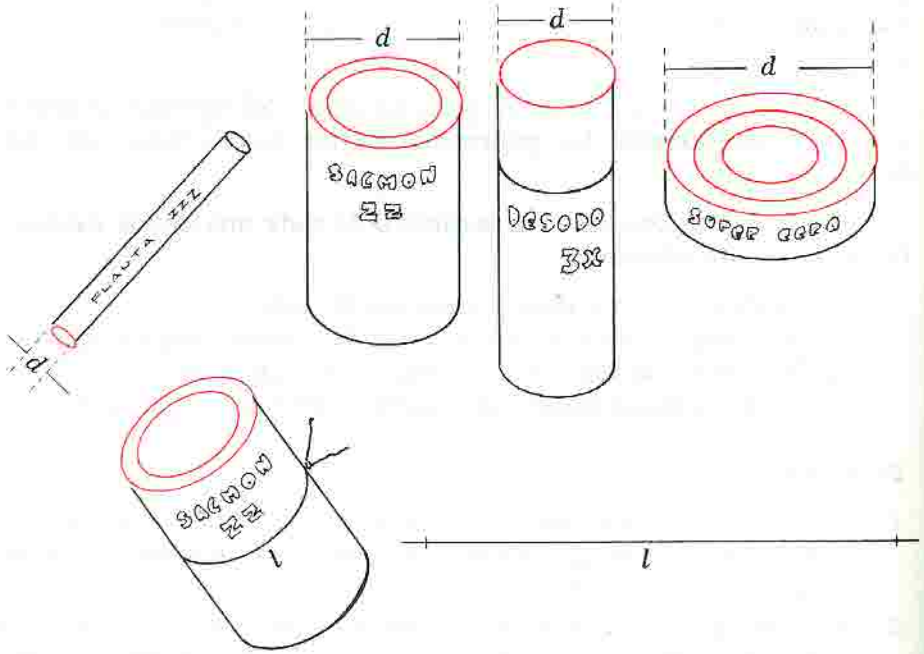
d) Un dodecágono regular que mide 8 centímetros de lado.

Problemas

1. Un patio rectangular que mide 39 metros de largo y 16 metros de ancho se va a cercar con tela de alambre. ¿Cuántos metros de este material se ocuparán?
2. Una habitación rectangular que mide 4 metros de ancho y 5 metros de largo va a decorarse con una tira de plástico alrededor. ¿Cuántos metros de esta tira se ocuparán?
3. Una puerta para baño debe protegerse con moldura de aluminio en su contorno. Si las dimensiones de esa puerta son .85 metros y 1.95 metros, ¿cuántos metros de moldura de aluminio se necesitan?
4. Para una fiesta se colocaron 8 mesas que miden 1.70 metros de largo y .80 metros de ancho. Si el contorno de cada mesa se adornó con una tira de papel crepé ¿cuántos metros de papel crepé se utilizaron?
5. Un granjero usó 400 metros de tela alambrada para cercar un terreno de forma rectangular. Si el ancho de ese terreno es de 70 metros, ¿cuánto mide de largo?

6. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

Usted ya habrá hecho este experimento alguna vez, pero no está por demás repetirlo. Tome varios objetos cilíndricos (tubos, vasos, latas, etc.). Mida el diámetro d de cada objeto y anótelo. Después enrollando un alambrito o un hilo (no elástico), mida la longitud de la circunferencia en cada caso y anótela también.



Objeto 1	2	3	4	
$l =$	$l =$	$l =$	$l =$	
$d =$	$d =$	$d =$	$d =$	
$\frac{l}{d} =$	$\frac{l}{d} =$	$\frac{l}{d} =$	$\frac{l}{d} =$	

Calcule los cocientes $\frac{l}{d}$ en cada caso y anótelos. Observe usted que en todos los casos obtuvo, aproximadamente, el mismo número. En general, en cualquier circunferencia, la razón de su longitud a su diámetro es un mismo número. A este número se le acostumbra llamar π y es, aproximadamente, 3.1 o, más exactamente 3.14 o, aún más exactamente 3.1416.

Utilizando ciertos razonamientos matemáticos se puede calcular el número π con mucha aproximación. Por ejemplo, una mejor aproximación de π es

$$3.1415826535$$

Así pues, si l es la longitud de una circunferencia de diámetro d, tenemos que

$$\frac{l}{d} = \pi, \text{ o sea, } l = \pi d$$

Si r es el radio de la circunferencia, como $d = 2r$, se tiene que

$$l = 2\pi r$$

que es la fórmula que usted conoce bien.

Ejercicio 27.

a) ¿Cuál es la longitud de una circunferencia de .60 m de radio?

b) ¿Cuál es el radio de una circunferencia de longitud 1.7 m?

Problemas

a) Suponiendo que la Tierra es esférica y que el ecuador mide 40 000 km ¿cuánto mide el radio de la Tierra?

b) Supongamos que un satélite artificial se desplaza a 210 km de la superficie de la Tierra en una órbita circular alrededor del ecuador. Tomando como radio de la Tierra el resultado obtenido en a) ¿cuál es la longitud de cada órbita?

c) ¿Cuál es la velocidad del satélite artificial de b) si tarda 2 horas en recorrer cada órbita? (Recuerde que la velocidad es el cociente de la distancia entre el tiempo.)

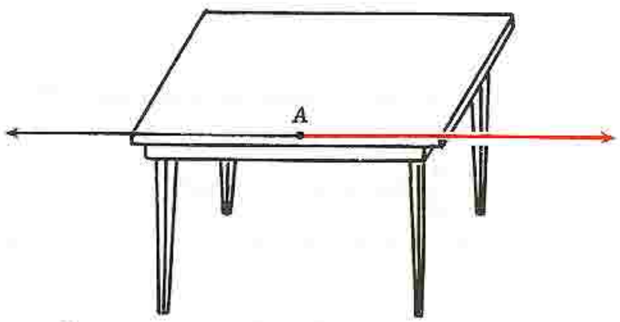
d) Un satélite artificial gira en una órbita circular de 45 600 km, alrededor del ecuador. ¿A qué distancia de la superficie terrestre se encuentra el satélite?

e) Si se colocara un alambre alrededor del ecuador de la Tierra éste mediría 40 000 km. Si colocáramos otro alambre a 10 cm del suelo también alrededor del ecuador, ¿qué tan más largo sería que el primero?

III. ANGULOS

1. RAYOS

Si observamos alguna figura que nos dé la idea de recta, podemos notar que un punto de ella divide a la recta en dos partes. Por ejemplo, en la siguiente ilustración el punto A divide la recta en dos partes:



Cada una de estas partes, junto con el punto A, recibe el nombre de semirrecta o rayo. El punto A se llama el vértice del rayo.

Una forma sencilla de denotar un rayo, es escribir $\overrightarrow{AB}$, en donde A es el vértice del rayo y B es otro punto que pertenezca al rayo:

Por ejemplo, si C es un punto sobre el rayo indicado con rojo, el rayo se denota con $\overrightarrow{AC}$.

Si sobre un rayo marcamos varios puntos además del vértice, como en la siguiente figura,

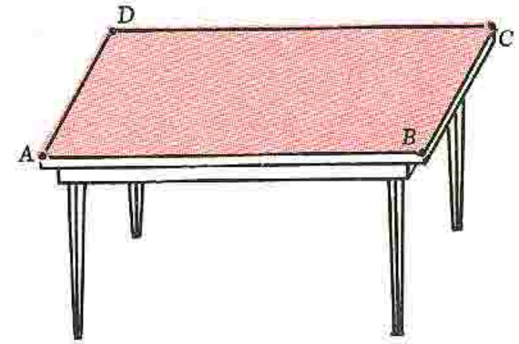
al rayo lo podemos denotar $\overrightarrow{AP}$ o bien $\overrightarrow{AQ}$.

Observemos cuidadosamente que si P y Q son dos puntos, el rayo $\overrightarrow{PQ}$ es distinto del rayo $\overrightarrow{QP}$:

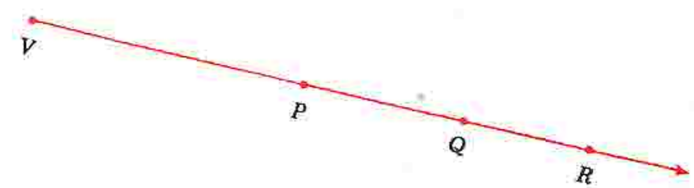
Observe que cuando escribimos $\overrightarrow{PQ}$, el vértice del rayo es el punto P y cuando escribimos $\overrightarrow{QP}$ el vértice es el punto Q.

Ejercicio 28. En la siguiente ilustración

a) ¿Cómo denotar el rayo con vértice en A y que contenga al punto B? ¿Y el de vértice B que contenga a A? Dibuje el rayo $\overrightarrow{BC}$ y el rayo $\overrightarrow{DA}$.

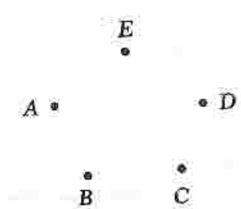


b) Denote el rayo de la siguiente figura de tres maneras distintas:



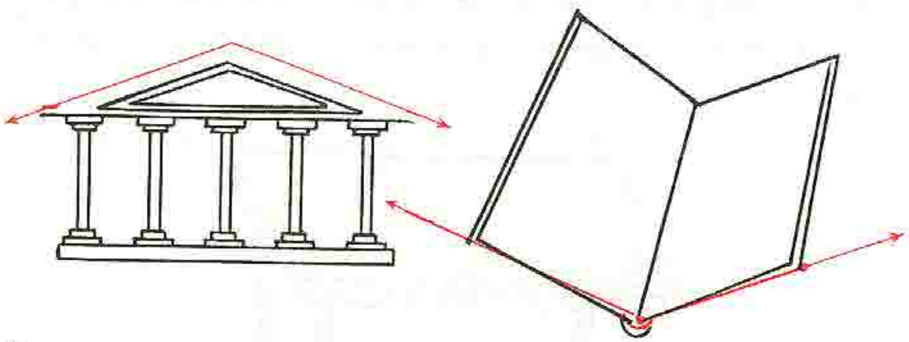
c) Dibuje los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ para los siguientes puntos:

d) Dibuje los rayos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$ para los siguientes puntos:



2. ANGULOS

Consideremos dos rayos que tengan el vértice común como en las ilustraciones siguientes:

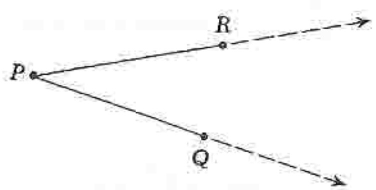


En estos casos se habla del ángulo formado por los dos rayos. Más precisamente:

*Un **ángulo** es la unión de dos rayos que tienen el mismo vértice, es decir, el conjunto de todos los puntos de los dos rayos.*

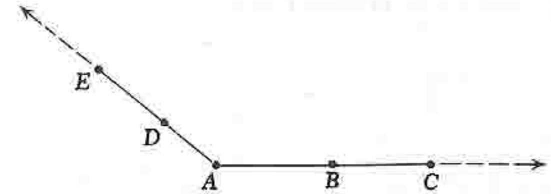
Este vértice común se llama **vértice del ángulo** y los rayos reciben el nombre de **lados del ángulo.**

Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son dos rayos cuyo vértice común es P, el ángulo formado por estos dos rayos lo denotaremos por $\angle QPR$ o también $\angle RPQ$; (léase "ángulo QPR" o "ángulo RPQ").



