C.E.C.S.A.

MATEMATICAS

TERCER CURSO

CARDENAS · CURIEL · LLUIS
PERALTA · TAVERA · VILLAR

C.E.C.S.A.

MATEMATICAS

Tercer Curso

Educación Media Básica

Este texto ha sido redactado, para satisfacer cualquiera de las dos estructuras programáticas: Areas Asignaturas

Edición autorizada bajo contrato con los autores

Primera edición: agosto de 1977

Segunda impresión:
agosto de 1978

Tercera impresión:
agosto de 1979

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
CALZ. DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

AV. REP. ARGENTINA NÚMERO. 168, BARCELONA 6, ESPAÑA
SOLÍS NÚM. 1262, BUENOS AIRES, ARGENTINA
AMUNÁTEGUI NÚM. 458, SANTIAGO DE CHILE, CHILE
CRUZ VERDE A VELÁZQUEZ, EDIFICIO CENTRO CRUZ VERDE
LOCAL 12, CARACAS, VENEZUELA

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

PROLOGO

Como acertadamente lo señalan nuestros técnicos de la educación, el aprendizaje de la matemática en niveles elementales debe ser eminentemente formativo.

El libro que ahora presentamos a la consideración de los maestros y estudiantes de tercer grado de secundaria ha sido elaborado tomando en consideración ese enfoque.

Las ideas matemáticas se desarrollan en él sin perder de vista los objetivos particulares que señala el programa oficial en cada una de sus unidades y cubren íntegramente los contenidos programáticos del curso.

Las ocho unidades en que se presenta el material son bastante independientes entre sí, de manera que el libro permite gran flexibilidad en su empleo al adaptarse a las diversas condiciones de trabajo en los grupos.

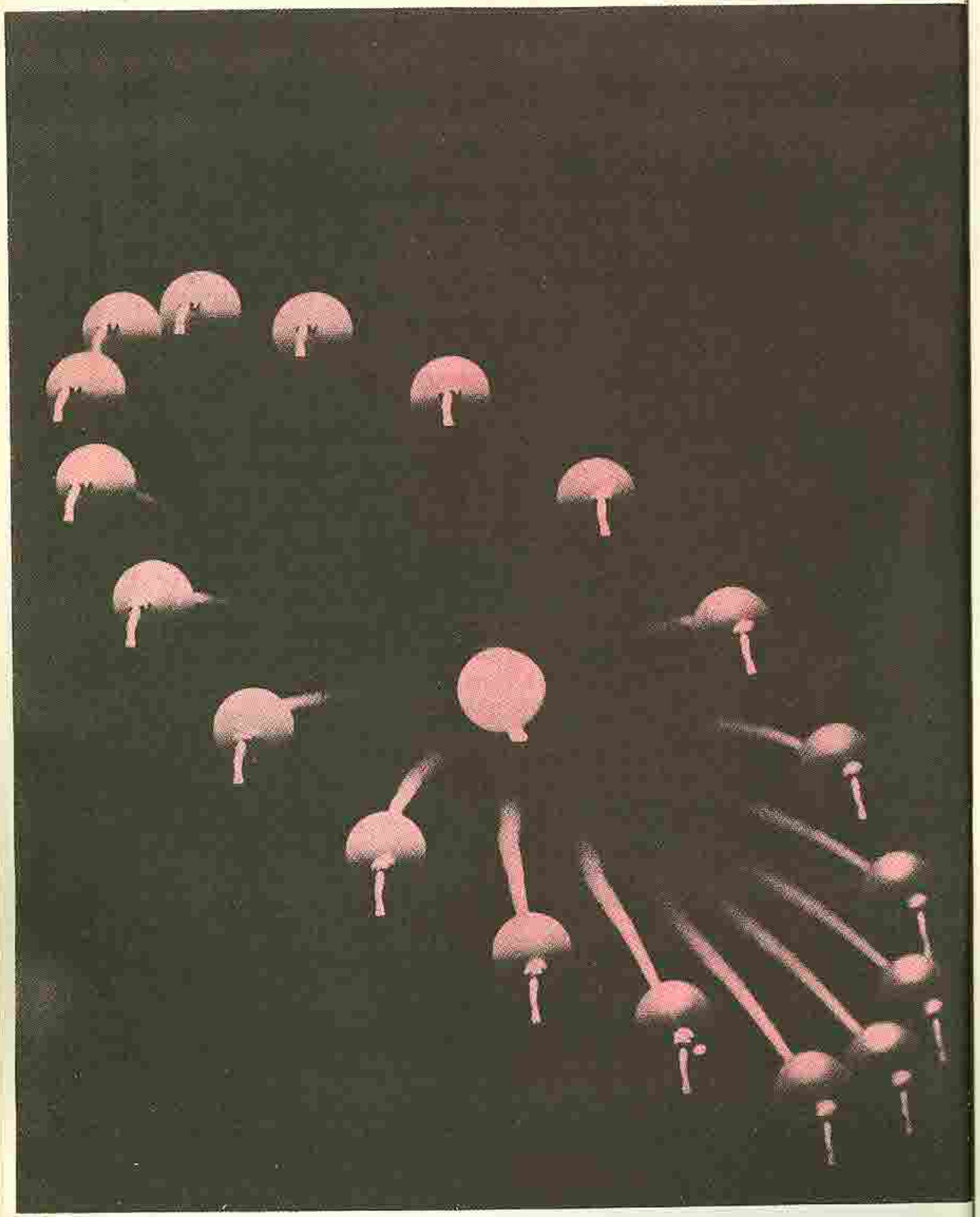
Se ha alterado el orden de presentación dejando al final la unidad de "Lógica y Conjuntos", pues los autores, como resultado de su experiencia pedagógica en distintos niveles, consideran que previamente al estudio de la lógica es conveniente que el alumno se entrene más en el manejo de razonamientos sencillos ligados a situaciones concretas. El entrenamiento que el alumno adquiera durante el estudio de las otras siete unidades, sin duda alguna facilitará la comprensión de las nociones elementales de lógica. En última instancia será el maestro quien decida, de acuerdo a las condiciones específicas de su grupo, sobre el momento en que puede presentar esta unidad a sus alumnos y sobre la profundidad con que tratará los temas de la misma.

El texto pretende, en todo momento, lograr en el estudiante una verdadera formación matemática. Por eso abunda en ejercicios y problemas que lo inducen a razonar.

Esperamos que esta obra ayude al noble fin de la superación de nuestra juventud estudiosa.

LOS AUTORES

INDICE DE MATERIAS



PRIMERA UNIDAD

FACTORIZACION

Con cierta frecuencia se nos presentan problemas cuya resolución se simplifica notablemente al aplicar la "factorización" de polinomios; es decir, al expresar un polinomio como producto de polinomios.

En esta unidad estudiaremos la factorización de algunos polinomios, especialmente de aquellos a los que se acostumbra llamar "trinomios cuadrados perfectos". Este conocimiento nos será útil para resolver ecuaciones de segundo grado.

1. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

En cursos anteriores hemos visto que en el manejo de polinomios se utilizan las propiedades de las operaciones. En particular, cuando se estudian productos, constantemente se aplica la **propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.** ¿Recuerda usted en qué consiste dicha propiedad?

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA: Si a, b y c son números cualesquiera, la expresión $a\,(b + c)$ representa al mismo número que la expresión $ab + ac$. Esto es, en símbolos,

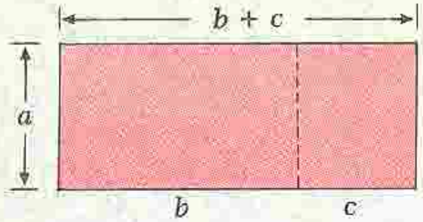
$$\boxed{a\,(b + c) = ab + ac}$$

o bien,

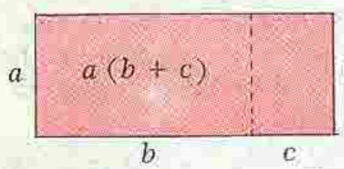
$$\boxed{ab + ac = a\,(b + c)}$$

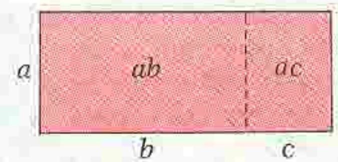
Si recurrimos a nuestra idea de área de un rectángulo, podemos ilustrar esta propiedad.

Por ejemplo, consideremos el siguiente rectángulo que mide a unidades de altura y $b + c$ unidades de base.



1	2
El área de este rectángulo se puede obtener multiplicando base por altura. En tal caso, el área es el producto $a\,(b + c)$.	Pero esa área también es la suma de las áreas de los rectángulos rojo y gris. Esto es, la suma $ab + ac$.





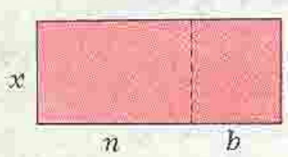
Observamos aquí que:

$$\boxed{a\,(b + c) = ab + ac}$$

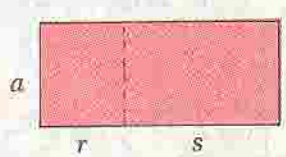
o bien,

$$\boxed{ab + ac = a\,(b + c)}$$

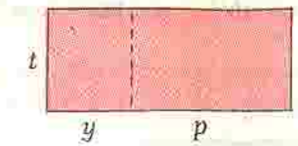
Observe cada rectángulo y complete la expresión, tal como se hace en a) y en f).

a) 

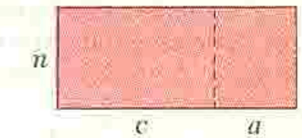
$x\,(n + b) =$ $\boxed{xn + xb}$

b) 

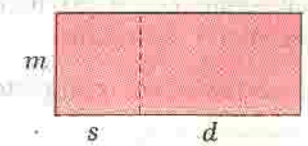
$a\,(r + s) =$

c) 

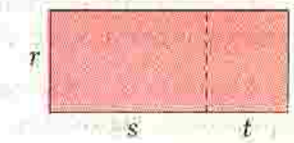
$t\,(y + p) =$

d) 

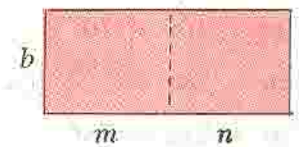
$n\,(c + a) =$

e) 

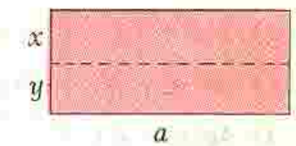
$m\,(s + d) =$

f) 

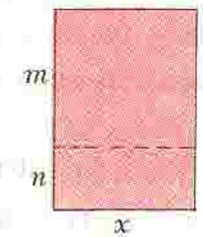
$rs + rt =$ $\boxed{r\,(s + t)}$

g) 

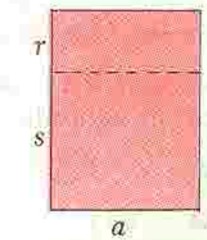
$bm + bn =$

h) 

$ax + ay =$

i) 

$mx + nx =$

j) 

$ra + sa =$

En virtud de la propiedad distributiva, si tenemos un producto como $a\,(b + c)$, podemos sustituirlo por una suma de la forma $ab + ac$.

$$\begin{array}{r} b + c \\ a \\ \hline ab + ac \end{array}$$

$$\boxed{a\,(b + c) = ab + ac}$$

Y también, si tenemos una suma como $ab + ac$, podemos sustituirla por un producto como $a(b + c)$.

$$\boxed{ab + ac = a(b + c)}$$

(Esta última expresión indica que el polinomio $ab + ac$ se puede *"factorizar"* como el producto de los factores a y $b + c$).

En general, cuando se escribe un polinomio como producto de varios polinomios, se dice que se **factoriza** dicho polinomio.

Ejercicio 2. Aplicando la propiedad distributiva, complete las expresiones siguientes.

a) $5(x + n) = 5x + \underline{\qquad}$ b) $5x + 5b = 5(\underline{\qquad})$

c) $a(c + x) = ac + \underline{\qquad}$ d) $na + nx = \underline{\qquad}(a + x)$

e) $2(t + r) = \underline{\qquad} + 2r$ f) $10n + 10y = 10(\underline{\qquad})$

g) $3x(a + b) = 3xa + \underline{\qquad}$ h) $2an + 2ar = \underline{\qquad}(n + r)$

i) $4y(c + d) = \underline{\qquad} + 4yd$ j) $7xy + 7xz = 7x(\underline{\qquad})$

k) $3(2a + 3b) = 6a + \underline{\qquad}$ l) $5ax + 15a = \underline{\qquad}(x + 3)$

m) $2a(a + 7) = \underline{\qquad} + 14a$ n) $a^2 + an = a(\underline{\qquad})$

o) $x^2 + xy = \underline{\qquad}(x + y)$ p) $3y^2 + 6ay = 3y(\underline{\qquad})$

Ejercicio 3. En cada inciso complete la multiplicación o la factorización indicada.

a) $7(x - y) = \underline{\qquad} - 7y$ b) $8a - 8b = \underline{\qquad}(a - b)$

c) $3(2a - 4n) = \underline{\qquad} - 12n$ d) $5r - 15x = \underline{\qquad}(r - 3x)$

e) $2a(x - 3y) = 2ax - \underline{\qquad}$ f) $20 - 4nx = 4(\underline{\qquad})$

g) $x(x - 1) = \underline{\qquad} - x$ h) $a^2 - a = a(\underline{\qquad})$

i) $3n(n - 5) = \underline{\qquad} - 15n$ j) $18x^2 - 12x = 6x(\underline{\qquad})$

k) $x^2(x - 7a) = x^3 - \underline{\qquad}$ l) $2x^3 - 6x = \underline{\qquad}(x^2 \quad 3)$

m) $a(a + b - 3) = \underline{\qquad} + ab$ n) $y^3 - 5y^2 + y = y(\underline{\qquad})$

o) $a^2b + ab^2 = ab(\underline{\qquad})$ p) $3x^2y - 6xy^2 = \underline{\qquad}(x - 2y)$

q) $x^3 - x^2 - x = x(\underline{\qquad})$ r) $3a^4 + 6a^2 - 3a = 3a(\underline{\qquad})$