Siempre que denotemos de esta manera un ángulo debemos tomar en cuenta que la letra que escribimos entre las otras dos es el vértice del ángulo. Con esto la notación es precisa y no da lugar a confusiones.

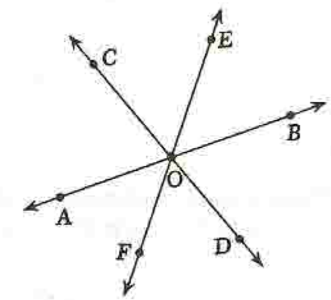
Si en los rayos de un ángulo están marcados, además del vértice, varios puntos, el ángulo se puede denotar de varias formas. Por ejemplo, el siguiente ángulo



se puede denotar con $\angle DAB$, $\angle EAB$, $\angle EAC$, etc. Por consiguiente, podemos escribir

$$\angle DAB = \angle EAB = \angle EAC = \angle CAE = \angle BAE = \ldots$$

Ejercicio 29. En la siguiente figura denote y coloree con tres colores distintos los ángulos de los incisos siguientes:



a) El ángulo formado con el rayo $\overrightarrow{OD}$ y el rayo $\overrightarrow{OB}$.

b) El ángulo que tiene por vértice el punto O y que contiene los puntos A, E.

c) El ángulo formado por el rayo $\overrightarrow{OF}$ y que contiene al punto C.

Ejercicio 30.

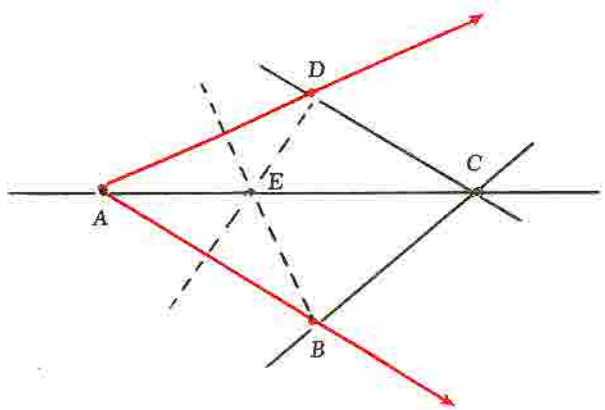
a) Trace el ángulo $\angle ABC$.

b) Trace el ángulo $\angle BAC$.

c) Trace el ángulo $\angle BCA$.

Ejercicio 31.

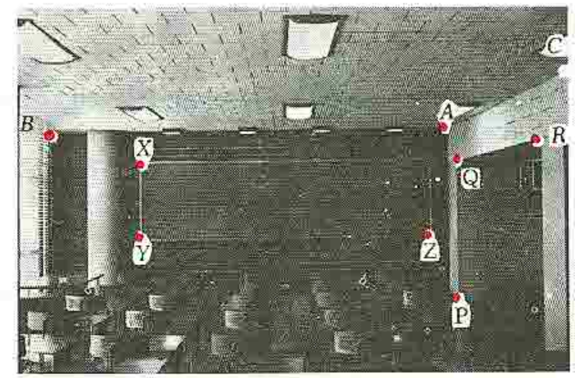
a) En la siguiente figura está indicado el ángulo $\angle DAB$. Marque en forma semejante los ángulos $\angle DCB$, $\angle AEB$ y $\angle DEC$.



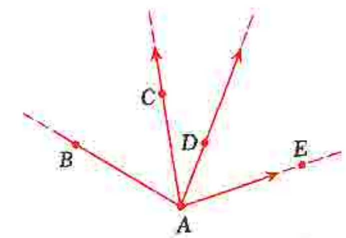
b) En la misma figura, dos de las siguientes notaciones nombran un mismo ángulo. ¿Cuáles son?

$\angle AED$, $\angle ACD$, $\angle ECD$.

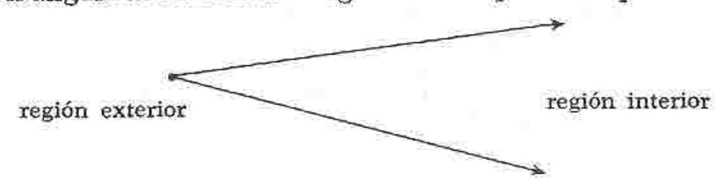
Ejercicio 32. Dibuje en la siguiente ilustración los ángulos: $\angle PQR$, $\angle XYZ$ y $\angle BAC$.



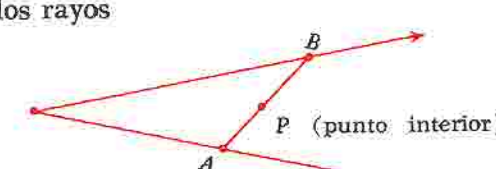
Ejercicio 33. Nombre todos los ángulos que pueda en la siguiente figura. (Se pueden nombrar 6.)



Un ángulo determina dos regiones en el plano en que se encuentra:



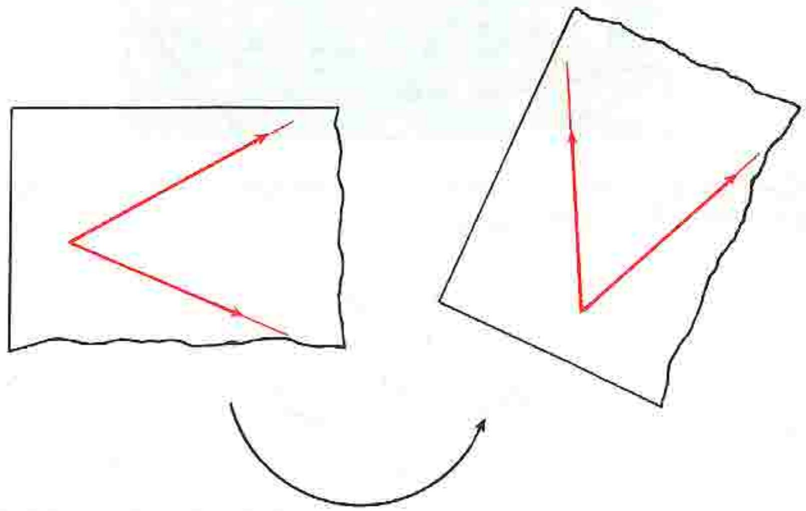
La región interior de un ángulo consta de los puntos de aquellos segmentos que tienen un extremo en un rayo y el otro extremo en el otro rayo del ángulo. De este conjunto se excluyen los puntos que están en los rayos



La región interior de un ángulo se llama también ***interior del ángulo.***

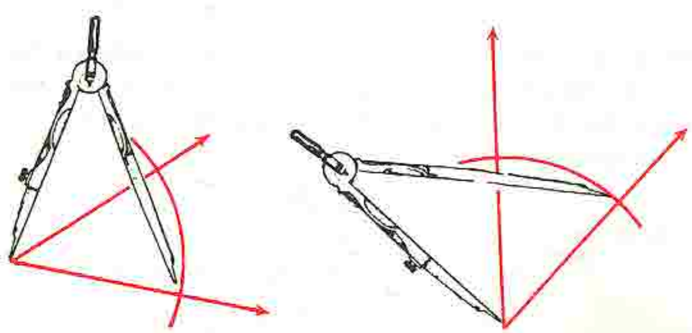
3. CONGRUENCIA DE ANGULOS

Así como hablamos de segmentos congruentes, podemos hablar también de ángulos congruentes. Podemos pensar que dos ángulos son congruentes cuando calcando uno de ellos en un papel podemos superponer la calca en el otro de manera que coincidan:

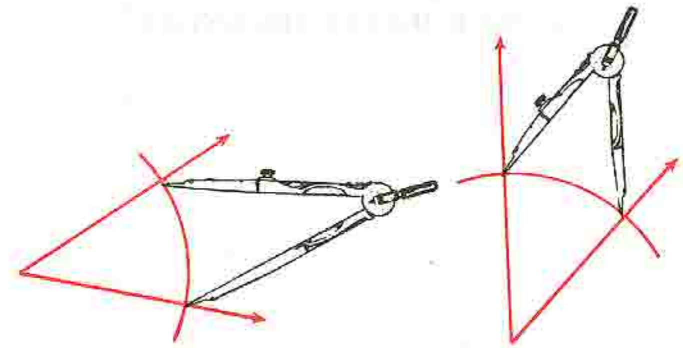


Utilizando el compás podemos comprobar si dos ángulos son congruentes, de la siguiente manera:

a) Trazamos dos arcos de circunferencia con una misma abertura apoyándonos en cada uno de los vértices.



b) Después medimos con el compás la distancia *AB* y si ésta es la misma que *A'B'* los ángulos $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ son congruentes. En caso contrario, no lo son.

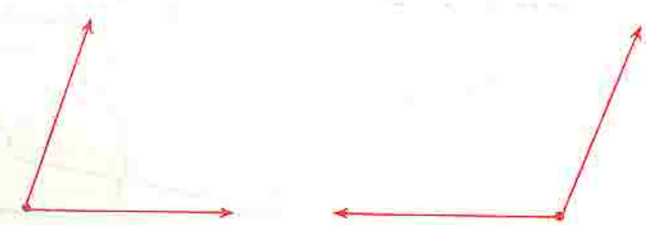


Ejercicio 34. Utilizando el compás determine si son o no congruentes los siguientes ángulos:

a)

b)

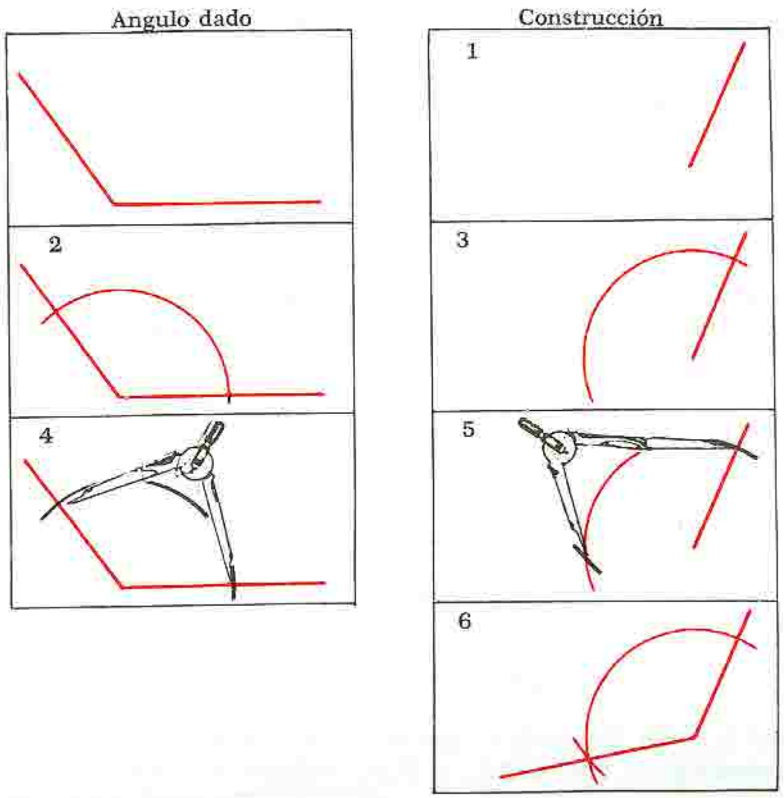
c)



d)

e)

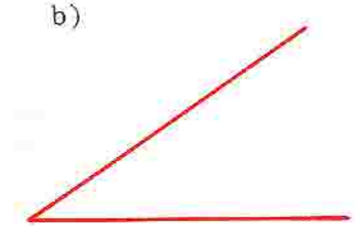
Este mismo método puede utilizarse para construir un ángulo que sea congruente con un ángulo dado. Observe la siguiente serie de ilustraciones:



Ejercicio 35. Utilizando el método descrito construya en su cuaderno, ángulos congruentes a los siguientes.

a)

b)



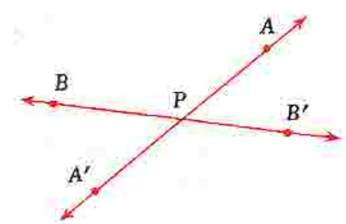
Para denotar ángulos congruentes se usa el símbolo $\cong$. Así, la expresión

$$\angle AOB \cong \angle A'O'B'$$

significa que los ángulos mencionados son congruentes. Para negar la congruencia se usa el símbolo $\ncong$.

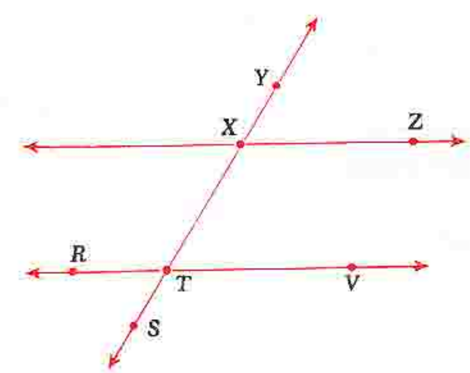
Ejercicio 36. Utilizando el compás, determine si son congruentes los siguientes ángulos:

a) $\angle APB$ ____ $\angle A'PB'$



b) $\angle YXZ$ ____ $\angle YTV$

c) $\angle RTS$ ____ $\angle YXZ$



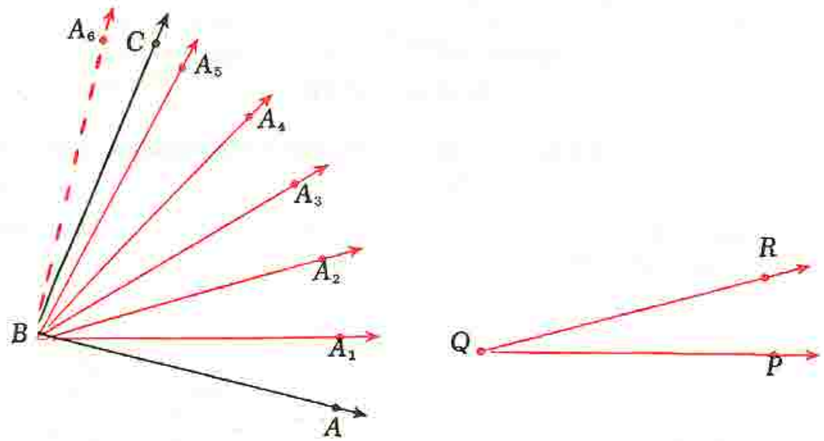
4. MEDICION DE ANGULOS

Para medir ángulos se sigue un proceso análogo al de medir segmentos.

Supongamos que queremos medir un ángulo $\angle ABC$. En primer lugar, debemos fijar un ángulo como *unidad de medida*. Si tomamos el $\angle PQR$ como unidad, trazamos los rayos $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{BA_2}$, $\overrightarrow{BA_3}$, etc., (vea la figura) de manera que los ángulos

$$\angle ABA_1,\ \angle A_1B\,A_2,\ \angle A_2B\,A_3,\ \text{etc.}$$

sean congruentes con $\angle PQR$.

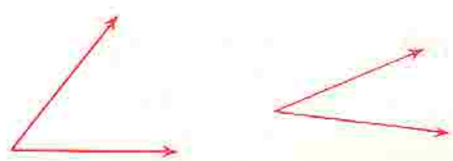


En este caso, decimos que la medida del $\angle ABC$ con respecto a la unidad $\angle PQR$ es 5.

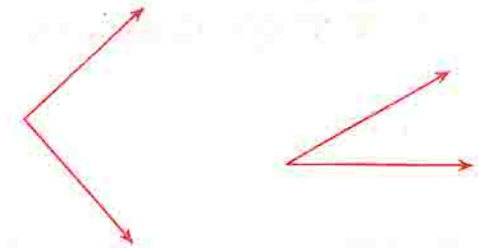
Nota Para encontrar la medida de un ángulo dado, contamos únicamente el número de ángulos congruentes con la unidad de medida utilizada, *cuyos interiores están contenidos en el interior del ángulo original.*

Ejercicio 37. Encuentre la medida de los siguientes ángulos con respecto a la unidad indicada. (Use el compás para construir ángulos congruentes con la unidad.)

a) unidad



b) unidad



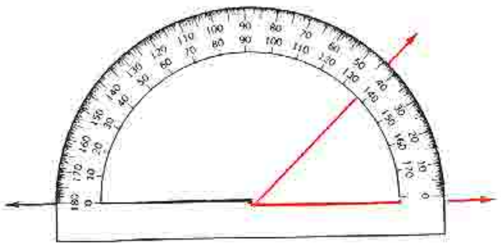
c) unidad

d) unidad

e) unidad

Grados, minutos y segundos

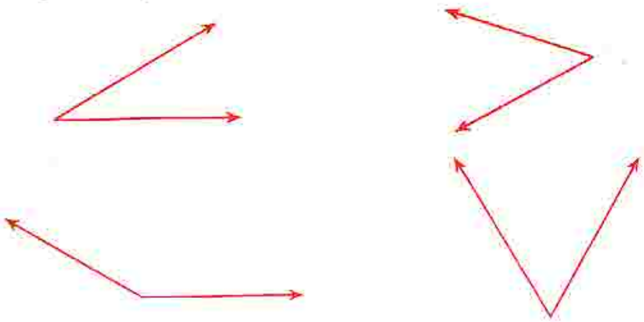
De la misma manera que para medir segmentos se han adoptado internacionalmente las unidades del sistema métrico decimal, para medir ángulos se ha convenido en utilizar grados, minutos y segundos.



Como usted recuerda, el *grado* es un ángulo, con respecto al cual, la medida de un ángulo llano es 180°.

Así como para medir segmentos nos auxiliamos de una regla graduada, para medir ángulos, en grados, utilizamos el transportador cuyo uso usted ya conoce.

Ejercicio 38. Con el transportador encuentre la medida en grados de los ángulos siguientes:



Para medir con más precisión los ángulos se utilizan las unidades llamadas minuto y segundo. Un *minuto* es un ángulo, con respecto al cual, la medida de un grado es 60 y un *segundo* es un ángulo con respecto al cual, la medida de un minuto es 60.

Si un ángulo mide, por ejemplo, 30 grados 45 minutos y 15 segundos, escribimos 30° 45′ 15″.

IV. CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS

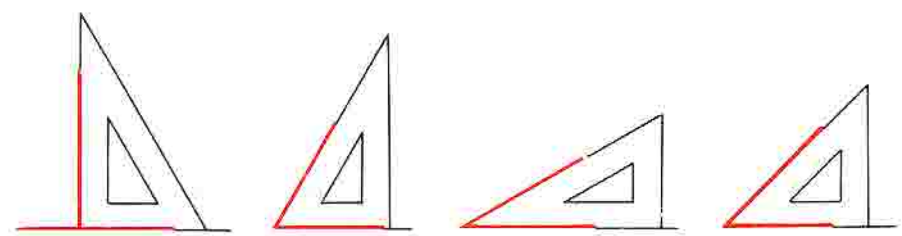
El conocimiento de algunas propiedades de los triángulos y cuadriláteros permite justificar procedimientos que se utilizan en el dibujo.

Examinemos primero los utensilios de dibujo más sencillos.

La regla. Sirve esencialmente para trazar rectas que pasen por dos puntos. Además, las reglas graduadas permiten medir longitudes de segmentos.

El compás. Según hemos visto en secciones anteriores sirve, básicamente, para trazar arcos de circunferencia, segmentos congruentes y ángulos congruentes.

Las escuadras. Sirven principalmente para trazar rectas perpendiculares. Hay escuadras que sirven para trazar ángulos de 30° y 60° y otras para trazar ángulos de 45°.



El transportador. Sirve para medir ángulos y con la ayuda de una regla, para trazar ángulos congruentes.

Ejercicio 39.

a) Con una regla graduada y una escuadra trace un cuadrado.

b) Con una regla y una escuadra trace una perpendicular a una recta dada.

c) Con una regla y un transportador trace una perpendicular a una recta dada.

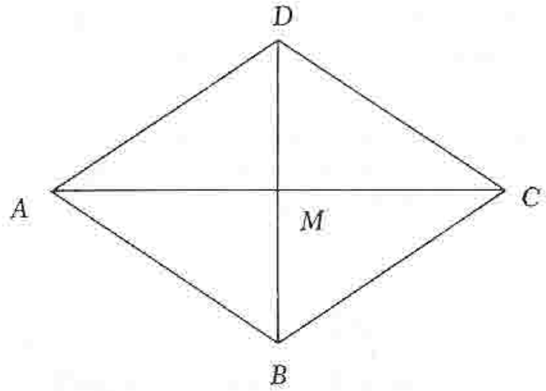
d) Trace un rombo utilizando una regla graduada y un transportador.

Después de haber hecho el ejercicio anterior habrá usted observado que los dibujos obtenidos no son muy precisos. Los errores de medición, tanto de la regla graduada como del transportador son bastante significativos.

Veremos a continuación varias construcciones básicas en las que se utiliza una regla y un compás y podremos ver que los dibujos resultan más precisos.

Pero antes observemos algo acerca de las diagonales de un rombo.

Ejercicio 40. La siguiente figura ilustra un rombo, es decir, un cuadrilátero cuyos cuatro lados son congruentes (compruébelo con un compás).



a) Compruebe que las diagonales son perpendiculares entre sí:

$\overline{AC}$ *es perpendicular a* $\overline{BD}$.

b) Compruebe que *las diagonales se intersecan en sus puntos medios*:

$$DM = MB \quad \text{y} \quad AM = MC.$$

c) Compruebe que *las diagonales son bisectrices de los ángulos de los vértices del rombo*:

$\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$

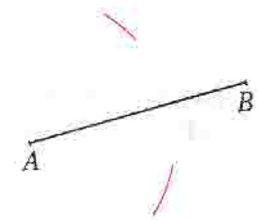
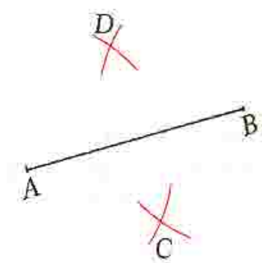
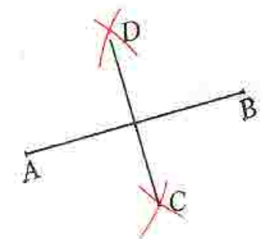
$\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle C$

$\overrightarrow{BD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle B$

$\overrightarrow{DB}$ es la bisectriz del ángulo $\angle D$.

Las propiedades a), b) y c) que se observaron en el ejercicio anterior son válidas en cualquier rombo. (Esto se demostrará en cursos posteriores.) Aquí aplicaremos esta propiedad para justificar varias construcciones geométricas en las que se utilizan únicamente la regla y el compás.