2. EL CUADRADO DE UN BINOMIO

Según sabemos, el cuadrado de un binomio como $a + b$ es el producto $(a + b)(a + b)$. Esto es,

$$\boxed{(a + b)^2 = (a + b)(a + b)}$$

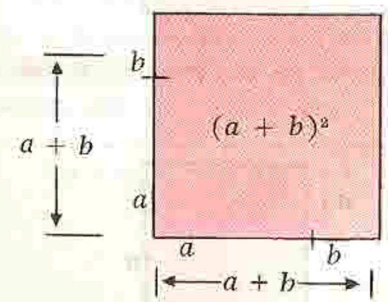
Ahora bien, si efectuamos la multiplicación encontramos que:

$$\boxed{(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2}$$

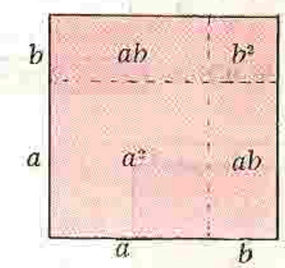
$$\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
a \cdot a + ab \qquad \\
+ ab + b \cdot b \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2
\end{array}$$

Esto también puede ilustrarse con áreas, como hemos hecho antes. Por ejemplo, si consideramos un cuadrado que mida $a + b$ unidades por lado, es posible expresar su área en dos formas:

1 El área es $(a + b)^2$



2 Esa misma área es la suma $a^2 + 2ab + b^2$



Aquí observamos que

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

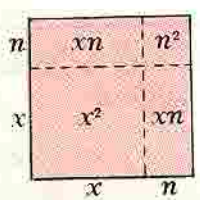
o bien,

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$$

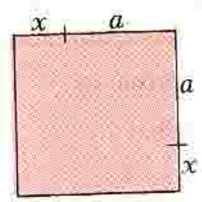
A los polinomios como $a^2 + 2ab + b^2$ se les acostumbra llamar "trinomios cuadrados perfectos". Veamos cuáles son los términos que forman un trinomio de este tipo:

Binomio que se eleva al cuadrado	Trinomio cuadrado perfecto que se forma con:
$(\underbrace{a}_{\text{primer término}} + \underbrace{b}_{\text{segundo término}})^2 =$	$\underbrace{a^2}_{\text{El cuadrado del primer término del binomio}} + \underbrace{2ab}_{\text{el doble producto de ambos términos del binomio}} + \underbrace{b^2}_{\text{el cuadrado del segundo término del binomio}}$

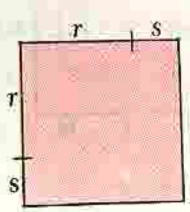
Ejercicio 4. Escriba el trinomio cuadrado perfecto con el que se expresa el área de cada cuadrado, e ilústrelo como se hace en a).

a) 

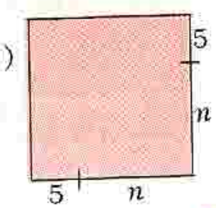
$(x+n)^2 = \boxed{x^2 + 2xn + n^2}$

b) 

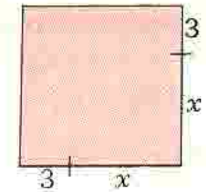
$(a+x)^2 =$ $\square$

c) 

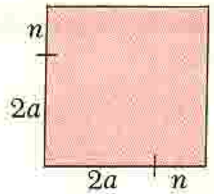
$(r+s)^2 =$ $\square$

d) 

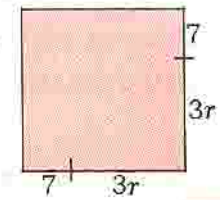
$(5+n)^2 =$ $\square$

e) 

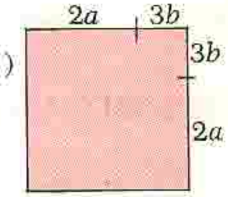
$(x+3)^2 =$ $\square$

f) 

$(2a+n)^2 =$ $\square$

g) 

$(3r+7)^2 =$ $\square$

h) 

$(2a+3b)^2 =$ $\square$

Ejercicio 5. Escriba lo que falta para completar correctamente cada expresión.

a) $(a+b)^2 = \square + 2ab + \square$ b) $(x + \square)^2 = x^2 + 2xn + n^2$

c) $(r+3)^2 = \square + \quad + 3^2$ d) $(y + \square)^2 = y^2 + 10y + 5^2$

e) $(\square + n)^2 = 49 + 14n + n^2$ f) $(\square + 6)^2 = t^2 + 12t + 36$

g) $(x + \square)^2 = \square + 2xb + \square$ h) $(\square + b)^2 = n^2 + \square + \square$

i) $(y+z)^2 = y^2 + \quad + z^2$ j) $(n+8)^2 = n^2 + \quad + 64$

k) $(\square + \square)^2 = b^2 + 2by + y^2$ l) $(\square + \square)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

m) $(\square + \square)^2 = x^2 + 10y + 5^2$ n) $(\square + \square)^2 = y^2 + 6y + 9$

Anteriormente hemos visto que $a - b$ es igual a $a + (-b)$. Por eso, si tenemos que elevar al cuadrado un binomio como $a - b$, podemos sustituirlo por la suma $a + (-b)$, y luego seguir el procedimiento que ya conocemos:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2$$
$$= \underbrace{a^2}_{\text{el cuadrado de } a} - \underbrace{2ab}_{\text{el doble producto de } a \text{ por } -b} + \underbrace{b^2}_{\text{el cuadrado de } -b}$$

Ejercicio 6. Complete correctamente cada expresión escribiendo lo que falta.

a) $(n - t)^2 = \square - 2nt + \square$ b) $(x - 3)^2 = \square - 6x + 9$

c) $(r - s)^2 = r^2 - \square + s^2$ d) $(y - 2)^2 = y^2 - \square + \square$

e) $(x - 5)^2 = \square - \square + \square$ f) $(x - a)^2 = \square - \square + \square$

g) $(\square - 7)^2 = n^2 - 14n + \square$ h) $(\square - \square)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

i) $(\square - \square)^2 = \square - 2an + \square$ j) $(\square - \square)^2 = \square - 6x + \square$

3. FACTORIZACION DE TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS

Factorizar un trinomio cuadrado perfecto es algo muy sencillo. ¿Recuerda usted cuáles son los términos que forman un trinomio de ese tipo?

Analicemos, por ejemplo, el trinomio $x^2 + 10x + 25$.

Observamos que este trinomio está formado por:

$$x^2 \quad + \quad 10x \quad + \quad 25$$

el cuadrado de x

el doble producto de x por 5

el cuadrado de 5

Se trata, entonces, de un trinomio cuadrado perfecto cuya factorización es:

$$\boxed{x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2}$$

Y estamos seguros de esto porque $(x + 5)^2$ es igual a

$$x^2 + 10x + 25.$$

Consideremos ahora, por ejemplo, el trinomio $81 - 18n + n^2$.

Este trinomio está formado por:

$$81 \quad - \quad 18n \quad + \quad n^2$$

el cuadrado de 9

el doble producto de 9 por $-n$

el cuadrado de $-n$

Por consiguiente, se trata de un trinomio cuadrado perfecto que podemos factorizar así:

$$\boxed{81 - 18n + n^2 = (9 - n)^2}$$

Comprobación: $(9 - n)^2 = 81 - 18n + n^2$.

También podríamos considerar que el trinomio está formado de la siguiente manera:

$$81 \quad - \quad 18n \quad + \quad n^2$$

el cuadrado de -9

el doble producto de -9 por n

el cuadrado de n

En tal caso la factorización sería:

$$\boxed{81 - 18n + n^2 = (-9 + n)^2}$$

lo cual podemos indicar también así:

$$\boxed{81 - 18n + n^2 = (n - 9)^2}$$

Comprobación: $(n - 9)^2 = n^2 - 18n + 81 = \boxed{81 - 18n + n^2.}$

Ejercicio 7. Factorice los siguientes trinomios cuadrados perfectos. (Compruebe cada factorización en su cuaderno.)

a) $x^2 + 2bx + b^2 = (\square + \square)^2$ b) $a^2 + 2an + n^2 = (\square + \square)^2$

c) $y^2 + 16y + 64 = (\square + \square)^2$ d) $b^2 + 14b + 49 = (\square + \square)^2$

e) $81 + 18h + h^2 = (\square + \square)^2$ f) $n^2 - 2nx + x^2 = (\square - \square)^2$

g) $r^2 - 2rs + s^2 = (\square - \square)^2$ h) $t^2 - 10t + 25 = (\square - \square)^2$

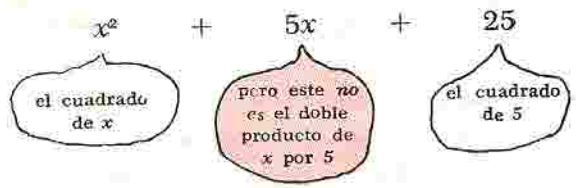
i) $16 + 8b + b^2 = \square$ j) $x^2 - 12x + 36 = \square$

Lo que observamos en todos los incisos de este último ejercicio es una característica propia de la factorización de trinomios cuadrados perfectos. La podemos expresar en general así:

> *Todo trinomio de la forma $a^2 + 2ab + b^2$ se puede sustituir por una expresión de la forma $(a + b)^2$.*

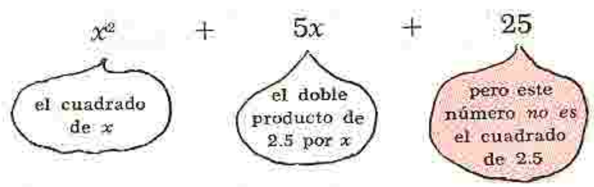
Por supuesto, si un trinomio *no es* cuadrado perfecto, *no se puede* factorizar en esa forma. Analicemos, por ejemplo, el trinomio $x^2 + 5x + 25$.

Vemos que este trinomio está formado por:



Por consiguiente, *no es* un trinomio cuadrado perfecto y no se puede expresar en la forma $(a + b)^2$.

También podríamos ver este trinomio así:



Por lo tanto, *no es* un trinomio cuadrado perfecto.

Ejercicio 8. Determine cuáles de los siguientes trinomios son cuadrados perfectos y factorícelos. Compruebe sus factorizaciones.

a) $w^2 + 4w + 4$ b) $y^2 - 6y + 9$

c) $n^2 + 10x + 25$ d) $r^2 - 20r + 100$

e) $64 - 16a - a^2$ f) $64 - 16a + a^2$

h) $3^2 + 6n + n^2$ g) $b^2 - 14b - 7^2$

j) $25a^2 - 10ab + b^2$ i) $9x^2 + 12xy + 4y^2$

l) $y^2 - 5y + \frac{25}{4}$ k) $x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Ejercicio 9. Complete cada expresión de modo que sea un trinomio cuadrado perfecto y luego factorice éste. Compruebe sus factorizaciones.

a) $x^2 + \square + y^2 = (\square + \square)^2$

b) $n^2 - 6n + \square = (\square - \square)^2$

c) $\square + 8a + a^2 = (\square + \square)^2$

d) $\square - 2ax + \square = (\square - \square)^2$

e) $\square + 10y + \square = (\square + \square)^2$

f) $6^2 + \square + x^2 = (\square + \square)^2$

g) $49 - \square + n^2 = (\square - \square)^2$

h) $x^2 + 3x + \square = (\square + \square)^2$

i) $x^2 - 7x + \square = (\square - \square)^2$

j) $x^2 + 2x + \square = (\square + \square)^2$

k) $x^2 - 5x + \square = (\square - \square)^2$

l) $n^2 + \square + \frac{9}{4} = (\square + \square)^2$

Para fines prácticos, en este curso, son suficientes los conocimientos que sobre "factorización" hemos adquirido hasta aquí. Sin embargo, puede haber estudiantes interesados en conocer un poco más sobre este asunto, o maestros que se inclinen por desarrollar otros casos de "productos notables" con su grupo. Es por ello que incluimos en esta unidad los siguientes cuatro párrafos.

4. PRODUCTO DE BINOMIOS CONJUGADOS

Si se tiene un binomio como $a + b$ se dice que su "conjugado" es $a - b$; recíprocamente, si tenemos el binomio $a - b$, decimos que su "conjugado" es $a + b$. Así, por ejemplo, las siguientes son parejas de binomios conjugados:

$$x + y \quad \text{y} \quad x - y$$

$$n - 8 \quad \text{y} \quad n + 8$$

$$r + s \quad \text{y} \quad r - s$$

$$5 - a \quad \text{y} \quad 5 + a$$

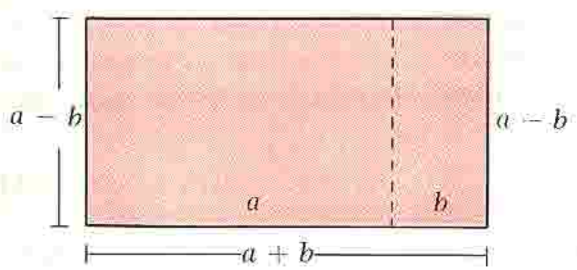
¿Observa usted claramente cuál es la característica de estos "binomios conjugados"?