1. ENCONTRAR EL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Consideremos el segmento $\overline{AB}$. 	Con una abertura conveniente del compás, y apoyándolo en A, trazamos dos arcos. 
Con la misma abertura del compás, y apoyándolo en B, trazamos otros dos arcos que intersequen a los anteriores. 	Unimos los puntos C y D obtenidos. La intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ nos da el punto M. 

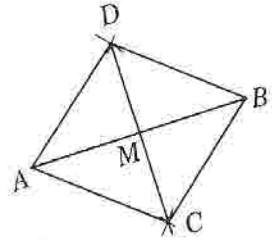
Afirmamos que

El punto M, obtenido con ese procedimiento, es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Demostración. Puesto que los cuatro arcos los hemos marcado con una misma abertura del compás, resulta que

$$AD = DB = BC = CA.$$

Por lo tanto, al unir los puntos A, B, C y D, se forma un rombo.

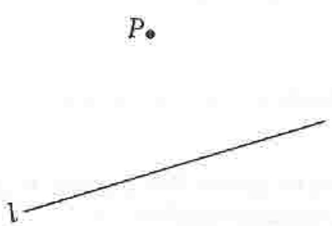
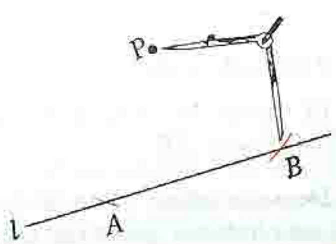


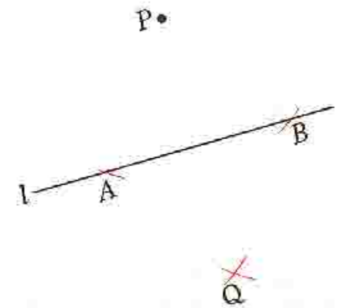
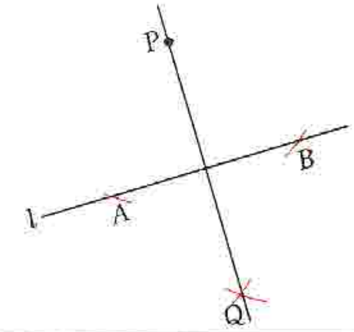
Puesto que las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio M *es el punto medio de* $\overline{AB}$. (Que es lo que queríamos demostrar.)

2. TRAZAR UNA PERPENDICULAR QUE PASE POR EL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Repetimos exactamente la construcción anterior y la recta $\overleftrightarrow{CD}$ resulta perpendicular al segmento $\overline{AB}$. (Esto es así porque las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.)

3. POR UN PUNTO P, QUE NO ESTE EN UNA RECTA *l*, TRAZAR UNA PERPENDICULAR a *l*

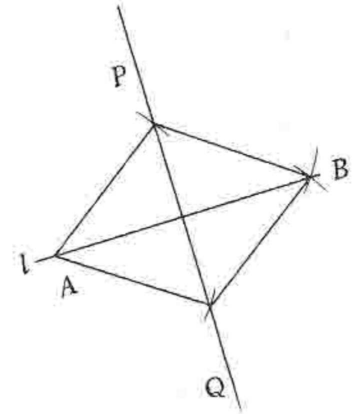
Consideremos el punto P y la recta l. 	Apoyando el compás en P, y con una misma abertura, trazamos dos arcos que intersequen a l. Obtenemos dos puntos A y B. 

Apoyando el compás primero en A y después en B, y con la misma abertura que antes, trazamos dos arcos que se intersequen. Obtenemos el punto Q. 	Trazamos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$. 

Afirmamos que

La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ *trazada es perpendicular a* l.

Demostración. El cuadrilátero $AQBP$ obtenido al trazar los segmentos $\overline{AQ}$, $\overline{QB}$, $\overline{BP}$ y $\overline{PA}$ es un rombo. (Pues en los pasos 2 y 3 hemos usado la misma abertura del compás.)



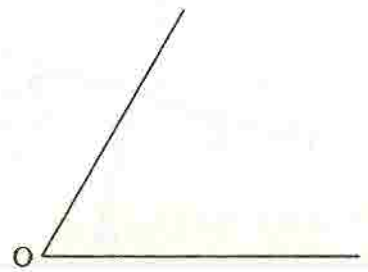
Puesto que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí, $\overline{PQ}$ es perpendicular a l. (Que es lo que queríamos demostrar.)

4. TRAZAR LA BISECTRIZ DE UN ANGULO DADO

El trazado de bisectrices mediante el uso del transportador no es muy preciso. Conviene que aprendamos a trazar bisectrices utilizando un compás y una regla. En este método se aplica una propiedad de las diagonales de los rombos.

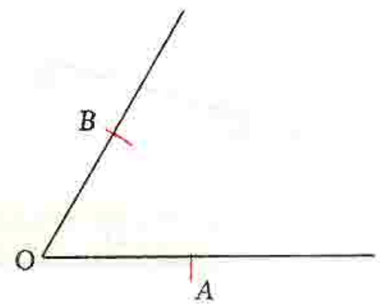
Observe la siguiente serie de ilustraciones.

1



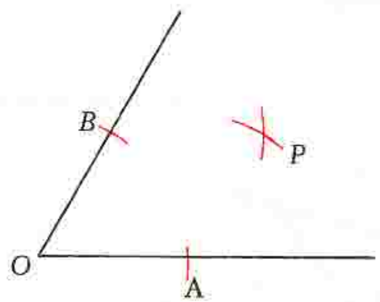
Angulo dado.

2



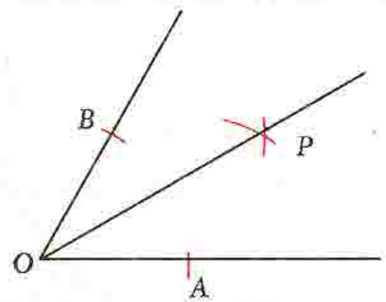
Apoyando el compás en el vértice O, trazamos dos arcos con una misma abertura. Obtenemos los puntos A y B.

3



Con la misma abertura del compás que en 2, marcamos dos arcos que se intersequen, apoyando el compás primero en A y después en B. Obtenemos un punto P.

4

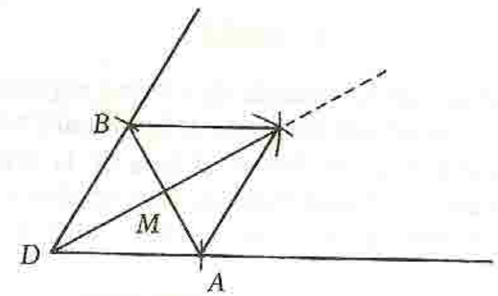


Trazamos la semirrecta $\overrightarrow{OP}$.

Aseguramos que:

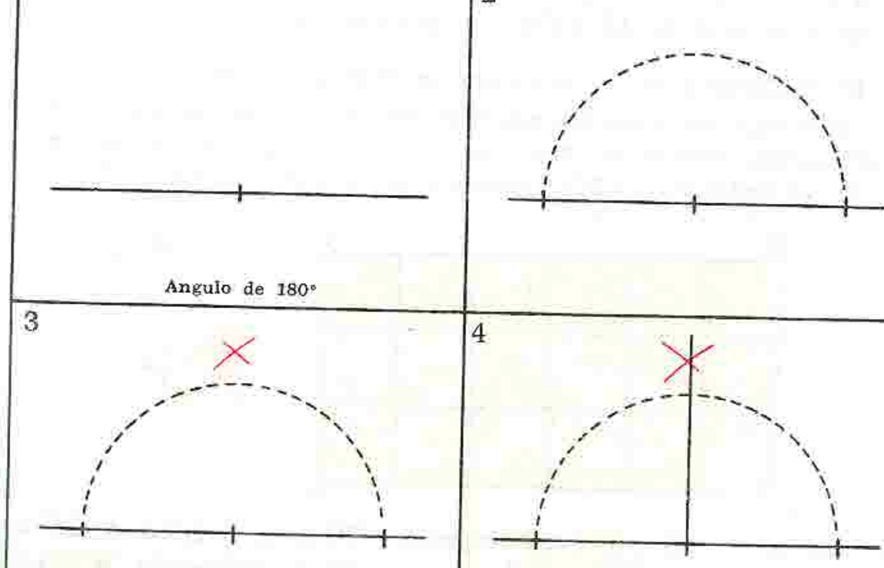
La semirrecta OP así obtenida es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$ dado.

En efecto, si trazamos los segmentos AP y BP, obtenemos un rombo $OAPB$, pues los cuatro lados los hemos marcado con la misma



abertura del compás y las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos de los vértices.

Este método, aplicado a un ángulo llano (180°) permite trazar con regla y compás ángulos rectos (90°) (y, por lo tanto, rectas perpendiculares). Observe la siguiente serie de ilustraciones:



1

Angulo de 180°

2

3

4

Obtenemos dos ángulos rectos

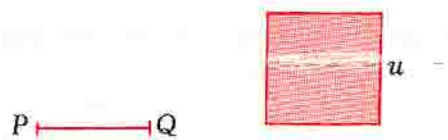
Podemos también dibujar con regla y compás ángulos de 45° trazando la bisectriz de un ángulo recto. Hágalo.

V. AREA DE REGIONES PLANAS. VOLUMEN

1. AREA

Trataremos ahora de la medida de ciertas regiones en el plano. A la medida de una región de un plano se le llamará su *área*.

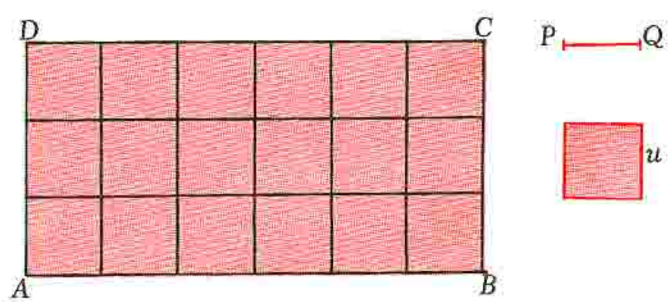
Veremos primero cómo se define el área de la región interior de un rectángulo. Para ello consideremos una unidad de longitud $\overline{PQ}$ y un cuadrado, que denotaremos con u, cuyos lados sean congruentes con $\overline{PQ}$.



El área de la región interior de un rectángulo ABCD, con respecto a la unidad u, es el producto $AB \times CD$, en donde AB y CD son las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ con respecto a $\overline{PQ}$.

El cuadrado u es, en este caso, la *unidad de área*.

En el siguiente ejemplo podemos ver la relación que existe entre la definición anterior de área y la idea intuitiva que de ella tenemos. En el rectángulo $ABCD$ representado a continuación.

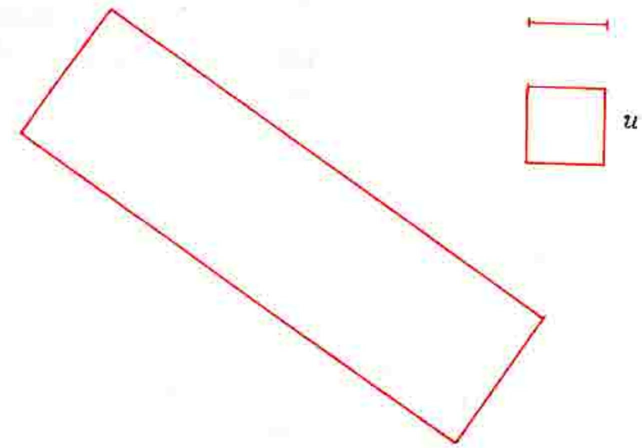


la longitud de AB es 6 (con respecto a $\overline{PQ}$); la longitud de BC es 3 (con respecto a $\overline{PQ}$); su área es, según la definición, $6 \times 3 = 18$ (con respecto a u) y esto, por otro lado, es el número de cuadrados, congruentes con u, marcados en la figura.

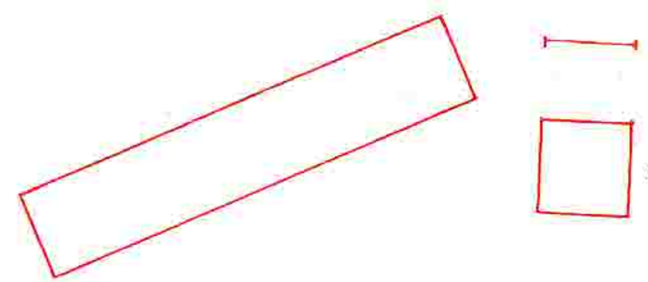
Para abreviar, en lugar de hablar del *área de la región interior de un rectángulo*, diremos simplemente el *área de un rectángulo*. Seguiremos también esta convención para triángulos, cuadriláteros y polígonos en general.

Ejercicio 42. Encuentre el área de los siguientes rectángulos con respecto a la unidad de área indicada.

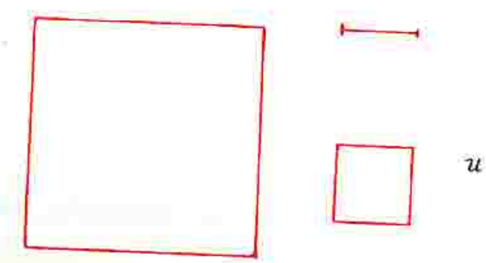
a)



b)



c)



En el sistema métrico decimal, las unidades de área son:

Nombre	Símbolo	Equivalencia en metros cuadrados
miriámetro cuadrado	Mm^2	100 000 000
kilómetro cuadrado	Km^2	1 000 000
hectómetro cuadrado	Hm^2	10 000
decámetro cuadrado	Dm^2	100
metro cuadrado	m^2	1
decímetro cuadrado	dm^2	.01
centímetro cuadrado	cm^2	.000 1
milímetro cuadrado	mm^2	.000 00 1

En la agricultura se emplean algunas de estas unidades con nombres distintos. Estas son:

1 centiárea = 1 m^2
1 área = 1 Dm^2 = 100 m^2
1 hectárea = 1 Hm^2 = 10 000 m^2

2. PROPIEDADES BASICAS DEL AREA

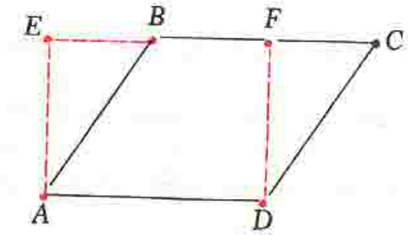
Hasta ahora hemos definido únicamente el área de la región interior de un rectángulo. Más adelante calcularemos el área de regiones interiores de algunos otros polígonos. Para eso es necesario conocer las siguientes propiedades básicas del área:

a) *El área de una región plana es un número.*
b) *Dos regiones congruentes tienen la misma área.*
c) *El área de una región es mayor o igual que el área de cualquier región que contenga.*
d) *El área de la unión de dos regiones ajenas es la suma de las áreas de estas regiones.*

3. AREA DE ALGUNAS REGIONES

Area de un paralelogramo

Para encontrar el área de un paralelogramo podemos proceder como sigue:



Marcamos puntos E y F en $\overleftrightarrow{BC}$, de tal modo que $AEFD$ sea un rectángulo. En cursos posteriores se demostrará que $\triangle AEB \cong \triangle DFC$.

1) Area $ABCD$ = área $ABFD$ + área DFC [por la propiedad básica d) del área].
2) Area AEB = área DFC [por la propiedad básica b) del área].

Por lo tanto,

3) Area $ABCD$ = área $ABFD$ + área $\triangle AEB$.
4) Area $ABCD$ = área $AEFD$ [por 3 y la propiedad básica d].

Ya que el área de $AEFD$ es $AD \times DF$ se tiene, finalmente, que:

$$\text{Area } ABCD = AD \times DF$$

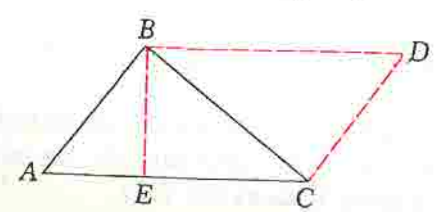
Usualmente al representar un paralelogramo como lo hacemos en la figura anterior, al segmento $\overline{AD}$ se le llama *base* y al segmento $\overline{DF}$ altura. Si denotamos ahora con b la longitud de la base y con h la longitud de la altura, la fórmula anterior se escribirá

$$A = bh,$$

donde A significa área del paralelogramo.

Area del triángulo

Para encontrar el área de un triángulo procedemos como sigue:



Trazamos por B una recta paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ y por C una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Sea D el punto de intersección de estas rectas.

Ya que $ABCD$ es un paralelogramo, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (por una propiedad del paralelogramo mencionada anteriormente).

Por lo tanto,

$$\triangle ABC \cong \triangle BCD.$$

Ahora bien:

1) Area $ABDC$ = área $\triangle ABC$ + área $\triangle BCD$ [propiedad básica d) del área].

2) Area $\triangle ABC$ = área $\triangle BCD$ [propiedad básica b) del área].

Por lo tanto,

3) Area $ABDC = 2 \times$ área $\triangle ABC$.

Por consiguiente,

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \text{área } ABDC.$$

y como área $ABDC = AC \times BE$, obtenemos finalmente:

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2}(AC \times BE).$$

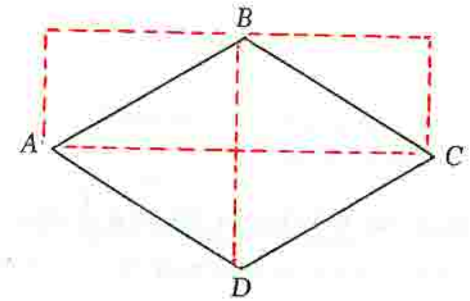
Si, como antes, denotamos con b y h las longitudes de la base y la altura respectivamente, la fórmula se escribirá:

$$A = \frac{1}{2}bh,$$

donde A significa el área del triángulo.

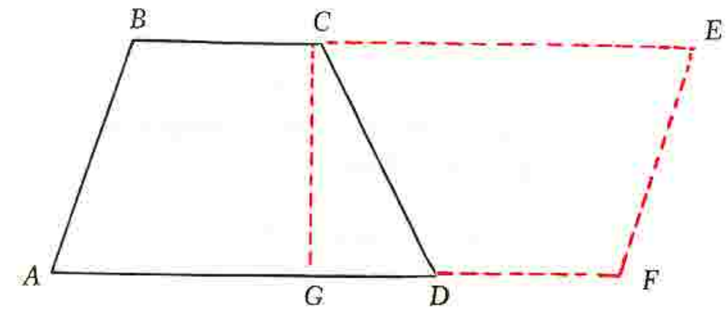
Las siguientes figuras muestran cómo, en forma análoga, se puede establecer la fórmula para cada una de las regiones ilustradas utilizando las propiedades básicas del área.

Area del rombo



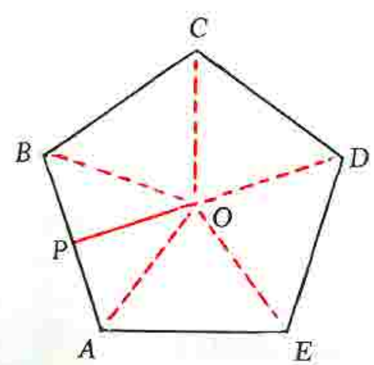
$$A = \frac{1}{2}(AC \times BD)$$

Area del trapecio



$$A = \frac{1}{2}(AD + BC) \times CG$$

Area del pentágono regular



$$A = \frac{5}{2}(AB \times OP)$$

El segmento OP, perpendicular a AB, recibe el nombre de apotema.

Area de un polígono regular

En forma semejante a la que se siguió para encontrar la fórmula del pentágono anterior, podemos llegar a que:

El área de un polígono regular de n lados es igual a $\frac{1}{2}\,anl$, en donde l es la longitud de un lado y a es la longitud del apotema. (Obsérvese también que nl es el perímetro.)

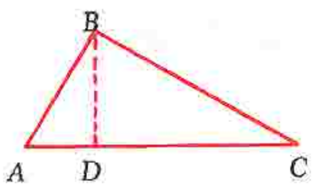
Para terminar, anotaremos una fórmula ya conocida por usted cuya justificación se dará en cursos posteriores. Esta fórmula es:

$$A = \pi r^2$$

donde A significa el área de un círculo, r es la medida de su radio y π es aproximadamente igual a 3.1416.

Ejercicio 43. Aplicando las fórmulas y las propiedades básicas del área, calcule el área de las siguientes regiones:

a)

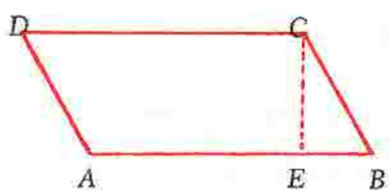


$AC = 3.5$ cm

$BD = 1.7$ cm

Area $\triangle ABC =$

b)

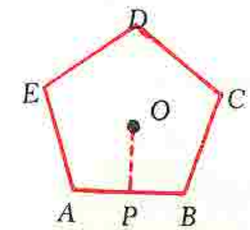


$AB = 18.5$ m

$CE = 7.8$ m

Area $ABCD =$

c)

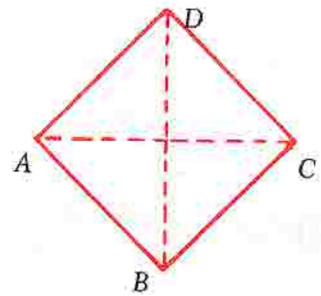


$AB = 17.45$ mm

$OP = 12$ mm

Area del pentágono regular $ABCDE =$

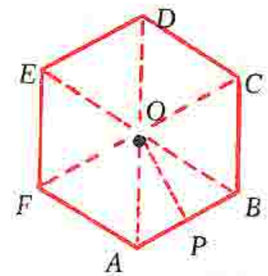
d)



$AC = BD = 17$ m

Area del cuadrado $ABCD =$

e)

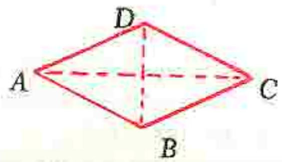


$AB = 3$ cm

$OP = 2.6$ cm

Area del exágono regular $ABCDEF =$

f)

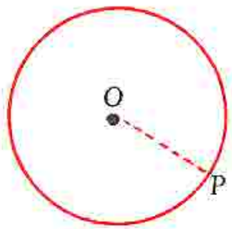


$AC = 5.61$ m

$BD = 2.73$ m

Area del rombo $ABCD =$

g)

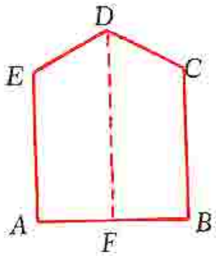


$OP = 7$ m

Area del círculo =

Ejercicio 44. Encuentre el área de las siguientes regiones:

a)

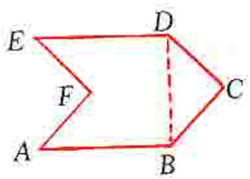


$AB = BC = 4$ m

$DF = 5$ m

Area del polígono $ABCDE$ =

b)



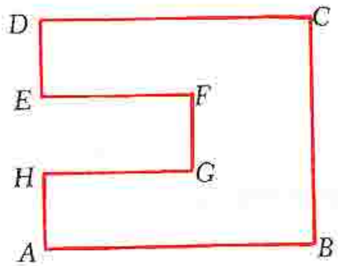
$AB = ED = 7$ m

$EF = FA = BC = CD$

$BD = 6$ m

Area del polígono $ABCDEF$ =

c)



$AB = CD = 18$ m $\quad AH = FG = ED$

$BC = 15$ m

$EF = HG = 10$ m

Area del polígono $ABCDEFGH$ =

Problemas

1. El perímetro de un terreno con forma de trapecio es de 325 m; los lados no paralelos miden 67 y 54 m. La distancia entre los lados paralelos es de 40 m. ¿Cuál es el área del terreno?