Ahora bien, si multiplicamos dos binomios conjugados, el producto será una diferencia de cuadrados:

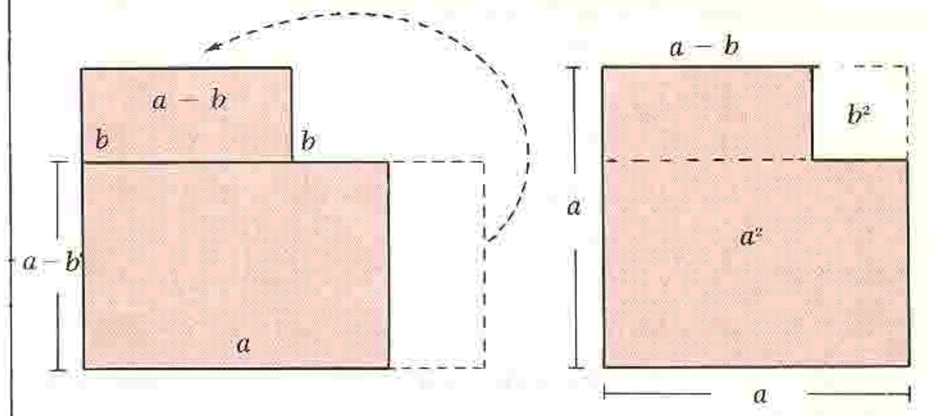
$$\begin{array}{l} a + b \\ \underline{a - b} \\ a \cdot a + a \cdot b \\ \underline{\qquad\; - a \cdot b - b \cdot b} \\ a^2 \quad - \quad b^2 \end{array}$$

Esto podría ilustrarse de la siguiente manera:

1 El área de este rectángulo es el producto de la base por la altura, o sea, $\boxed{(a + b)(a - b)}$



2 Si "recortamos" y "reacomodamos" el rectángulo en la siguiente forma, observamos que el área del rectángulo es $\boxed{a^2 - b^2}$



Esto es, $\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

Ejercicio 10. Complete usted cada expresión.

a) $(x + 5)(x - 5) =$
b) $(a + 8)(a - 8) =$
c) $(x + y)(x - y) =$
d) $(r - s)(r + s) =$
e) $(6 - x)(6 + x) =$
f) $(10 - n)(10 + n) =$
g) $(10 + 2)(10 - 2) =$
h) $(50 - 3)(50 + 3) =$

En el último inciso de este ejercicio podemos ver una de las aplicaciones de la multiplicación de binomios conjugados. Se trata de multiplicar 47 por 53 y, según se observa, al expresar el número 47 como $50 - 3$ y el número 53 como $50 + 3$, el producto se encuentra fácil y rápidamente:

$$\boxed{47 \times 53} = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2\,500 - 9 = \boxed{2\,491}$$

Ejercicio 11. Tal como se hace en a), efectúe cada multiplicación aplicando lo que sabe de binomios conjugados.

a) $35 \times 25 =$

$\boxed{(30 + 5)(30 - 5) = 30^2 - 5^2 = 900 - 25} = \boxed{875}$

b) $52 \times 48 =$ c) $75 \times 65 =$

d) $17 \times 23 =$ e) $45 \times 55 =$

f) $27 \times 33 =$ g) $620 \times 580 =$

h) $710 \times 690 =$ i) $780 \times 820 =$

j) $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} =$ k) $\left(10\frac{1}{3}\right)\left(9\frac{2}{3}\right) =$

l) $(4.5)(3.5) =$ m) $(6.2)(5.8) =$

Ejercicio 12. Escriba cada producto como una diferencia de cuadrados.

a) $(b + 7)(b - 7) =$ b) $(x - 9)(x + 9) =$

c) $(2t + 8)(2t - 8) =$ d) $(3a + 4)(3a - 4) =$

e) $(2r - 3x)(2r + 3x) =$ f) $(5x - 2a)(5x + 2a) =$

g) $\left(\frac{3}{4} - n\right)\left(\frac{3}{4} + n\right) =$ h) $\left(\frac{1}{2} + 3p\right)\left(\frac{1}{2} - 3p\right) =$

i) $(6 + n)(n - 6) =$ j) $(15 + 2a)(2a - 15) =$

5. FACTORIZACION DE DIFERENCIAS DE CUADRADOS

En la sección anterior hemos visto que si se multiplican dos binomios conjugados se obtiene una diferencia de cuadrados. Entonces, cuando tenemos una diferencia como $a^2 - b^2$, la podemos expresar también como un producto de la forma $(a + b)(a - b)$.

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

Esto nos indica cómo se factoriza una diferencia de cuadrados. Por ejemplo,

$$n^2 - 25 = (n + 5)(n - 5)$$
$$4a^2 - 36 = (2a + 6)(2a - 6)$$

$$9x^2 - 4y^2 = (3x + 2y)(3x - 2y)$$
$$\frac{9}{4} - 16r^2 = \left(\frac{3}{2} + 4r\right)\left(\frac{3}{2} - 4r\right)$$

Ejercicio 13. Determine cuáles de las siguientes expresiones son diferencias de cuadrados y luego factorícelas.

a) $100 - x^2$ b) $n^2 + 64$

c) $4a^2 - 49$ d) $36 - 9n$

e) $-81 + 9x^2$ f) $16y - 25$

g) $-2\,500 + a^2$ h) $10\,000 - x^2$

i) $\frac{4}{25} - x^2$ j) $4b^2 - \frac{9}{16}$

Ejercicio 14. Factorice cada binomio y compruebe su factorización, como se hace en a).

a) $a^2 - n^2 = \boxed{(a + n)(a - n)}$

Comprobación:

$(a + n)(a - n) = aa - an + an - nn = \boxed{a^2 - n^2}$

b) $x^2 - y^2 =$ c) $m^2 - 4a^2 =$

d) $25 - d^2 =$ e) $49 - 4x^2 =$

f) $36a^2 - 81 =$ g) $64b^2 - 9n^2 =$

h) $100x^2 - 4a^2 =$ i) $y^2 - \frac{9}{16} =$

j) $\frac{49}{81} - 16c^2 =$ k) $-25 + \frac{4}{9}x^2 =$

l) $-36a^2 + \frac{16}{25} =$ m) $-\frac{16}{49}x + 9a^2 =$

n) $a^4 - b^2 =$ o) $4x^8 - y^4 =$

6. PRODUCTO DE BINOMIOS CON UN TERMINO COMUN

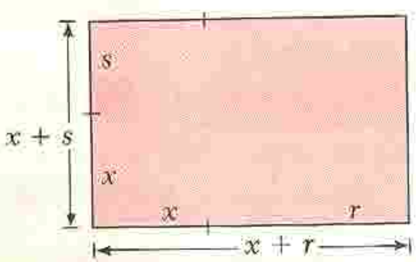
El producto de dos binomios como $x + r$ y $x + s$, que tienen un término común, es un trinomio de la forma $x^2 + (r + s)x + rs$.

$$\begin{array}{r} x + r \\ x + s \\ \hline xx + rx \qquad \\ + sx + rs \\ \hline x^2 + (r + s)x + rs \end{array}$$

Esto también se puede ilustrar recurriendo a nuestra idea de área. Por ejemplo, si consideramos que $x + r$ y $x + s$ son las dimensiones de un rectángulo, el área de éste se puede expresar de dos maneras:

1
El área es el producto de la base por la altura, o sea,

$\boxed{(x + r)(x + s)}$

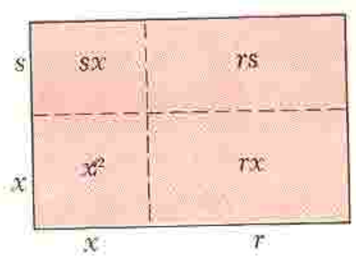


2
El área es la suma

$x^2 + rx + sx + rs,$

que también puede expresarse como

$\boxed{x^2 + (r + s)x + rs}$

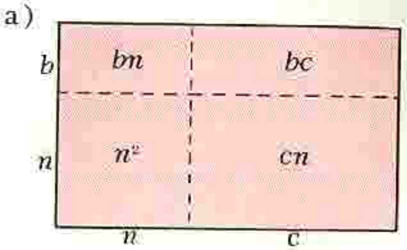


Por lo tanto,

$$\boxed{(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs}$$

Ejercicio 15. Tal como se hace en a), exprese en dos formas distintas el área del rectángulo.

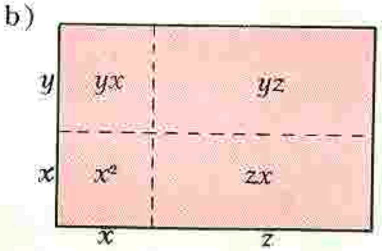
a)



$A = \boxed{(n + c)(n + b)}$

$A = \boxed{\begin{array}{l} n^2 + bn + cn + bc = \\ = n^2 + (b + c)\ n + bc \end{array}}$

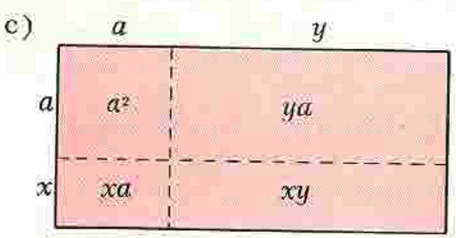
b)



$A =$

$A =$

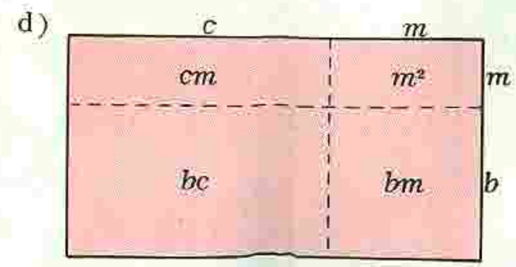
c)



$A =$

$A =$

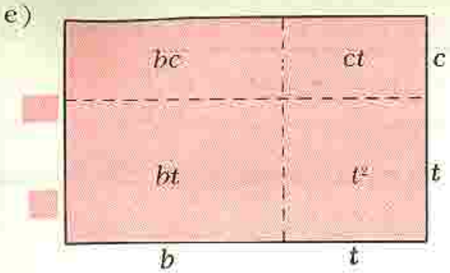
d)



$A =$

$A =$

e)



$A =$ ___

$A =$ ___

Ejercicio 16. Escriba lo que falta en cada caso.

a)
$$\begin{array}{r} x + n \\ x + p \\ \hline x^2 + nx \quad\quad \\ + \square + \square \\ \hline \square + (n+p)\square + pn \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x + 9 \\ \hline \square + \square \quad\quad \\ + \square + 72 \\ \hline x^2 + 17x + \square \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} x - 5 \\ x - 3 \\ \hline \square - 5x \quad\quad \\ - 3x + \square \\ \hline \square - 8x + \square \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} x - 10 \\ x + 4 \\ \hline \square - 10x \quad\quad \\ + 4x - \square \\ \hline \square - 6x - 40 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r} x + 7 \\ x - 3 \\ \hline \square + 7x \quad\quad \\ - 3x - 21 \\ \hline \square \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{r} x - 2 \\ x + 8 \\ \hline \square \quad\quad \\ \square \\ \hline x^2 - 6x - 16 \end{array}$$

Ejercicio 17. Exprese cada producto como un trinomio, tal como se hace en el primer inciso.

a) $(x + 4)(x + 6) = xx + 4x + 6x + 4 \cdot 6 =$

$x^2 + (4 + 6)x + 24 = \boxed{x^2 + 10x + 24}$

b) $(a + 3)(a + 8) =$ ___

c) $(n + 10)(n + 3) =$ ___

d) $(r + 5)(r + 7) =$ ___

e) $(y + 8)(y + 10) =$ ___

f) $(x + 2)(x + 15) =$ ___

g) $(x + n)(x + t) =$ ___

h) $(x + y)(x + 10) =$ ___

i) $(x + 5)(x + n) =$ ___

j) $(x + r)(x + 3) =$ ___

Ejercicio Tal como se hace en el primer inciso, exprese cada producto como un trinomio.

a) $(x - 3)(x - 2) = xx - 3x - 2x + 6 = \boxed{x^2 - 5x + 6}$

b) $(n - 5)(n - 4) =$ ___

c) $(r - 4)(r - 9) =$

d) $(x - 5)(x - 6) =$

e) $(x - 8)(x - 10) =$

f) $(x - 2)(x - 15) =$

g) $(x - y)(x - 10) =$

h) $(x - 5)(x - n) =$

i) $(x - r)(x - 3) =$

Ejercicio 19. Exprese cada producto como un trinomio. Proceda como en los incisos a) y f).

a) $(x + 8)(x - 3) = x^2 + 8x - 3x - 24 = \boxed{x^2 + 5x - 24}$

b) $(x + 10)(x - 7) =$

c) $(x + 8)(x - 2) =$

d) $(x + 15)(x - 4) =$

e) $(x - 6)(x + 2) =$

f) $(x - 9)(x + 4) = x^2 - 9x + 4x - 36 = \boxed{x^2 - 5x - 36}$

g) $(x - 10)(x + 3) =$

h) $(x - 12)(x + 2) =$

i) $(x - 7)(x + 3) =$

j) $(x - 15)(x + 10) =$

Ejercicio 20. Escriba cada producto como un trinomio. Observe detenidamente los factores.

a) $(x + 7)(x + 3) =$

b) $(x - 7)(x - 3) =$

c) $(x + 7)(x - 3) =$

d) $(x - 7)(x + 3) =$

e) $(x + 10)(x + 4) =$

f) $(x - 10)(x - 4) =$

g) $(x + 10)(x - 4) =$

h) $(x - 10)(x + 4) =$

¿Qué observa usted de particular en este ejercicio? Coméntelo con sus compañeros o con el maestro. Si es posible, anote los comentarios y las conclusiones.

7. FACTORIZACION DE TRINOMIOS DE LA FORMA $x^2 + bx + c$

Trinomios de la forma $x + bx + c$ son, por ejemplo, los siguientes:

$$x^2 + 5x + 6$$

$$x^2 + 3x - 28$$

$$x^2 - 2x - 24$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$$

$$x^2 - .5 - .5$$

¿Puede usted señalar, en cada uno de los trinomios anotados, cuál es el valor de b y cuál es el valor de c?

Anteriormente hemos visto que al multiplicar dos binomios como $x + r$ y $x + s$, se obtiene como resultado un trinomio de la forma $x^2 + (r + s)x + rs$. De ahí que la factorización de un trinomio cono éste sea:

$$\boxed{x^2 + (r + s)x + rs = (x + r)(x + s)}$$

Ahora bien, si un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se puede escribir en la forma $x^2 + (r + s)x + rs$, entonces sus factores son $(x + r)$ y $(x + s)$. Esto es, si $b = r + s$ y $c = rs$, entonces $x^2 + bx + c = (x + r)(x + s)$.

$$\boxed{x^2 + bx + c = (x + r)(x + s)}$$

$$x^2 + \underbrace{(r + s)}x + \underbrace{rs} = (x + r)(x + s)$$

Ejemplo. El trinomio $x^2 + 7x + 10$ se puede escribir como $x^2 + (5 + 2)x + 5 \cdot 2$

$$x^2 + 7x + 10$$

$$x^2 + \overbrace{(5 + 2)}x + \overbrace{5.2}$$

¿Cuáles son aquí los números r y s?

Como se ve, estos números, r, s, son el 5 y el 2. Por lo tanto, la factorización de nuestro trinomio es:

$$x + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$$

Y comprobamos que esta factorización es correcta porque

$$(x + 5)(x + 2) = x^2 + 5x + 2x + 10 = \boxed{x^2 + 7x + 10}$$

Ejemplo. El trinomio $x^2 - 5x + 6$ se puede escribir como $x^2 + (-3 + -2)x + (-3)(-2)$.

$$x^2 \quad - \quad 5x \quad + \quad 6$$

$$x^2 + \overbrace{(-3 + -2)}x + \overbrace{(-3)(-2)}$$

Aquí r y s son los números -3 y -2. Por lo tanto,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

Comprobación: $(x - 3)(x - 2) = x^2 - 3x - 2x + 6 = \boxed{x^2 - 5x + 6}$.

Como habrá usted notado, el problema de factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se simplifica completamente si podemos

encontrar una pareja de números r, s que al multiplicarse den c y al sumarse den b.