2. En un terreno rectangular de 25 hectáreas uno de los lados mide 400 m. ¿Cuántos mide el otro lado?

3. Dibuje dos rectángulos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ con los siguientes datos: $AB = BC = 2$ cm, $A'B' = 1$ cm, $B'C' = 4$ cm. Encuentre sus áreas y compárelas.

4. ¿Cuántos mosaicos de 25 cm por 25 cm se necesitan para cubrir un piso de 6.25 m por 4.50 m?

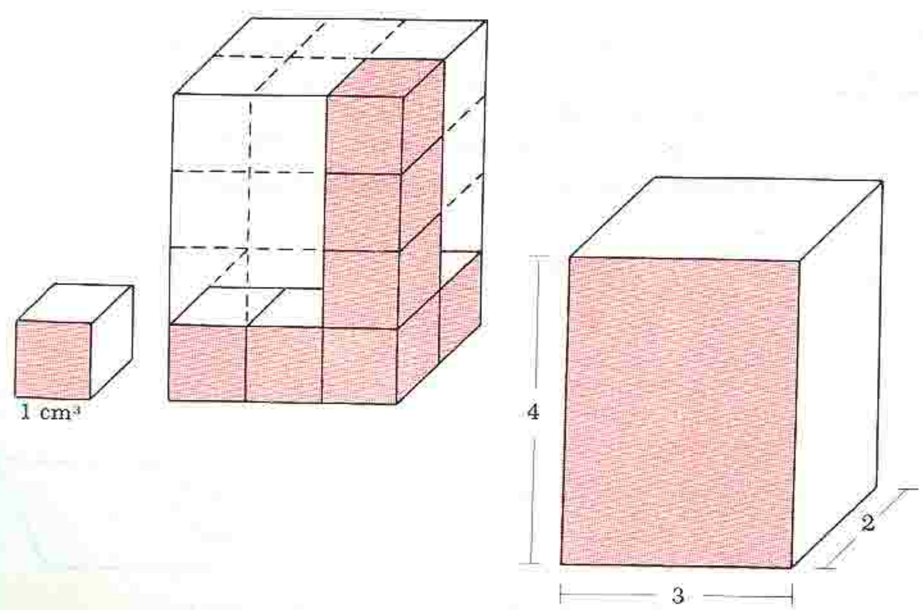
5. ¿Cuál es el área de un terreno rectangular, si uno de sus lados mide 180 m y su perímetro 600 m?

6. ¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar una pared de 6.25 m de largo por 4.00 m de altura, si en la pared hay dos ventanas de 2.00 m por 1.25 m y si tomamos en cuenta que con un litro de pintura se cubren 10 m²?

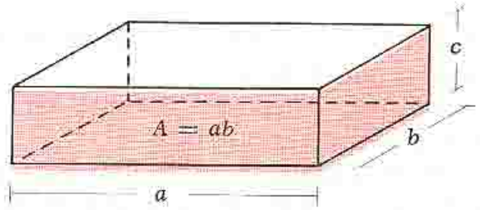
7. En un salón de 5.10 m por 6.30 m hay un tapete circular cuyo radio es de 2 m. ¿Cuál es el área de la región no cubierta por el tapete?

4. MEDIDA DE VOLUMENES

Si las aristas de un prisma rectangular, como el que se muestra, miden 2, 3 y 4 cm, respectivamente, entonces su volumen es $2 \times 3 \times 4 = 24$ cm³. Esto corresponde a la idea de comparar un cubo de 1 cm³ (es decir, de 1 cm × 1 cm × 1 cm) con el prisma dado. Observe la ilustración.



En general, el volumen de un prisma rectangular cuyas aristas respectivas midan **a cm, b cm y c cm es abc cm^3.**



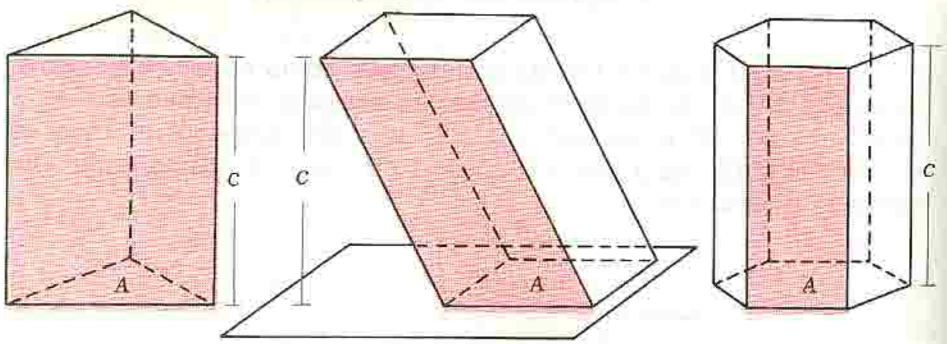
$V = a\ b\ c$

Ya que ab cm^2 es el área de la base, podemos decir que el volumen de estos prismas es

$$V = A \cdot c$$

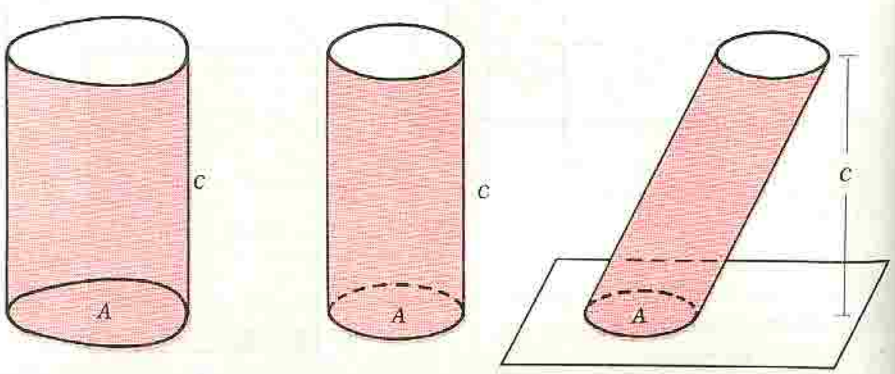
en donde $A = ab$ es el área de la base y c es la altura.

Esta fórmula es cierta para cualquier tipo de prismas (aquí no hacemos la demostración):



$V = Ac$ (A = área de la base, c = altura).

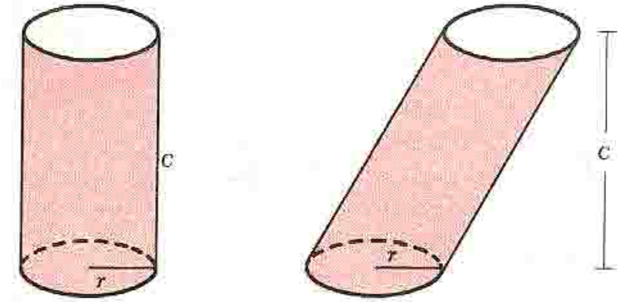
Esta misma fórmula vale para cilindros (circulares o no):



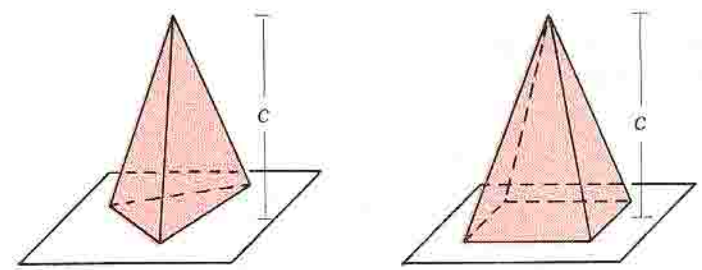
$V = Ac$ (A = área de la base, c = altura).

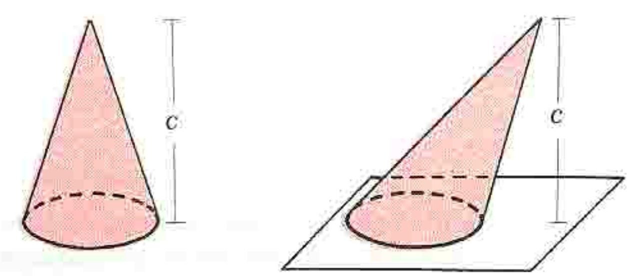
Si la base de un cilindro es un círculo de radio r y recordamos que el área de un círculo es $A = \pi r^2$, entonces el volumen de un cilindro circular (recto o no) es

$$V = \pi r^2 c.$$



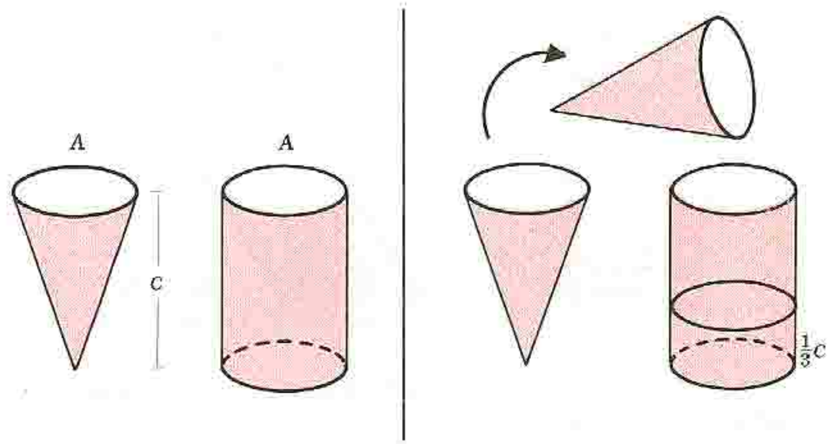
En cursos posteriores se demuestra que para pirámides y conos el volumen se encuentra así:



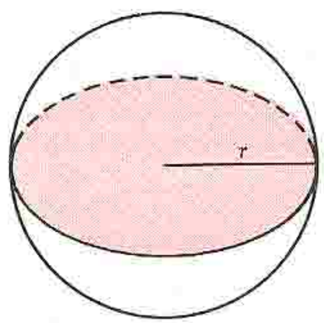


$V = \frac{1}{3}\ Ac$ (A = área de la base, c = altura).

De esto podemos darnos cuenta con un experimento. Si llenamos con arena o agua un vaso cónico y vertemos su contenido en una lata o un vaso cilíndrico que tenga la misma base y la misma altura que el vaso cónico vemos que se alcanza ⅓ de la altura. Es decir, con 3 vasos cónicos llenamos el vaso cilíndrico.



También en cursos posteriores se demuestra que el volumen de una esfera de radio r es



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Como en el caso de la medida de segmentos y en el de la medida de ángulos, la unidad de medida se puede tomar arbitrariamente. Sin embargo, las más usuales son las del sistema métrico decimal en el que la unidad es el m^3.

Nombre	Símbolo	Equivalente en metros cúbicos
kilómetro cúbico	km^3	$1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$
hectómetro cúbico	hm^3	$100^3 = 1\,000\,000$
decámetro cúbico	dam^3	$10^3 = 1\,000$
metro cúbico	m^3	1
decímetro cúbico	dm^3	$.1^3 = .001$
centímetro cúbico	cm^3	$.01^3 = .000001$
milímetro cúbico	mm^3	$.001^3 = .000000001$

NOTA: Se dice que un recipiente tiene 1 litro de capacidad si contiene un dm^3. Así, por ejemplo, se habla de que un tinaco tiene capacidad para 1 000 litros cuando ese tinaco contiene 1 m^3.

GIROLAMO CARDANO

Físico y matemático italiano del siglo XVI a quien se le atribuye el primer trabajo sobre Probabilidad en su *liber de ludo aleae* (manual para tirar los dados)

OCTAVA UNIDAD

REGISTROS ESTADISTICOS Y PROBABILIDAD

Posiblemente la estadística tuvo su origen en las civilizaciones más antiguas cuando el hombre empezó a registrar y analizar datos numéricos. La teoría de la probabilidad se inició con un problema sobre el juego de dados. Actualmente estadística y probabilidad se auxilian mutuamente, y juegan un papel muy importante en campos como la Economía, la Biología, la Física, la Comunicación, la Sociología, etc.

I REGISTROS ESTADISTICOS

1. CLASIFICACION DE DATOS

Cuando alguna persona dispone de un conjunto de datos, generalmente puede apreciarlos mejor si los clasifica y, mejor aún, si los representa gráficamente.

Por ejemplo, supongamos que disponemos de los pesos en kilogramos de 50 alumnos de un grupo de secundaria.

53, 57, 57, 61, 51, 64, 41, 44, 53, 54, 51, 46, 55, 55, 35, 47, 48, 53, 56, 62, 50, 59, 69, 48, 45, 53, 61, 55, 52, 48, 42, 56, 62, 65, 51, 47, 51, 54, 60, 56, 60, 46, 60, 70, 67, 49, 37, 47, 42, 50.

Para facilitar la clasificación ordenamos estos datos de menor a mayor. Esto es,

35, 37, 41, 42, 42, 44, 45, 46, 46, 47, 47, 47, 48, 48, 48, 49, 50, 50, 51, 51, 51, 51, 52, 53, 53, 53, 53, 54, 54, 55, 55, 55, 56, 56, 56, 57, 57, 59, 60, 60, 60, 61, 61, 62, 62, 64, 65, 67, 69, 70.

Clasifiquemos ahora estos datos observando cuántos pesos hay entre 35 y 40; cuántos pesos hay entre 41 y 45; cuántos entre 46 y 50; etc.

Esta clasificación se aprecia mejor en una tabla como la siguiente.

Intervalo	Frecuencia
35–40	2
41–45	5
46–50	
51–55	
56–60	
61–65	
66–70	

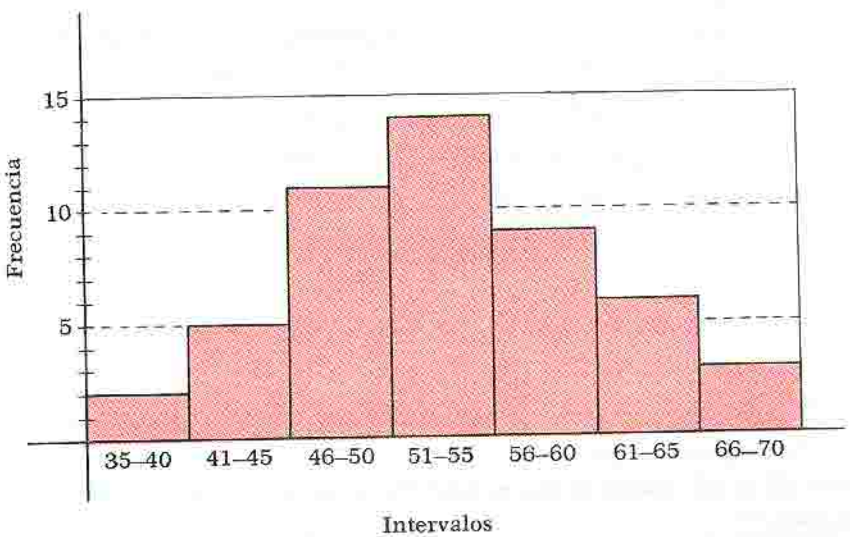
Tablas como ésta reciben el nombre de *tablas de frecuencias*.

Observe usted que hay dos pesos entre 35 y 40 kilogramos inclusive, por eso, a continuación del intervalo 35-40 escribimos 2. Hay 5 pesos entre 41 y 45 kilogramos inclusive. Por eso, a continuación del intervalo 41-45 escribimos 5.

Ejercicio 1. Complete la tabla anterior.

2. DIAGRAMAS DE FRECUENCIAS

Con la tabla de frecuencias podemos construir una gráfica disponiendo los intervalos en un eje horizontal y las frecuencias en un eje vertical, tal como hacemos a continuación:



Gráficas como ésta reciben el nombre de **diagramas de frecuencias.**

Observe usted que en el diagrama se aprecia fácilmente que hay pocos alumnos con un peso menor de 46 kilogramos. También observamos que hay pocos alumnos con un peso mayor de 60 kilogramos y que la mayoría de los alumnos tiene un peso entre 46 y 60 kilogramos.

Ejercicio 2. Las estaturas en cm de 50 alumnos son las siguientes:

145, 146, 147, 149, 150, 151, 151, 152, 153, 153,

155, 155, 155, 156, 156, 156, 157, 157, 159, 159,

159, 161, 161, 161, 162, 163, 163, 163, 163, 164,

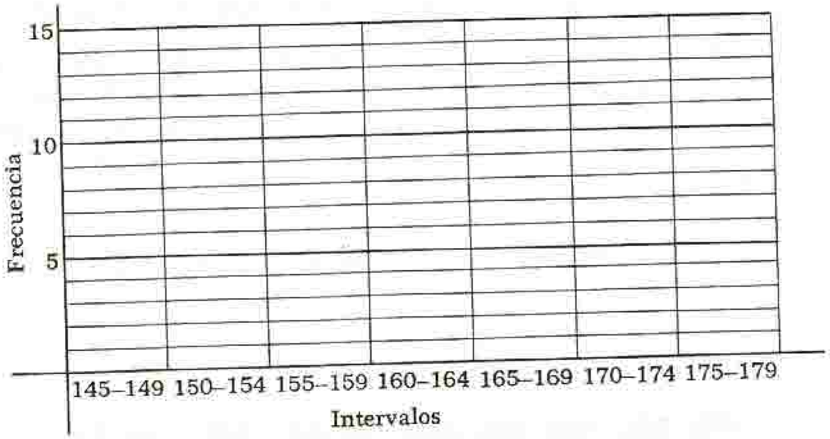
164, 164, 164- 165, 167, 167, 169, 169, 169,

169, 169, 169, 170, 170, 171, 174, 174, 175, 177.

a) Clasifique estos datos usando la siguiente tabla de frecuencias.

Intervalo	Frecuencia
145–149	
150–154	
155–159	
160–164	
165–169	
170–174	
175–179	

b) Con los datos de la tabla complete el siguiente diagrama de frecuencias.



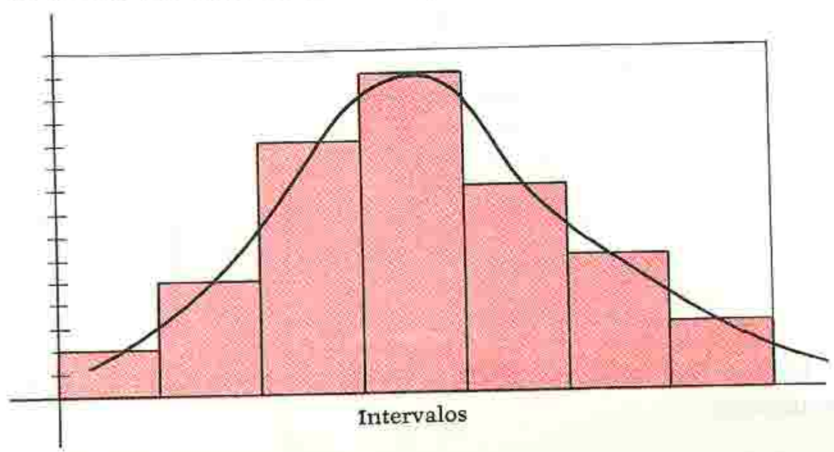
Ejercicio 3. Con los pesos de los alumnos de su grupo, elabore una tabla de frecuencias y el correspondiente diagrama de frecuencias.

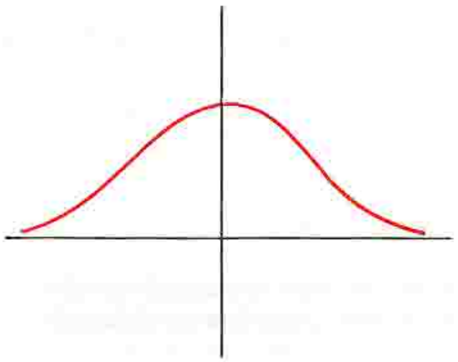
Ejercicio 4. Con las estaturas de los alumnos de su grupo, elabore una tabla de frecuencias y el correspondiente diagrama de frecuencias.

3. LA CURVA DE GAUSS

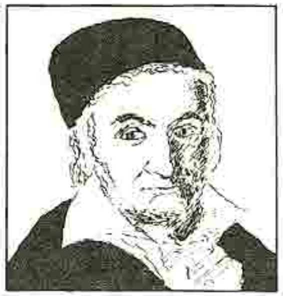
Si en un diagrama de frecuencias trazamos una curva que pase por los puntos medios de la parte superior de cada rectángulo, obtenemos lo que se llama una curva de frecuencias.

Por ejemplo, para el caso del diagrama de frecuencias de los pesos de los 50 alumnos resulta la siguiente curva de frecuencias.





Curva normal o curva de Gauss



Carlos Federico Gauss

Esta curva de frecuencias y las de otros muchos fenómenos son **muy parecidas a la llamada curva normal o curva de Gauss.** (Llamada así porque fue el célebre matemático alemán Carlos Federico Gauss uno de los primeros en estudiarla.)

Es conveniente señalar que la curva de frecuencias de muchos fenómenos (en particular, de los fenómenos económicos) rara vez se parecen a la curva normal.