Ejercicio 21. En cada inciso, encuentre los números r y s que multiplicados dan c y sumados dan b. Compruebe sus respuestas.

a)	$x^2 + 7x + 12$	$r = \boxed{3}$	$s = \boxed{4}$	$\boxed{3} \cdot \boxed{4} = 12$	$\boxed{3} + \boxed{4} = \boxed{7}$
b)	$x^2 + 9x + 18$	$r = \square$	$s = \square$	$\square \cdot \square = 18$	$\square + \square = \boxed{9}$
c)	$x^2 + 11x + 24$	$r = \square$	$s = \square$	$\square \cdot \square = 24$	$\square + \square = \boxed{11}$
d)	$x^2 + 16x + 60$	$r = \square$	$s = \square$	$\square \cdot \square = \square$	$\square + \square = \square$
e)	$x^2 + 17x + 30$	$r = \square$	$s = \square$	$\square \cdot \square = \square$	$\square + \square = \square$
f)	$x^2 + 12x + 35$	$r = \square$	$s = \square$	$\square \cdot \square = \square$	$\square + \square = \square$
g)	$x^2 + 2x - 15$	$r = \boxed{5}$	$s = \boxed{-3}$	$\square \cdot \square = \boxed{-15}$	$\boxed{5} + \boxed{-3} = \boxed{2}$
h)	$x^2 + 3x - 28$	$r = \square$	$s = \square$		
i)	$x^2 + 5x - 14$	$r = \square$	$s = \square$		
j)	$x^2 - 2x - 15$	$r = \square$	$s = \square$		
k)	$x^2 - 5x + 6$	$r = \square$	$s = \square$		
l)	$x^2 - 17x + 30$	$r = \square$	$s = \square$		
m)	$x^2 - 9x + 20$	$r = \square$	$s = \square$		
n)	$x^2 - 13x + 36$	$r = \square$	$s = \square$		

Ejercicio 22. Factorice los siguientes trinomios y compruebe cada factorización. Si es necesario, escríbalos primero en la forma $x^2 + (r + s)x + rs$.

a) $x^2 + 13x + 30 =$

b) $x^2 + 12x + 35 =$

c) $x^2 + 11x + 30 =$

d) $x^2 + 18x + 80 =$

e) $x^2 + -x + - =$

f) $x^2 - 9x + 20 =$

g) $x^2 - 11x + 30 =$

h) $x^2 - 5x + 6 =$

i) $x^2 - 14x + 40 =$

j) $x^2 + 5x - 24 =$

k) $x^2 + 6x - 16 =$

l) $x^2 + 3x - 70 =$

m) $x^2 - 10x - 24 =$

n) $x^2 - 4x - 21 =$

o) $x^2 - 5x - 150 =$

Ejercicio 23. Factorice cada trinomio y compruebe su factorización.

a) $x^2 + 10x + 21 =$

b) $x^2 - 10x + 21 =$

c) $x^2 + 4x - 21 =$

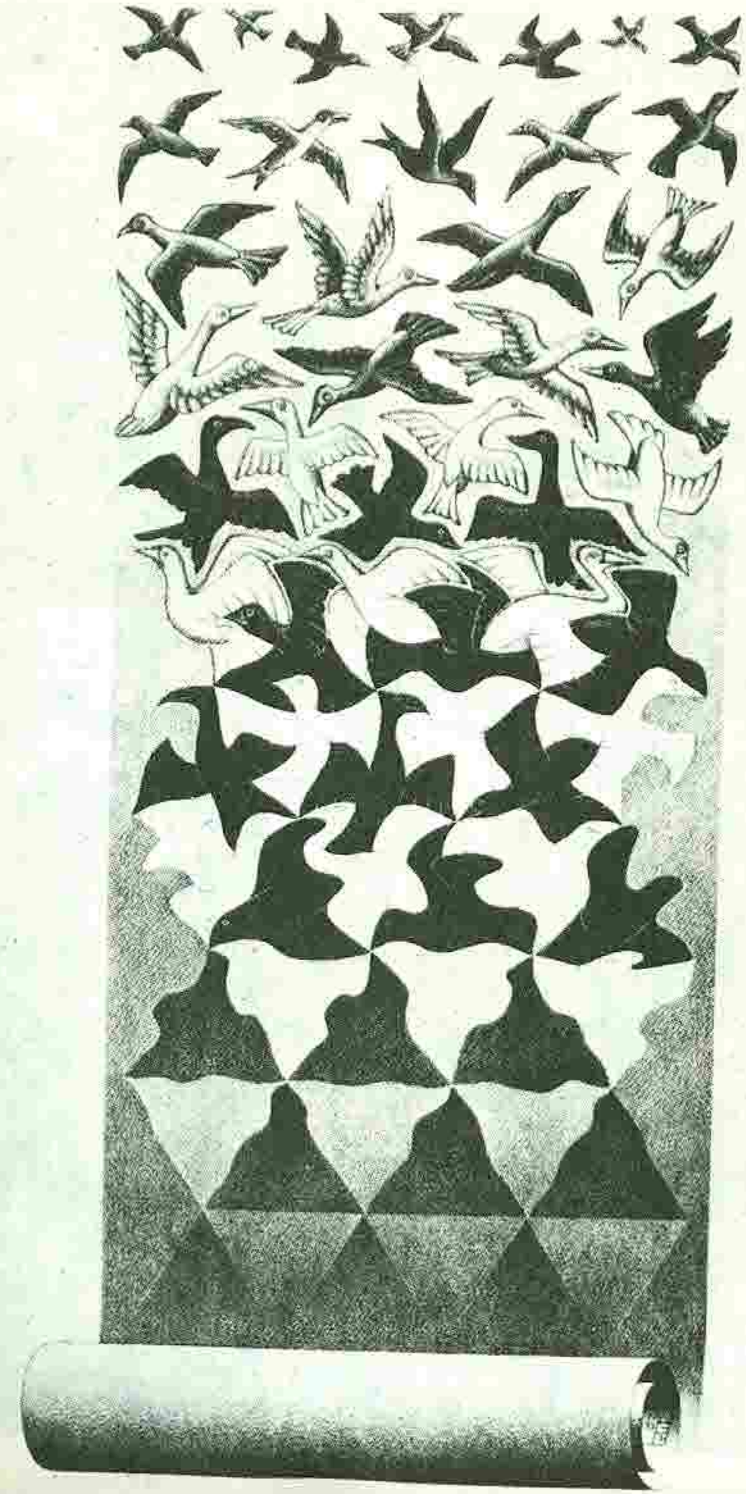
d) $x^2 - 4x - 21 =$

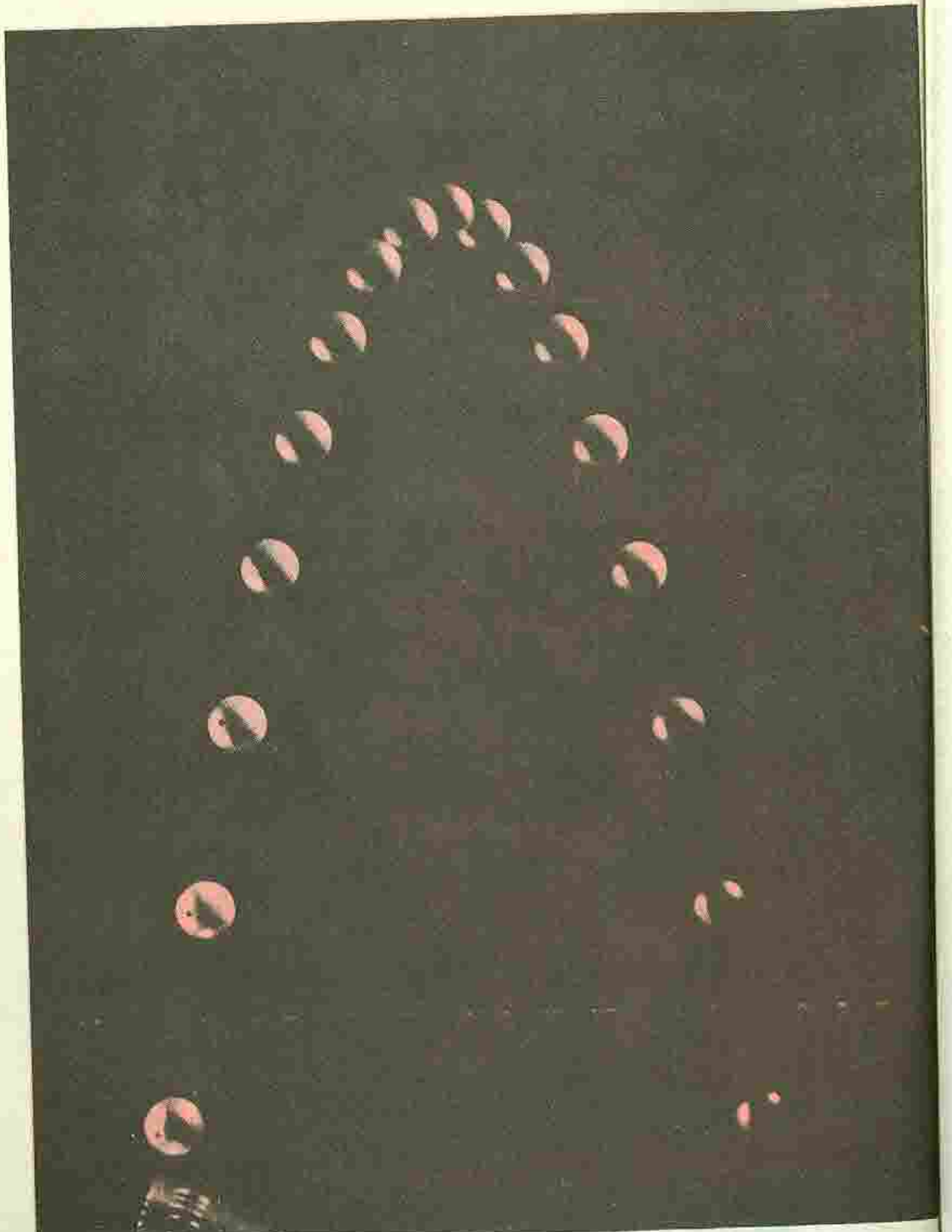
e) $x^2 + 8x + 15 =$

f) $x^2 - 8x + 15 =$

g) $x^2 + 2x - 15 =$

h) $x^2 - 2x - 15 =$





SEGUNDA UNIDAD

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

En cursos anteriores aprendimos a resolver ecuaciones de primer grado con una o dos incógnitas y con ellas resolvimos algunos problemas.

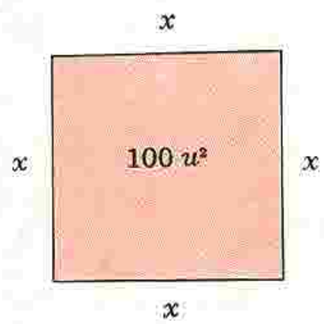
Ahora, en esta unidad, resolveremos **ecuaciones de segundo grado** con una incógnita. Estas ecuaciones son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) y se pueden resolver por medio de unas fórmulas. Para deducir estas fórmulas estudiaremos primero algunos tipos especiales de ecuaciones de segundo grado.

1. ECUACIONES DE LA FORMA $x^2 = n$ $(n > 0)$

Desde la antigüedad, con la aparición de la agricultura, el hombre ha tenido necesidad de resolver problemas sobre medición de longitudes y superficies.

Por ejemplo, en la ciudad de Sumer (Mesopotamia, 3 000 años A.C.) ya se planteaban y resolvían problemas como el siguiente:

Problema. El área de un terreno cuadrado es 100 unidades cuadradas. ¿Cuánto mide por lado dicho terreno?



Resolución. Si llamamos x a la medida de uno de los lados del cuadrado, entonces el área de ese cuadrado será x^2 y como esta área es 100 unidades cuadradas, tendremos que

$$\boxed{x^2 = 100}$$

La expresión $x^2 = 100$ es una **ecuación de segundo grado** y si la resolvemos podremos indicar la solución del problema.

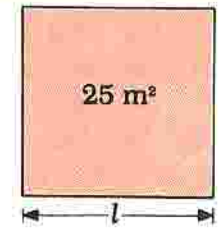
Esta ecuación $x^2 = 100$ indica que estamos buscando un número x que elevado al cuadrado sea 100. En este caso podemos calcularlo mentalmente. Ese número es 10, pues

$$\boxed{10^2 = 100}$$

Por consiguiente, el cuadrado mencionado en el problema mide 10 unidades por lado.

Ejercicio 1. En cada inciso, diga cuánto mide el lado del cuadrado.

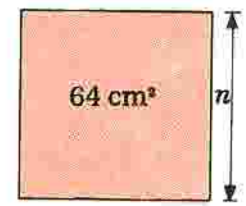
a)



Ecuación:

$l =$

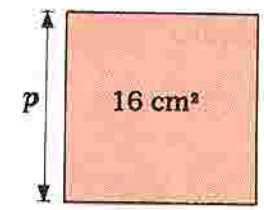
b)



Ecuación:

$n =$

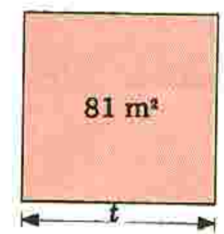
c)



Ecuación:

$p =$

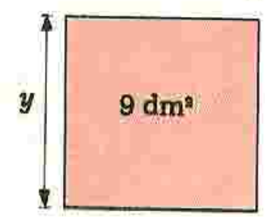
d)



Ecuación:

$t =$

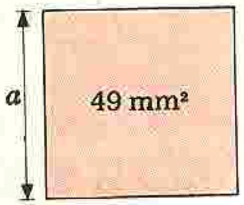
e)



Ecuación:

$y =$

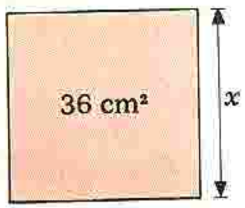
f)



Ecuación: ______

$a =$ ______

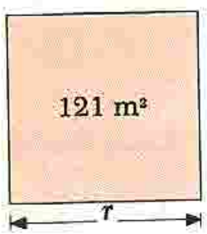
g)



Ecuación: ______

$x =$ ______

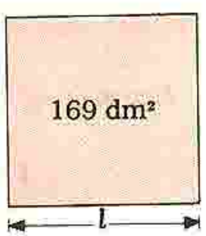
h)



Ecuación: ______

$r =$ ______

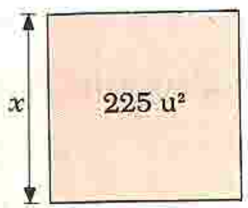
i)



Ecuación: ______

$l =$ ______

j)



Ecuación: ______

$x =$ ______

Dada la naturaleza del problema que estamos manejando, las soluciones que hemos dado a estas ecuaciones del tipo $x^2 = n$ han sido siempre números positivos.

Por otro lado, al número positivo que elevado al cuadrado nos da n se acostumbra llamarlo la **raíz cuadrada positiva de n** y simbolizarlo como $\sqrt{n}$.

Por consiguiente, la raíz cuadrada positiva de n es solución de la ecuación $x^2 = n$.

Si consideramos, por ejemplo, la ecuación $x^2 = 16$, estamos buscando la raíz cuadrada de 16. Esto es,

Si $x^2 = 16$, entonces $x = \sqrt{16} = 4$.

Ejercicio 2. En cada inciso, complete la expresión.

a) Si $x^2 = 36$, entonces $x = \sqrt{} =$ ______

b) Si $x^2 = 4$, entonces $x = \sqrt{} =$ ______

c) Si $t^2 = 9$, entonces $t = \sqrt{} =$ ______

d) Si $r^2 = 16$, entonces $r = \sqrt{} =$ ______

e) Si $a^2 = 49$, entonces $a = \sqrt{} =$ ______

f) Si $m^2 = \frac{4}{9}$, entonces $m = \sqrt{} =$ ______

g) Si $z^2 = \frac{25}{16}$, entonces $z = \sqrt{} =$ ______

h) Si $y^2 = 64$, entonces $y = \sqrt{} =$ ______

i) Si $n^2 = \frac{36}{81}$, entonces $n = \sqrt{} =$ ______

j) Si $p^2 = 169$, entonces $p = \sqrt{} =$ ______

Ejercicio 3. Complete las siguientes expresiones, tal como se hace en a) y en c).

a) Si $x = \sqrt{16}$, entonces $x^2 = \boxed{16}$

b) Si $y = \sqrt{4}$, entonces $y^2 =$

c) Si $a = \sqrt{\frac{4}{9}}$, entonces $a^2 = \boxed{\frac{4}{9}}$

d) Si $b = \sqrt{25}$, entonces $b^2 =$

e) Si $t = \sqrt{\frac{16}{36}}$ entonces $t^2 =$

f) Si $n = \sqrt{a}$, entonces $n^2 =$

g) Si $p = \sqrt{6}$, entonces $p^2 =$

h) Si $z = \sqrt{2}$, entonces $z^2 =$

i) Si $t = \sqrt{\frac{7}{3}}$, entonces $t^2 =$

j) Si $r = \sqrt{r^2}$, entonces $r^2 =$

La mayor parte de las ecuaciones de segundo grado que se nos presentan en la práctica no pueden resolverse mentalmente. Por ejemplo, ¿cuál es la solución positiva de la ecuación $x^2 = 1\,024$?, o sea, ¿cuál es la raíz cuadrada positiva de 1 024?

Para contestar esta pregunta podemos hacer uso de una calculadora electrónica como la que se ilustra.

O podemos también utilizar la tabla de raíces cuadradas que aparece al final de este libro (págs 307-310).

Ejercicio 4. Resuelva las siguientes ecuaciones usando una calculadora o su tabla de raíces cuadradas.

a) Si $x^2 = 1\,369$, entonces $x = \sqrt{1\,369} =$

b) Si $x^2 = 32.49$, entonces $x = \sqrt{32.49} =$

c) Si $x^2 = .25$, entonces $x = \sqrt{.25} =$

d) Si $t^2 = 17$, entonces $t = \sqrt{17} =$

e) Si $r^2 = 8$, entonces $r = \sqrt{} =$

f) Si $a^2 = 456$, entonces $a = \sqrt{} =$

g) Si $n^2 = 45.9$, entonces $n = \sqrt{} =$

h) Si $p^2 = 165$, entonces $p = \sqrt{} =$

i) Si $y^2 = 16.5$, entonces $y = \sqrt{} =$

j) Si $w^2 = .09$, entonces $w = \sqrt{} =$

Observación. Por lo general, las raíces que se dan en la tabla o en la calculadora son aproximaciones. Por ejemplo, en la tabla se indica que la raíz cuadrada positiva de 17 es 4.123; pero ocurre que $(4.123)^2$ no es 17, sino 16.999129.

Ejercicio 5. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 18.7$; $x =$

b) $x^2 = 312.8$; $x =$

c) $a^2 = 1\,385$; $a =$

d) $t^2 = 254$; $t =$

e) $r^2 = 589$; $r =$

f) $n^2 = 6.76$; $n =$

g) $p^2 = 54.76$; $p =$

h) $y^2 = 7\,056$; $y =$

i) $d^2 = .0053$; $d =$

j) $m^2 = .537$; $m =$

En los problemas que manejamos sobre áreas y lados de cuadrados, siempre hemos considerado raíces cuadradas positivas para indicar las soluciones. Y también al manejar las ecuaciones independientemente de los problemas, continuamos considerando raíces cuadradas positivas.

Sin embargo, esas mismas ecuaciones de segundo grado tienen soluciones negativas. Por ejemplo, vimos que la ecuación $x^2 = 100$ tiene por solución al número 10 porque $10^2 = 100$; pero también el número -10 es solución de esa ecuación porque $(-10)^2 = 100$.

En general, una ecuación de la forma $x^2 = n$, en donde n es un número positivo, tiene dos soluciones y éstas son simétricas.

Esto es,

> Si $x^2 = n$, entonces
>
> $x_1 = \sqrt{n}$ y $x_2 = -\sqrt{n}$

Ejercicio 6. Encuentre las soluciones negativas de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 36$; $x = -\sqrt{\boxed{36}} = \boxed{-6}$

b) $x^2 = 4$; $x = -\sqrt{} = $

c) $t^2 = 9$; $t = -\sqrt{} = $

d) $r^2 = 16$; $r = -\sqrt{} = $

e) $a^2 = 49$; $a = -\sqrt{} = $

f) $m^2 = \frac{4}{9}$; $m = -\sqrt{} = $

g) $z^2 = \frac{25}{16}$; $z = -\sqrt{} = $

h) $y^2 = 64$; $y = -\sqrt{} = $

i) $n^2 = \frac{36}{81}$; $n = -\sqrt{} = $

j) $p^2 = 169$; $p = -\sqrt{} = $

Ejercicio 7. Encuentre las dos soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones y compruebe sus resultados.

a) $a^2 = 746$; $a_1 =$ y $a_2 =$

b) $t^2 = 8.54$; $t_1 =$ y $t_2 =$

c) $r^2 = .076$; $r_1 =$ y $r_2 =$

d) $n^2 = 19.56$; $n_1 =$ y $n_2 =$

e) $p^2 = 57.76$; $p_1 =$ y $p_2 =$

f) $z^2 = .9216$; $z_1 =$ y $z_2 =$

g) $m^2 = .0074$; $m_1 =$ y $m_2 =$

h) $q^2 = 3969$; $q_1 =$ y $q_2 =$

i) $w^2 = .457$; $w_1 =$ y $w_2 =$

j) $h^2 = .0708$; $h_1 =$ y $h_2 =$

Algunas veces se nos presenta una ecuación como $3x^2 - 147 = 0$. Para resolverla basta con sumar 147 a sus dos miembros y después dividirlos entre 3. Así se llega a una ecuación de la forma $x^2 = n$, que ya sabemos resolver.

$$3x^2 - 147 = 0$$

$$3x^2 - 147 + 147 = 147$$

$$3x^2 = 147$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{147}{3}$$

$$\boxed{x^2 = 49}$$

Resuelva la ecuación $x^2 = 49$ y compruebe que las dos soluciones obtenidas también lo son de la ecuación $3x^2 - 147 = 0$

Ejercicio 8. Resuelva las siguientes ecuaciones.

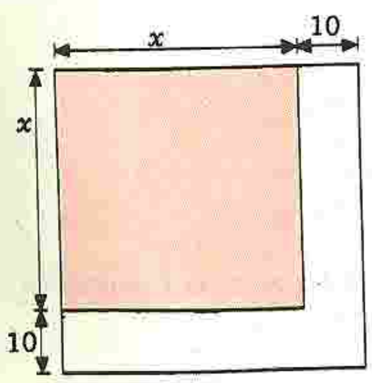
a)	$y^2 - 64 = 0$	$y_1 =$	y	$y_2 =$	
b)	$t^2 + 19 = 87$	$t_1 =$	y	$t_2 =$	
c)	$p^2 - 17.5 = 8.9$	$p_1 =$	y	$p_2 =$	
d)	$n^2 - 43.5 = -12.8$	$n_1 =$	y	$n_2 =$	
e)	$x^2 + 146 = 375$	$x_1 =$	y	$x_2 =$	
f)	$2y^2 - 19.6 = 0$	$y_1 =$	y	$y_2 =$	
g)	$5x^2 + 12.6 = 39.8$	$x_1 =$	y	$x_2 =$	
h)	$3z^2 - 25.2 = 0$	$z_1 =$	y	$z_2 =$	
i)	$7t^2 + 43.8 = 438.6$	$t_1 =$	y	$t_2 =$	
j)	$6a^2 + 27.9 = 308.7$	$a_1 =$	y	$a_2 =$	

2. ECUACIONES DE LA FORMA $(x + d)^2 = n \ (n > 0)$

En la sección anterior hemos visto cómo un problema relacionado con el cuadrado nos conduce a estudiar un tipo de ecuaciones de segundo grado: las ecuaciones de la forma $x^2 = n$.

Ahora analizaremos otros dos problemas, también acerca de cuadrados, que nos llevarán a manejar otro tipo de ecuaciones cuadráticas: ecuaciones de la forma $(x + d)^2 = n$.

Problema 1. El terreno cuadrado que se ilustra abajo tiene una área de 2 500 metros cuadrados; pero se desea utilizar únicamente la parte que aparece coloreada en el dibujo. Si x es la medida del lado de ese cuadrado que se va a usar, ¿qué medida es x?



Area de todo el terreno: 2 500 m²

Resolución. Puesto que el lado del terreno completo es $x + 10$ y su área es 2 500 m², podemos establecer la ecuación

$$\boxed{(x + 10)^2 = 2\,500}$$

Al resolver esta ecuación de segundo grado sabremos qué número es x y con eso podremos dar la respuesta al problema.

La ecuación nos indica que el número $x + 10$ elevado al cuadrado da 2 500. Entonces, ese número debe ser la raíz cuadrada positiva de 2 500, o bien, su simétrico. Esto es,

$$\boxed{x + 10 = \sqrt{2\,500}} \quad \text{o bien,} \quad \boxed{x + 10 = -\sqrt{2\,500}}$$

En la primera expresión x es el número 40:

$$x + 10 = \sqrt{2\,500}$$

$$x + 10 = 50$$

$$\boxed{x = 40}$$

En la segunda expresión x es el número -60:

$$x + 10 = -\sqrt{2\,500}$$

$$x + 10 = -50$$

$$\boxed{x = -60}$$

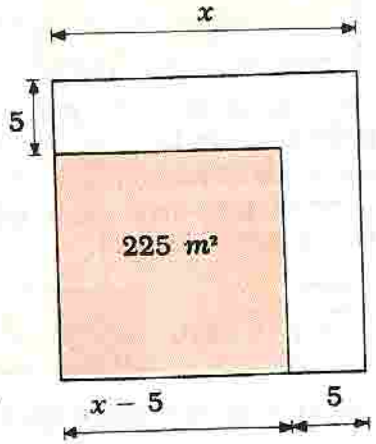
Así que la ecuación $(x + 10)^2 = 2\,500$ tiene dos soluciones:

$$\boxed{x_1 = 40} \quad \text{y} \quad \boxed{x_2 = -60}$$

Pero como el problema se refiere a la longitud de un cuadrado, no podemos usar la solución negativa, tendremos que usar la solución positiva para dar la respuesta así:

Respuesta: x es 40 metros.

Problema 2. El área del cuadrado de color, en la siguiente ilustración, es 225 metros cuadrados. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado mayor?



Resolución. Como el lado del cuadrado coloreado es $x - 5$ y su área es 225 m^2, podemos establecer la ecuación

$$\boxed{(x - 5)^2 = 225}$$

Si resolvemos esta ecuación de segundo grado, sabremos cuánto vale x. Es decir, sabremos cuánto mide el lado del cuadrado mayor.

Puesto que $x - 5$ elevado al cuadrado da 225, ese número $x - 5$ debe ser la raíz cuadrada positiva o su simétrico. Esto es,

$$\boxed{x - 5 = -\sqrt{225}} \quad \text{o bien,} \quad \boxed{x - 5 = \sqrt{225}}$$

Si $x - 5 = \sqrt{225}$, entonces x es el número 20:

$$x - 5 = \sqrt{225}$$

$$x - 5 = 15$$

$$\boxed{x = 20}$$

Si $x - 5 = -\sqrt{225}$, entonces x es el número -10:

$$x - 5 = -\sqrt{225}$$

$$x - 5 = -15$$

$$x = -10$$

O sea que las dos soluciones de la ecuación $(x - 5)^2 = 225$ son:

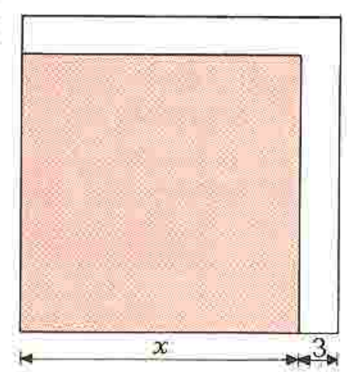
$$\boxed{x_1 = 20} \quad \text{y} \quad \boxed{x_2 = -10.}$$

Pero para dar la respuesta al problema usaremos nada más la solución positiva.

Respuesta: El lado del cuadrado mayor mide 20 metros.