II PROBABILIDAD

1. EXPERIMENTOS DETERMINISTICOS Y EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Un experimento determinístico es aquél en que podemos predecir el resultado. Por ejemplo, si acercamos un pedazo de papel a una flama, el papel arderá. Y siempre que repitamos el experimento el resultado será el mismo.

En cambio, un experimento aleatorio o al azar es aquél en que no podemos predecir el resultado. Por ejemplo, al lanzar un dado de seis caras no sabemos cuál será el resultado, pues en la cara superior puede quedar cualquiera de los números 1, 2, 3, 4, 5, o 6.

Otros ejemplos de situaciones al azar son:

a) Contar el número de personas que visitan un museo. No se puede predecir cuántas personas serán.

b) De la producción diaria de una fábrica de licuadoras, contar las defectuosas. No se puede predecir cuántas saldrán defectuosas.

c) Barajar un mazo de cartas y extraer una. No se puede asegurar que salga la reina de diamantes por ejemplo.

2. EL ESPACIO MUESTRA

Generalmente en un experimento al azar podemos señalar el conjunto de los resultados posibles. A este conjunto lo denominaremos *espacio muestra*.

Por ejemplo, al lanzar un dado el espacio muestra es {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Otros ejemplos son:

a) Al lanzar una moneda al aire el espacio muestra es {águila, sol}

b) Al extraer una carta de un mazo de 52 cartas el espacio muestra son las 52 cartas.

Ejercicio 5. En cada uno de los siguientes experimentos indique cuál es el espacio muestra.

a) Se anota el color de cada vehículo que pasa por una carretera.
b) Se extrae una carta de una baraja española (40 cartas).
c) Se abre un libro en una página cualquiera y se anota la última cifra del número de la página.
d) Se rifa un reloj entre 50 personas.
e) Se anota cada año en qué estado de la república cae el premio mayor de la lotería.

3. PROBABILIDAD DE UN EVENTO

En relación a un experimento al azar, un evento es algo que puede ocurrir o no. Por ejemplo, al extraer una carta de una baraja inglesa, un evento es "sacar as". Observe usted que este evento ocurre al extraer de la baraja cualquiera de los 4 ases. En este caso decimos que el evento tiene 4 resultados favorables.

Hay eventos que sólo tienen un resultado favorable. Por ejemplo, en relación al mismo experimento el evento "sacar rey de diamantes", obviamente tiene sólo un caso favorable.

Si un evento no tiene casos favorables decimos que el evento es imposible.

Ejercicio 6. De acuerdo con el experimento, en cada inciso indique cuántos resultados favorables tiene el evento.

Se tira un dado de seis caras.

a) "Sacar un número impar".
b) "Sacar un número mayor que 4".
c) "Sacar un número menor que 4".
d) "Sacar un 5".
e) "Sacar un número mayor que 6".

En una caja hay 10 canicas azules, 5 amarillas y 2 rojas. Sin ver se saca una canica de la caja.

f) "Sacar una canica roja".
g) "Sacar una canica amarilla".
h) "Sacar una canica que no sea azul".
i) "Sacar una canica que no sea roja".
j) "Sacar una canica anaranjada".

Daremos ahora la siguiente definición:

La probabilidad de un evento es el cociente del número de resultados favorables entre el número de resultados posibles.

Es muy importante señalar que la definición anterior sólo es válida cuando en el experimento al azar todos los resultados posibles tienen exactamente la misma oportunidad de ocurrir. Para mayor claridad veamos un ejemplo:

Ejemplo. Se lanzan dos monedas. Deseamos saber cuál es la probabilidad del evento "sacar únicamente un sol". Podemos tomar como casos posibles: no sacar ningún sol, sacar uno y sacar dos. Como sólo hay un caso favorable podríamos concluir que la probabilidad pedida es $\frac{1}{3}$. Pero esto no sería correcto pues los casos posibles tomados no tienen exactamente la misma oportunidad de ocurrir.

Si tomamos el siguiente espacio muestra

donde todos los resultados tienen exactamente la misma oportunidad de ocurrir, observamos que la probabilidad buscada es $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

En el siguiente ejercicio consideramos que en cada uno de los experimentos al azar los resultados posibles tienen exactamente la misma oportunidad de ocurrir.

Ejercicio 7. En cada caso indique la probabilidad del evento.

a) De una urna con 5 canicas rojas y 3 negras se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica roja?

b) Se lanza un dado de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un 3?

c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la rifa de una bicicleta, si hay 25 números y se compran 4?

d) Se extrae una carta de una baraja española (40 cartas). ¿Cuál es la probabilidad de sacar "espadas"?

e) En un cuestionario una pregunta de opción tiene 3 posibles respuestas. ¿Cuál es la probabilidad de acertar por casualidad a la pregunta?

f) De una urna con 7 canicas azules y 4 blancas se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar una canica azul?

g) ¿Cuál es la probabilidad de sacarse en la lotería el premio mayor comprando 5 números en un sorteo cuya emisión es de 50 000 billetes?

h) Se lanza un dado de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número mayor o igual a 2?

i) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cualquiera tomada al azar haya nacido en lunes?

j) Se lanzan dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos un águila?

Seguramente usted habrá observado que la probabilidad de un evento es un número mayor o igual a cero y menor o igual a 1.

Si la probabilidad es cero el evento es imposible, si la probabilidad es 1 el evento es seguro.

Hasta ahora hemos obtenido la probabilidad de un evento en relación a un experimento al azar sin realizar el experimento. La probabilidad así obtenida recibe el nombre de *probabilidad teórica.*

4. PROBABILIDAD EMPIRICA

Supongamos que en una tlapalería, de los últimos 100 martillos vendidos, únicamente 5 se vendieron en miércoles. Decimos entonces que la *probabilidad empírica* de que el próximo martillo sea vendido en miércoles es de $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

Si un jugador de futbol ha anotado 7 goles en los últimos 20 partidos, entonces la probabilidad empírica de que el próximo partido anote gol es de $\frac{7}{20}$.

Daremos ahora la siguiente definición:

La probabilidad empírica de un evento es el cociente del número de veces que ocurre el evento, entre el número de veces que se realiza el experimento.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes incisos obtenga la probabilidad empírica.

a) De una caja se saca una canica se anota su color y se regresa a la caja. De 150 anotaciones 30 corresponden al color verde. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar la próxima canica ésta sea verde?

b) En una fábrica, de los últimos 200 televisores fabricados, 34 son defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo televisor fabricado resulte defectuoso?

c) En 600 veces que se ha lanzado un dado, 432 veces ha salido un 5. ¿Cuál es la probabilidad de que en el próximo lanzamiento salga un 5?

d) En los últimos 70 viajes un autobús ha llegado 69 veces con retraso. ¿Cuál es la probabilidad de que en próximo viaje el autobús llegue con retraso?

Consideremos otra vez el caso de la tlapalería. ¿Podemos obtener la probabilidad teórica de que el próximo martillo sea vendido en miércoles?

Supongamos que una persona considera que los resultados posibles son los 6 días hábiles de la semana, que el resultado favorable es el día miércoles y concluye que la probabilidad buscada es $\frac{1}{6}$.

Esta persona estará incurriendo en un grave error pues está considerando que todos los resultados tienen exactamente la misma oportunidad de ocurrir, lo cual obviamente no es cierto ya que, por ejemplo, hay mayor número de ventas los sábados o días de pago.

5. LA LEY DE LOS GRANDES NUMEROS

Cuando un experimento al azar se realiza un número muy grande de veces, la probabilidad empírica que se obtiene es casi igual a la probabilidad teórica. Este hecho se conoce como "la ley de los grandes números".

Ejercicio 9. En cada inciso obtenga la probabilidad teórica del evento. Después efectúe 100 veces el experimento y obtenga la probabilidad empírica. Por último compare ambas probabilidades.

a) Experimento: lanzar un dado de 6 caras. Evento: "obtener un 5".

teórica
Probabilidad

Probabilidad
empírica

b) Experimento: lanzar dos monedas. Evento: "obtener al menos un sol".

Probabilidad
teórica

Probabilidad
empírica

c) Experimento: Sacar una canica de una caja con 15 rojas y 5 blancas.
Evento: "Sacar una canica roja".

Probabilidad
teórica

Probabilidad
empírica

d) Experimento: lanzar un dado de 6 caras.
Evento: "obtener un número menor que 6".

Probabilidad
teórica

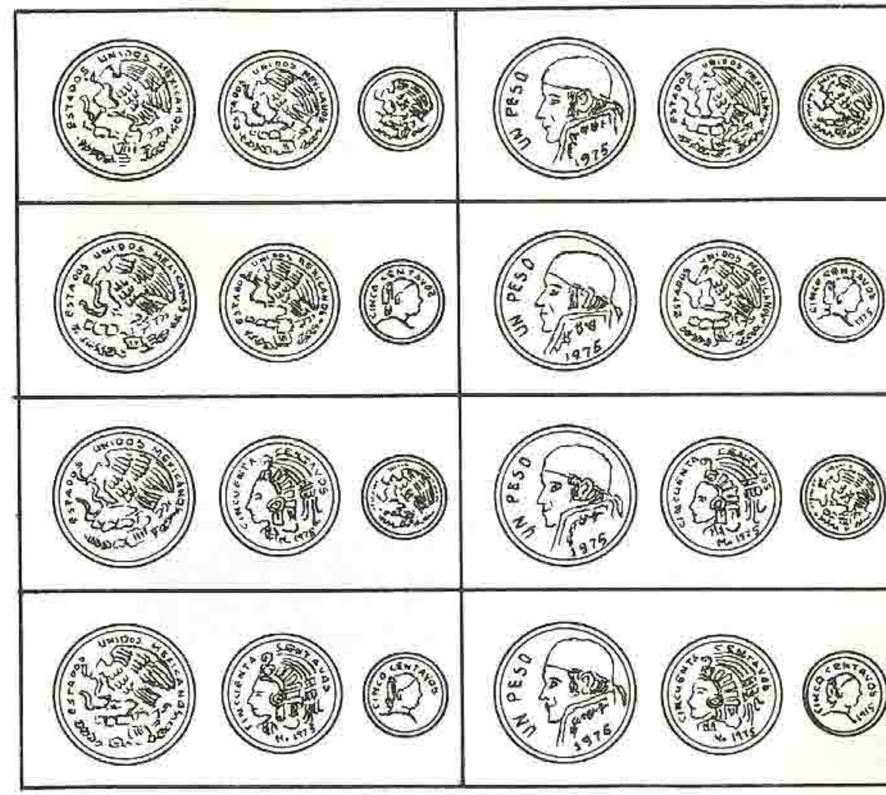
Probabilidad
empírica

e) Experimento: lanzar 3 monedas.
Evento: "obtener 3 soles".

Probabilidad
teórica

Probabilidad
empírica

Sugerencia: Considere el siguiente espacio muestra:



ESTA EDICION DE 25,000 EJEMPLARES ESTUVO A CARGO DE: EDUARDO PEREZ MUÑOZ LEDO, JEFE DE TALLERES; GUADALUPE RODRIGUEZ RODRIGUEZ, PRESENTACION; CARLOS PEREZ MAGAÑA, FOTOGRAFIA; DANIEL BUSTOS GARCIA, TRANSPORTE; RAMON NAVARRETE ZAMUDIO Y ARMANDO MENDOZA BRIZUELA, OFFSET. Y SE TERMINO DE IMPRIMIR EN AGOSTO DE 1975, EN LOS TALLERES DE LA COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A., MEXICO 22, D. F.