Ejercicio 9. Encuentre el valor de x en cada uno de los cuadrados que se ilustran. (Las medidas se dan en metros)

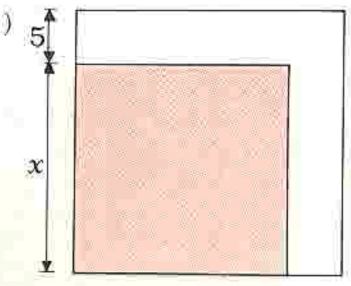
a)



Area total: 625 m^2

$x =$

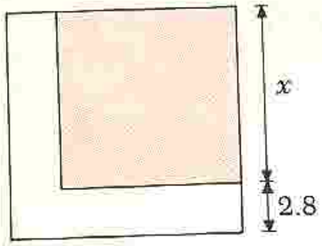
b)



Area total: 400 m^2

$x =$

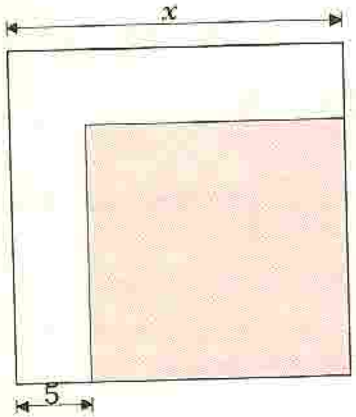
c)



Area total: 163.84 m²

$x =$

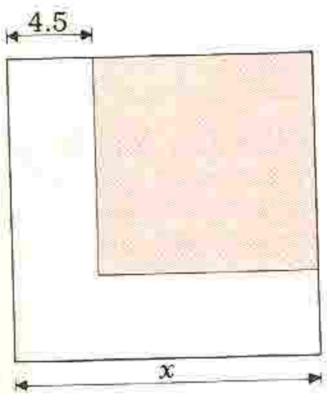
d)



Area del cuadrado rojo: 289 m^2

$x =$

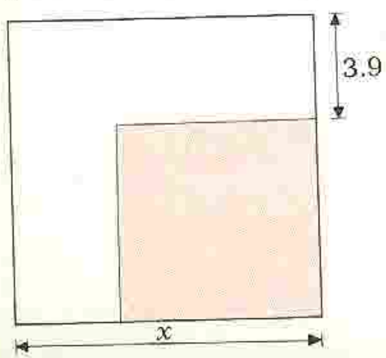
e)



Area del cuadrado rojo: 132.25 m²

$x =$

f)



Area del cuadrado rojo: 57.76 m²

$x =$

Ejercicio 10. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $(x + 4)^2 = 36$ $\quad x_1 =$ $\quad x_2 =$

b) $(x + 7)^2 = 100$ $\quad x_1 =$ $\quad x_2 =$

c) $(t + 3)^2 = 529$ $\quad t_1 =$ $\quad t_2 =$

d) $(r + 2.6)^2 = 784$ $\quad r_1 =$ $\quad r_2 =$

e) $\left(z + \frac{2}{3}\right)^2 = 49$ $\quad z_1 =$ $\quad z_2 =$

f) $(x - 2)^2 = 1\,600$ $\quad x_1 =$ $\quad x_2 =$

g) $(x - 7)^2 = 961$ $\quad x_1 =$ $\quad x_2 =$

h) $(f - 1.5)^2 = 324$ $\quad f_1 =$ $\quad f_2 =$

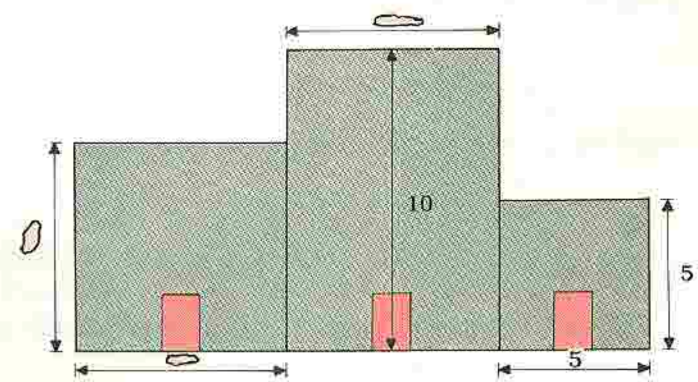
i) $(z - 13)^2 = 1\,024$ $\quad z_1 =$ $\quad z_2 =$

j) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 169$ $\quad x_1 =$ $\quad x_2 =$

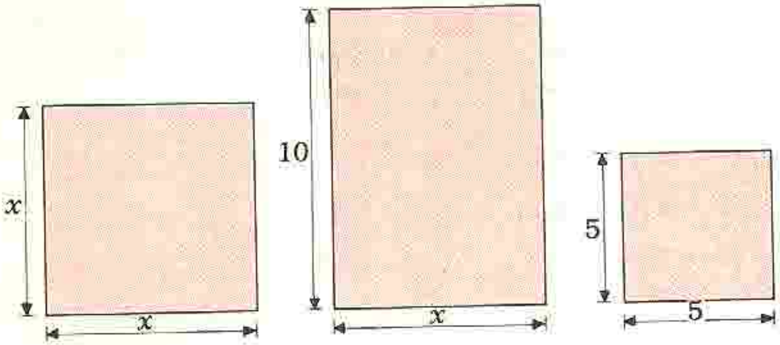
3. ECUACIONES DE LA FORMA $x^2 + 2xd + d^2 = n$ $(n > 0)$

Para manejar ecuaciones como la que aparece en el siguiente problema utilizaremos la habilidad que ya hemos adquirido en la resolución de ecuaciones de la forma $(x + d)^2 = n$.

Problema. En el plano de la fachada de un edificio antiguo, un arqueólogo observa que algunos datos se han borrado. (Vea la figura de abajo.) ¿Cuáles son esos datos, si se sabe que todas las medidas que faltan son iguales y que además el área de toda la fachada es de 144 m²?



Resolución. Podemos considerar que la fachada está formada por las regiones rectangulares siguientes:



El área de la fachada será entonces:

$$\boxed{x^2} + \boxed{10x} + \boxed{5^2}$$

Como además sabemos que esa área es de 144 metros cuadrados, podemos escribir la siguiente ecuación:

$$\boxed{x^2 + 10x + 25 = 144}$$

Para resolver esta ecuación es importante observar que su primer miembro es un **trinomio cuadrado perfecto,** el cual podemos factorizar así:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Por consiguiente, en lugar de manejar la ecuación

$$x^2 + 10x + 25 = 144,$$

podemos manejar la ecuación $(x + 5)^2 = 144$, que ya sabemos resolver.

En efecto, si usted utiliza el método usado en el párrafo anterior obtendrá las siguientes soluciones:

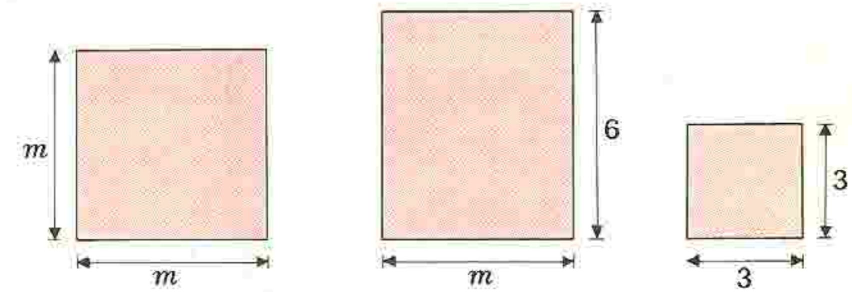
$$\boxed{x_1 = 7} \quad y \quad \boxed{x_2 = -17} \quad \text{(Compruébelo)}$$

Así encontramos que el dato borrado en el plano es: 7 metros.

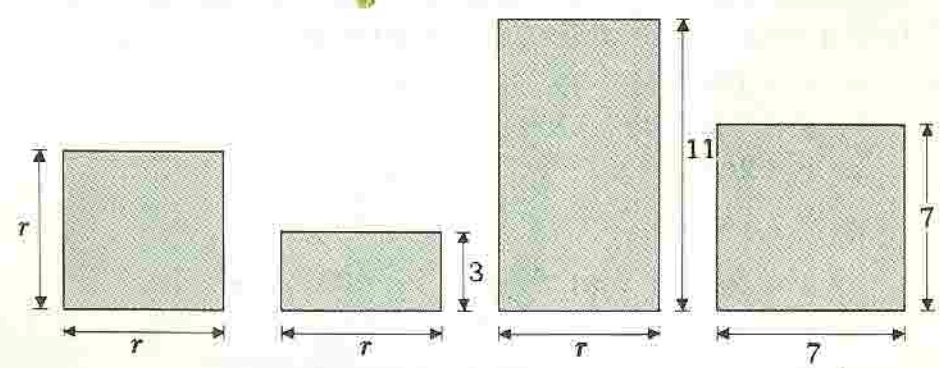
La resolución del problema anterior nos sugiere un método para resolver ecuaciones cuyo primer miembro sea un trinomio cuadrado perfecto: Simplemente se factoriza el primer miembro de la ecuación dada y se resuelve con el procedimiento ya conocido.

Ejercicio 11. Resuelva los siguientes problemas.

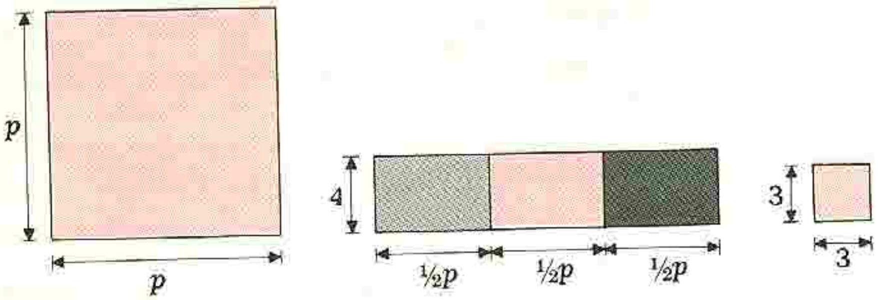
a) La suma de las áreas de los tres rectángulos que se ilustran es de 64 m^2. ¿Cuál es el valor de m?



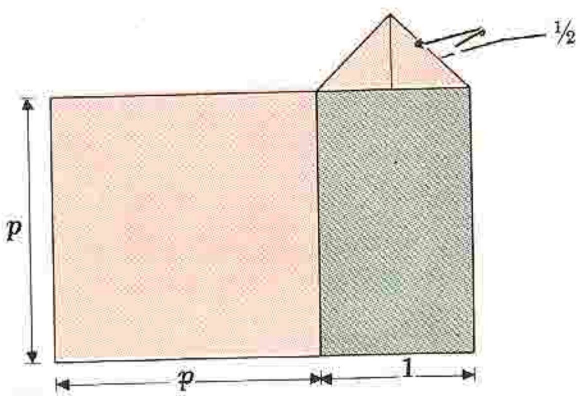
b) La suma de las áreas de los cuatro rectángulos siguientes es 169 metros cuadrados. ¿Cuál es el valor de r?



c) La suma de las áreas de las figuras siguientes es 225 m^2. ¿Cuál es el valor de p?



d) El área de la figura de abajo es $6\frac{1}{4}$ m^2. ¿Cuál es el valor de p?



Ejercicio 12. En cada una de las siguientes ecuaciones, primero cerciórese que el primer miembro sea un trinomio cuadrado perfecto y luego busque sus soluciones y compruébelas.

a) $x^2 + 10x + 25 = 49$ $\qquad x_1 =$ $\qquad x_2 =$

b) $y^2 + 14y + 49 = 625$ $\qquad y_1 =$ $\qquad y_2 =$

c) $t^2 - 2t + 1 = 9$ $\qquad t_1 =$ $\qquad t_2 =$

d) $r^2 - r + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ $\qquad r_1 =$ $\qquad r_2 =$

e) $n^2 + 6n + 36 = 81$ $\qquad n_1 =$ $\qquad n_2 =$

f) $x^2 - .6x + .09 = 5.29$ $\qquad x_1 =$ $\qquad x_2 =$

g) $p^2 - 9.6p + 23.04 = 282.24$ $\qquad p_1 =$ $\qquad p_2 =$

h) $z^2 + 3z + \frac{9}{4} = 10$ $\qquad z_1 =$ $\qquad z_2 =$

i) $q^2 + 5q + \frac{25}{9} = 4$ $\qquad q_1 =$ $\qquad q_2 =$

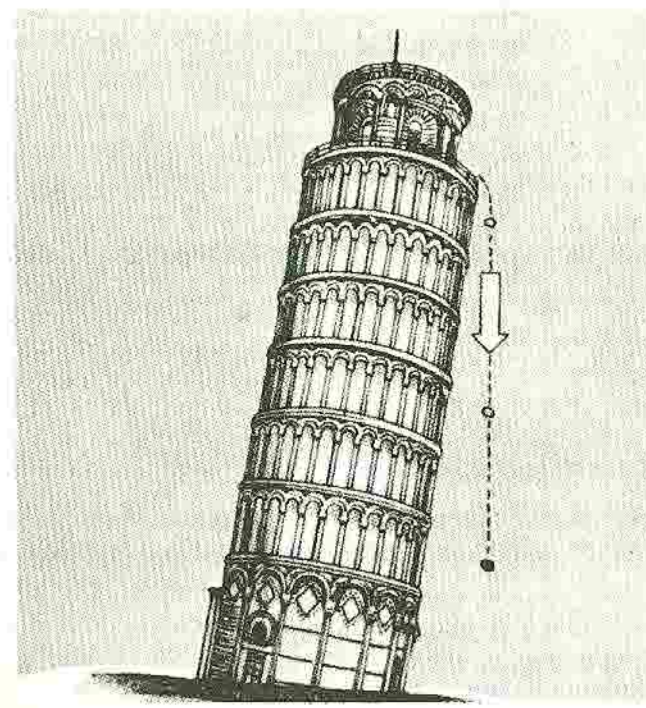
j) $x^2 - 12.4x + 38.44 = 9.61$ $\qquad x_1 =$ $\qquad x_2 =$

4. ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + bx + c = 0$

En su libro "Diálogo sobre dos nuevas ciencias" (1637), Galileo Galilei estudia por primera vez con toda precisión la caída libre de los cuerpos y señala fórmulas para resolver problemas relativos a dicho movimiento. Por ejemplo, para calcular el tiempo t que tarda en caer un objeto que ha sido lanzado desde una altura a, con una velocidad inicial v, aplicaba la fórmula:

$$\boxed{5t^2 + vt - a = 0}$$

Con esta fórmula resolvía problemas como el siguiente:



Problema. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo un objeto que es lanzado desde la Torre de Pisa (40 m de altura) con una velocidad inicial de 10 m por seg?

Nosotros también podemos resolver ese problema.

Resolución. Al sustituir en la fórmula los datos del problema obtenemos la siguiente ecuación cuadrática:

$$5t^2 + vt - a = 0$$

$$\boxed{5t^2 + 10t - 40 = 0}$$

Para resolver esta ecuación podemos proceder de la siguiente manera:

1) Multiplicamos por $\frac{1}{5}$ sus dos miembros:

$$\boxed{\frac{1}{5}}(\boxed{5}t^2 + 10t - 40) = \frac{1}{5}(0)$$

$$\boxed{t^2 + 2t - 8 = 0}$$

$\left(\frac{1}{5}\right.$ y 5 son inversos multiplicativos$\left.\right)$

2) Sumamos 8 a los dos miembros de la ecuación obtenida

$$t^2 + 2t - \boxed{8} + \boxed{8} = 0 + 8$$

$$\boxed{t^2 + 2t = 8}$$

(-8 y 8 son inversos aditivos).

3) Sumamos el cuadrado de 1 a los dos miembros de la ecuación (así tendremos que el primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto)

$$t^2 + 2t + \boxed{(1)^2} = 8 + \boxed{(1)^2}$$

4) Factorizamos ese trinomio:

$$(t + 1)^2 = 8 + 1$$

$$\boxed{(t + 1)^2 = 9}$$

Así llegamos a una ecuación que ya sabemos resolver:

Si $t + 1 = \sqrt{9}$, entonces $\boxed{t_1 = 2}$ y

Si $t + 1 = -\sqrt{9}$, entonces $\boxed{t_2 = -4}$

De estas dos soluciones de la ecuación, la que da respuesta al problema es la solución positiva.

El objeto tarda 2 segundos en llegar al suelo.

Ejercicio 13. Resuelva usted la ecuación $2x^2 - 22x + 56 = 0$, completando las expresiones.

1) Se multiplican los dos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de $\boxed{}$ (que es el coeficiente de x^2).

$$\boxed{}(2x^2 - 22x + 56) = \boxed{}(0)$$

$$\boxed{}$$

2) Se suma a los dos miembros de la ecuación así obtenida el inverso aditivo de $\boxed{}$

$$x^2 - 11x + 28 + () = 0 + ()$$

$$\boxed{}$$

3) Se suma a los dos miembros de esta nueva ecuación el cuadrado de $\boxed{}$ para formar un trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro.

$$x^2 - 11x + \boxed{} = -28 + \boxed{}$$

4) Se factoriza ese trinomio cuadrado perfecto

$$(\boxed{})^2 = -\frac{112}{4} + \frac{121}{4}$$

$$(x - \boxed{})^2 = \frac{9}{4}$$

5) Se resuelve esta ecuación y se obtienen sus dos soluciones

$$x_1 = \boxed{}$$

$$x_2 = \boxed{}$$

$$x_1 = \boxed{} \qquad x_2 = \boxed{}$$

Compruebe estas soluciones en la ecuación $2x^2 - 22x + 56 = 0$.

Ejercicio 14. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2 - 6x - 45 = 0$ $\qquad x_1 = \boxed{}$ $\quad x_2 = \boxed{}$

b) $4x^2 - 4x - 8 = 0$ $\qquad x_1 = \boxed{}$ $\quad x_2 = \boxed{}$

c) $x^2 - 5x + 4 = 0$ $\qquad x_1 = \boxed{}$ $\quad x_2 = \boxed{}$

d) $2x^2 + 4x - 48 = 0$ $\qquad x_1 = \boxed{}$ $\quad x_2 = \boxed{}$

e) $6x^2 - 48x + 42 = 0$ $\qquad x_1 = \boxed{}$ $\quad x_2 = \boxed{}$

f) $5x^2 + 30x - 200 = 0$ $\qquad x_1 = \boxed{}$ $\quad x_2 = \boxed{}$

g) $x^2 - x - 12 = 0$ $\qquad x_1 = \boxed{}$ $\quad x_2 = \boxed{}$

Toda ecuación de segundo grado de la forma

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \qquad (a \neq 0)$$

puede resolverse de manera análoga.

1) Se multiplican los dos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de a.

$$\boxed{\frac{1}{a}}(\boxed{a}x^2 + bx + c) = \frac{1}{a}(0)$$

$$\boxed{x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0}$$

2) Se suma a los dos miembros de la ecuación el inverso aditivo del término independiente

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \boxed{\left(-\frac{c}{a}\right)} = 0 + \boxed{\left(-\frac{c}{a}\right)}$$

$$\boxed{x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}}$$

3) Se forma un trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro sumando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a los dos miembros:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \boxed{\left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \boxed{\left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{c}{a}$$

4) Se factoriza ese trinomio

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

5) Se resuelve la ecuación obtenida.

Por definición de raíz cuadrada positiva, tenemos que

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} +$$

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Además, tenemos que

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

En virtud de que cualquier ecuación de segundo grado puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, las dos últimas expresiones son fórmulas que nos permiten obtener las soluciones.

Ejemplo. Resolvamos la ecuación $3x^2 + 12x - 36 = 0$ usando las fórmulas.

Como en la ecuación dada tenemos que $a = 3$, $b = 12$ y $c = -36$, sustituimos estos valores en las fórmulas y obtenemos

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-12 + \sqrt{12^2 - 4(3)(-36)}}{2(3)} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-12 - \sqrt{12^2 - 4(3)(-36)}}{2(3)} = -6$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $3x^2 + 12x - 36 = 0$ son: $\boxed{x_1 = 2}$ y $\boxed{x_2 = -6}$. (Compruébelo.)

Ejercicio 15. Aplique las fórmulas dadas para resolver las siguientes ecuaciones.

a) $2x^2 - 12x + 16 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
b) $4x^2 + 32x - 36 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
c) $8x^2 - 2x - 3 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
d) $3x^2 + 5x + 2 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
e) $6x^2 + 7x - 3 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
f) $4x^2 - 6x + 2 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
g) $4x^2 + 5x - 6 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
h) $3x^2 - 24x + 36 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
i) $x^2 + x - 20 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
j) $2x^2 + 8x - 21 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
k) $2.8x^2 - 8.4x - 42 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
l) $3.9x^2 + 39 + 93.6 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
m) $2x^2 - 1.8x - 18.2 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
n) $x^2 - 10.7x + 27.3 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
o) $6.9x^2 - 11.73x - 192.51 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
p) $x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{14}{3} = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
q) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{18}{25} = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
r) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{9}{2} = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
s) $4x^2 - 4x - 15 = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
t) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{7}x + \frac{50}{49} = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$

Ejercicio 16. Aplique las fórmulas dadas para resolver las siguientes ecuaciones. (Sugerencia: primero escriba cada ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.)

a) $21 + x^2 = 10x$ $x_1 =$ $x_2 =$

b) $2x^2 - 3x = 0$ $x_1 =$ $x_2 =$

c) $5x^2 = -8x$ $x_1 =$ $x_2 =$

d) $16.1 = 4.7x + x^2$ $x_1 =$ $x_2 =$

e) $1.2x^2 - 20.4 = 0$ $x_1 =$ $x_2 =$

f) $0 = 12x - 3x^2$ $x_1 =$ $x_2 =$

g) $-2.6x = 12 - x^2$ $x_1 =$ $x_2 =$

h) $-9\,907.2 = -4.3x^2$ $x_1 =$ $x_2 =$

i) $\frac{7}{3} = \frac{12}{5}x - \frac{3}{5}x^2$ $x_1 =$ $x_2 =$

j) $\frac{3}{5}x = 4 - \frac{2}{5}x^2$ $x_1 =$ $x_2 =$

Problemas

1. El producto de dos números consecutivos es 182, ¿cuáles son esos números?

2. El producto de dos números pares consecutivos es 288, ¿cuáles son esos números?

3. El producto de dos números impares consecutivos es 1 935. ¿Cuáles son dichos números?

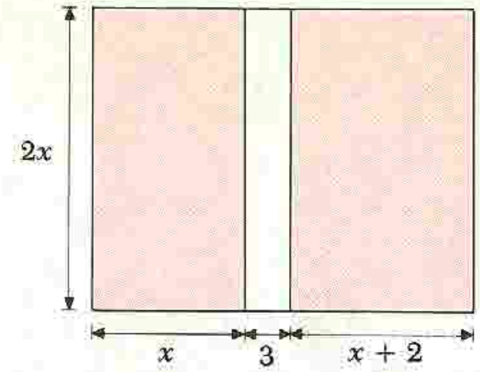
4. La suma de dos números es -7 y su producto es -120, ¿cuáles son esos números?

5. La suma de dos números es -32 y su producto es 247, ¿cuáles son esos números?

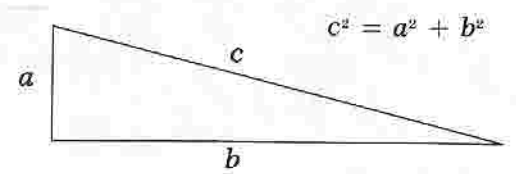
6. Determine las dimensiones de una parcela rectangular cuya área es de 7 144 m² y tiene 18 m más de largo que de ancho.

7. El área de un terreno rectangular es de 260 m². Si el largo es 6 m mayor que el doble de su ancho, ¿cuánto mide de largo y de ancho dicho terreno?

8. El área de la figura es de 500 m². ¿Cuáles son las medidas de los lados de la figura?



9. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 2 cm más que un cateto y 49 cm más que el otro cateto, ¿cuáles son las medidas de sus lados? (Recuerde usted que el Teorema de Pitágoras nos dice que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.)



10. El área de un triángulo rectángulo es 102 cm². Si uno de sus catetos es 7 cm menor que el cuádruplo del otro cateto, ¿cuánto mide cada uno de los catetos?

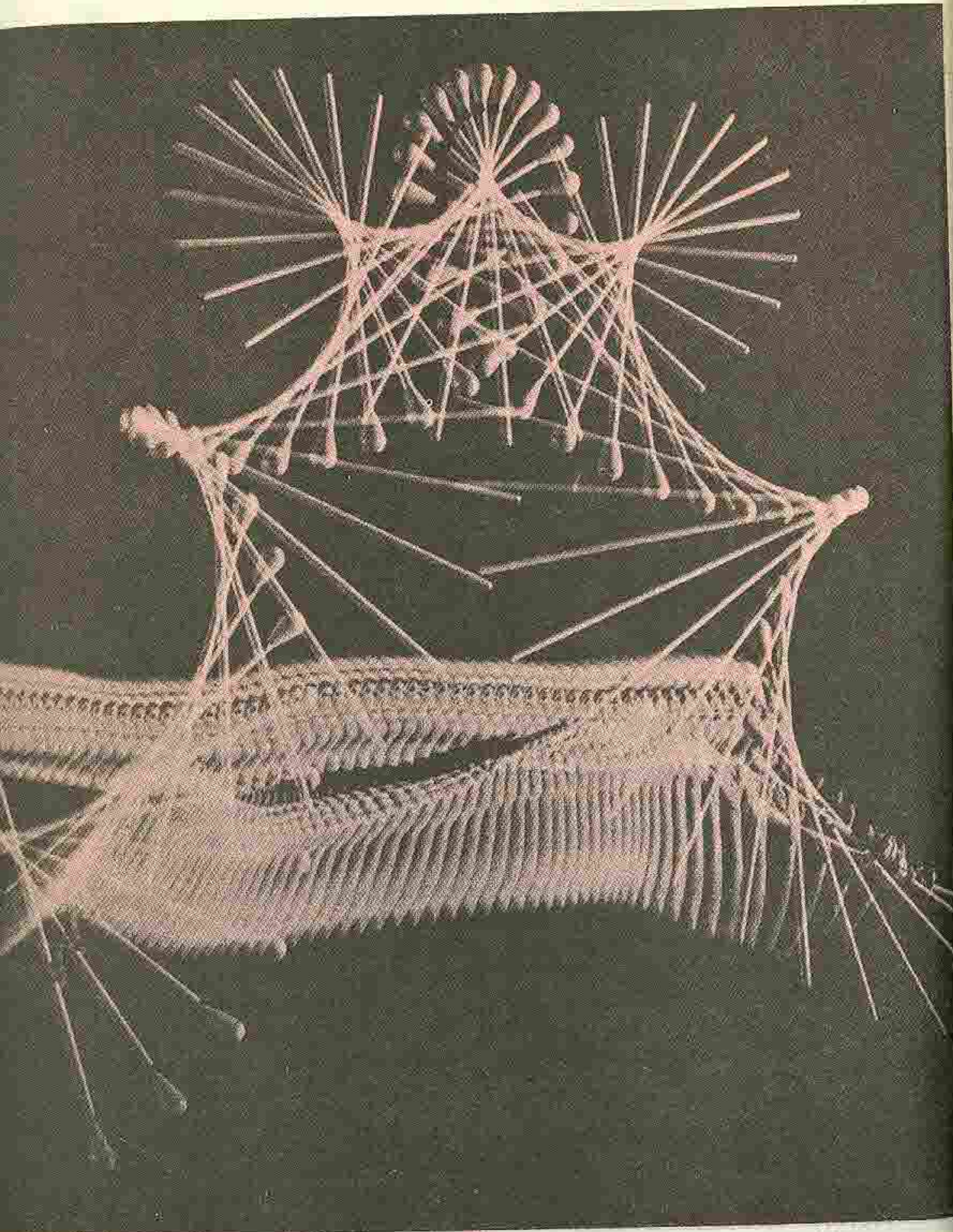
11. Un triángulo tiene una área de 152 cm². Si la altura es 5 cm menor que el triple de la base, ¿cuánto miden la base y la altura de dicho triángulo?

12. Calcule el tiempo que tarda en llegar al suelo un objeto que se lanza desde una altura de 50 m con una velocidad inicial de 15 m por seg.

13. Calcule el tiempo que tarda en llegar al suelo un objeto que se lanza desde una altura de 70 m con una velocidad inicial de 20 m por seg.

14. Desde una altura de 400 m se deja caer un objeto (considere que su velocidad inicial es cero). ¿En cuántos segundos llega al suelo?

15. Calcule el tiempo que tarda en llegar al suelo un objeto que se deja caer desde una altura de 320 m.



TERCERA UNIDAD

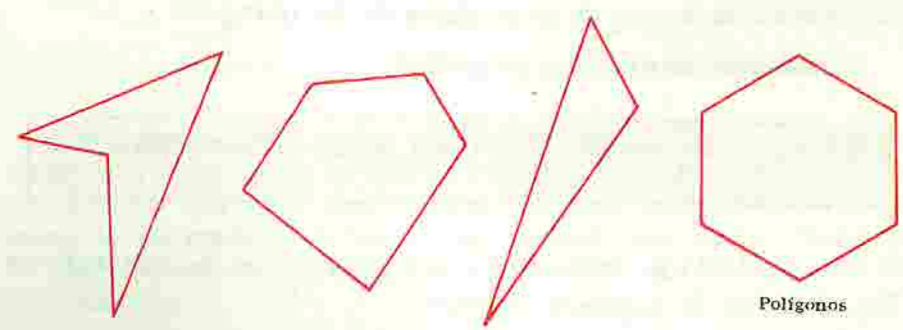
TRIANGULOS Y CUADRILATEROS (CONGRUENCIA)

Esta unidad está dedicada esencialmente al estudio de la congruencia de figuras geométricas. En especial, la congruencia de triángulos y polígonos. Más precisamente, en esta unidad

- Se analiza la congruencia de triángulos y se establecen tres criterios de congruencia.
- Utilizando éstos se estudian los triángulos isósceles.
- Se trata el teorema de Pitágoras y algunas aplicaciones.
- Utilizando los criterios de congruencia de triángulos se demuestran algunas de las propiedades básicas de los paralelogramos y en particular, de los rombos, los rectángulos y cuadrados.

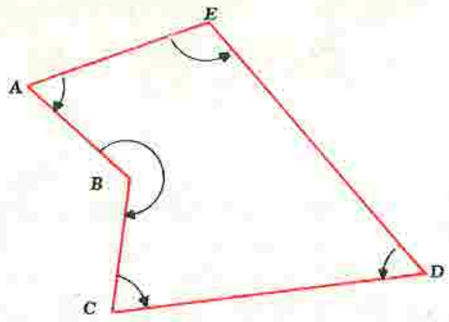
1. POLIGONOS

Entre las figuras geométricas más simples están los **polígonos** (del griego *polygonos;* de *polys*, mucho, y *gonía*, ángulo).



Polígonos

En un polígono podemos distinguir sus **vértices**, sus **lados** y sus **ángulos**. Por ejemplo, en el polígono ilustrado a continuación, los vértices son los puntos A, B, C, D y E; los lados son los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, etc. y los ángulos son los indicados en la figura.



El número de vértices, de lados y de ángulos es el mismo.

Los polígonos pueden clasificarse según el número de lados. Así se habla de

triángulos	(3)	octágonos	(8)
cuadriláteros	(4)	nonágonos	(9)
pentágonos	(5)	decágonos	(10)
exágonos	(6)	undecágonos	(11)
eptágonos	(7)	dodecágonos	(12)

Con mucha frecuencia, el estudio de polígonos se reduce al estudio de triángulos. Por ello, los triángulos son muy importantes.

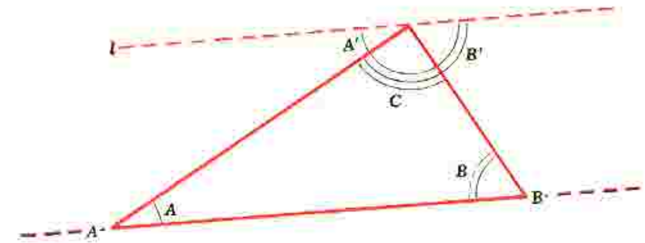
Para ilustrar esto, veremos ahora algunos resultados que se refieren a la suma de las medidas de los ángulos de un polígono y como éstos pueden deducirse de propiedades de los triángulos.

Recordemos la siguiente propiedad:

La suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 180°.

Este resultado se demostró en el segundo curso de matemáticas (Pág. 252) de la siguiente manera:

Consideramos un triángulo ABC y trazamos la recta l que pasa por C y es paralela a $\overline{AB}$:



Por ser ángulos alternos internos entre paralelas, tenemos que

$$\measuredangle A = \measuredangle A' \quad \text{y} \quad \measuredangle B = \measuredangle B'.$$

y como

$$\measuredangle A' + \measuredangle C + \measuredangle B' = 180°,$$

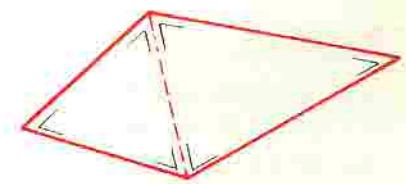
tenemos que

$$\measuredangle A + \measuredangle C + \measuredangle B = 180°.$$

Veremos a continuación cómo, utilizando este resultado, podemos resolver el problema análogo para cualquier polígono. Empecemos con cuadriláteros.

Consideremos un cuadrilátero cualquiera. Al trazar una diagonal queda triangulado:

Cuadrilátero

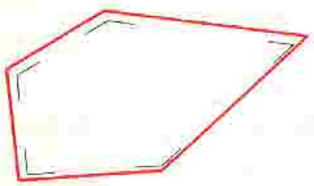


Cuadrilátero triangulado

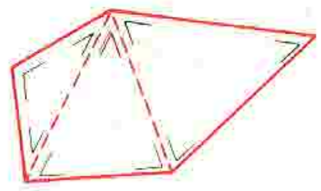
Observemos que al sumar las medidas de los cuatro ángulos del cuadrilátero obtenemos lo mismo que al sumar las medidas de los seis ángulos obtenidos; tres de cada triángulo. Ahora bien, como la suma de las medidas de los ángulos de cada uno de los triángulos es 180°, obtenemos, en total, $2 \times 180° = 360°$. Es decir, hemos demostrado que

La suma de las medidas de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.

El razonamiento que hemos hecho para cuadriláteros se puede repetir para polígonos convexos de cualquier número de lados. Por ejemplo, consideremos un pentágono y lo triangulamos trazando dos diagonales:



Cuadrilátero



Cuadrilátero triangulado

La suma de las medidas de los cinco ángulos de un pentágono es igual a la suma de las medidas de todos los ángulos que aparecen en la triangulación. Como hay 3 triángulos, dicha suma es

$$3 \times 180^\circ = 540^\circ.$$

Así pues:

La suma de las medidas de los ángulos de un pentágono es $3 \times 180^\circ = 540^\circ$.

Ejercicio 1.

a) ¿Cuántas diagonales hay en un exágono que tengan un extremo en un mismo vértice?

b) ¿Y en un polígono de 7 lados?

Ejercicio 2. Utilizando las respuestas del ejercicio anterior demuestre que:

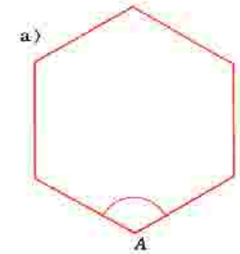
a) La suma de las medidas de los ángulos de un exágono convexo, es $4 \times 180^\circ$.

b) La suma de las medidas de los ángulos de un polígono convexo de 7 lados es $5 \times 180^\circ$.

Ejercicio 3. Recordando que en un polígono regular todos los ángulos miden lo mismo y utilizando los resultados anteriores encuentre:

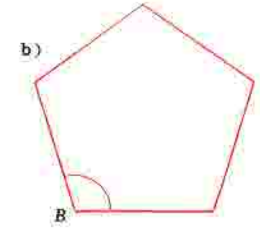
a) La medida de cada ángulo de un exágono regular.

b) La medida de cada ángulo de un pentágono regular.



Exágono regular

$\measuredangle A =$



Pentágono regular

$\measuredangle B =$

2. CONGRUENCIA

En los cursos anteriores de matemáticas se habló varias veces de congruencia. Se dijo que por "figuras congruentes" se entendía "figuras que tienen la misma forma y el mismo tamaño".

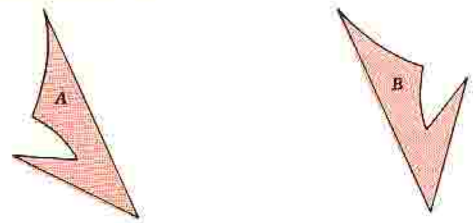
En el primer curso se precisó el significado de estas frases en el caso de que las figuras fueran segmentos o ángulos. Se dijo que

Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.
Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

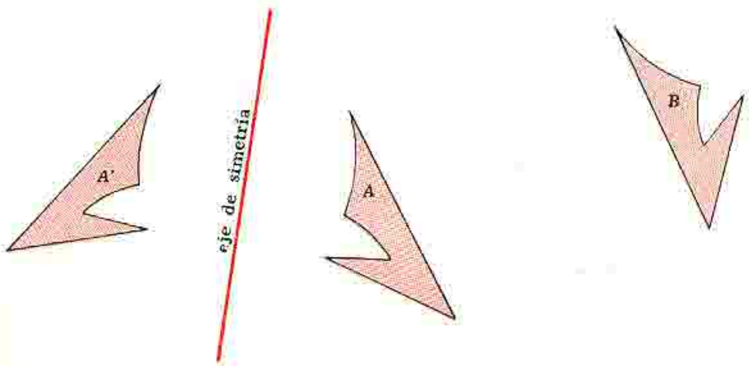
Después, en el segundo curso, al estudiar los conceptos de traslación, simetría axial y rotación, se dio una definición más general de congruencia de figuras planas. Se dijo que

Dos figuras del plano son congruentes si se puede transformar una en la otra mediante traslaciones, rotaciones y simetrías axiales.

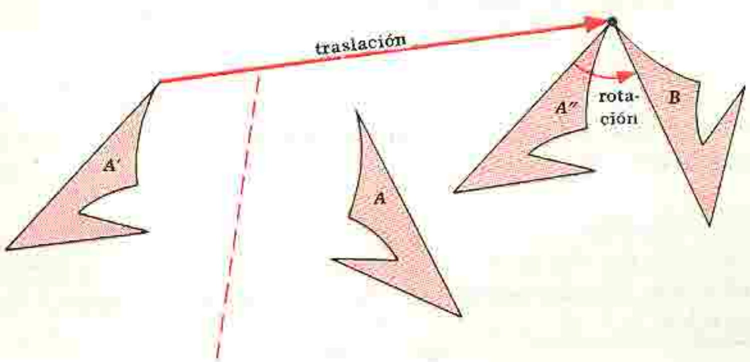
Y se dieron ejemplos como el siguiente:



Las figuras A y B son congruentes porque podemos transformar una en la otra como sigue. Primero efectuamos una simetría axial y transformamos A en A':



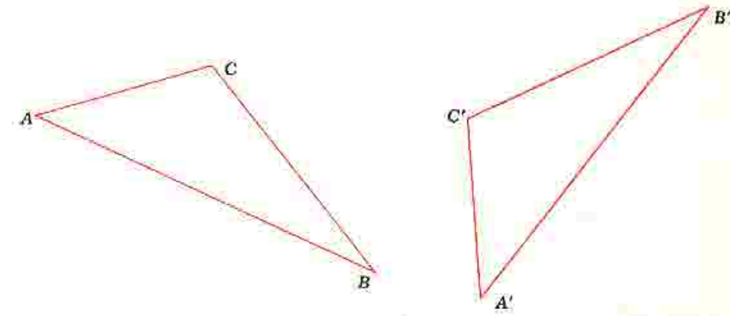
Después podemos hacer una traslación que transforma A' en A'' y finalmente una rotación que transforma A'' en B como se indica a continuación:



Triángulos congruentes

En esta unidad estudiaremos con más detalle la congruencia de polígonos y, en especial, de triángulos.

Del concepto de congruencia de figuras planas se sigue que:

> *Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia biyectiva entre sus vértices*
>
> 
>
>
> $A \leftrightarrow A' \qquad B \leftrightarrow B' \qquad C \leftrightarrow C'$
>
> *tal que los lados y los ángulos correspondientes son congruentes, es decir,*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \qquad \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \qquad \overline{CA} \cong \overline{C'A'}$$

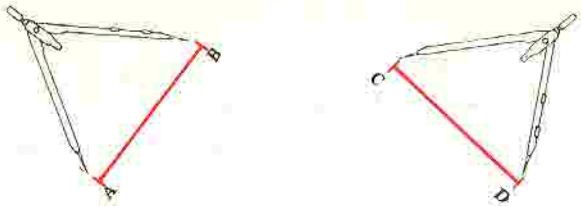
$$\angle A \cong \angle A' \qquad \angle B \cong \angle B \qquad \angle C \cong \angle C'$$

Para abreviar el lenguaje, lo anterior se expresa diciendo que *dos triángulos son congruentes si su lados y sus ángulos correspondientes lo son.*

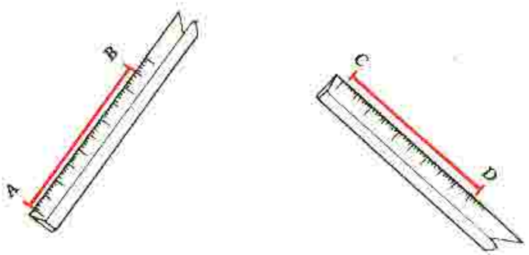
Trazo de segmentos congruentes

El estudio de la congruencia de triángulos se ilustrará con el trazado de triángulos (en la sección 2 de esta unidad). Por ello conviene revisar el trazado de segmentos y de ángulos congruentes. Empecemos con segmentos.

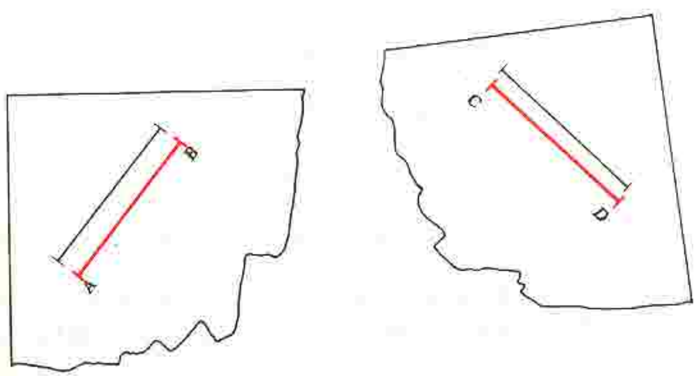
Podemos ver si dos segmentos son congruentes utilizando un compás



o bien una regla graduada



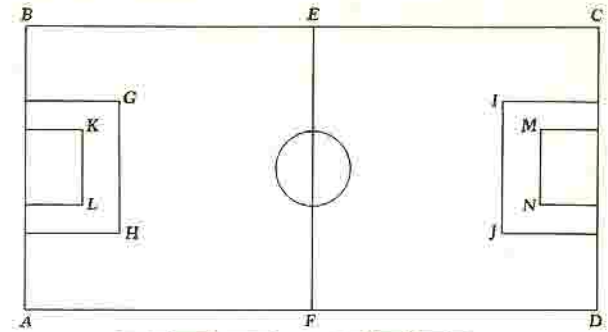
o bien calcando uno de ellos y superponiéndolo en el otro.



Ejercicio Utilizando un compás determine si los segmentos indicados son o no congruentes. Luego use los signos $\cong$ o $\cong$ para indicar el resultado.

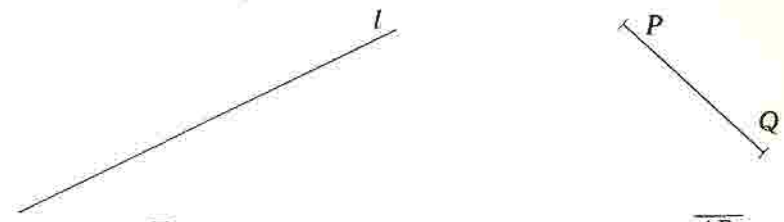
Observación. Puesto que es lo mismo decir "dos segmentos son congruentes" que decir "tiene la misma longitud (o medida)"

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \text{equivale a} \quad AB = CD$$



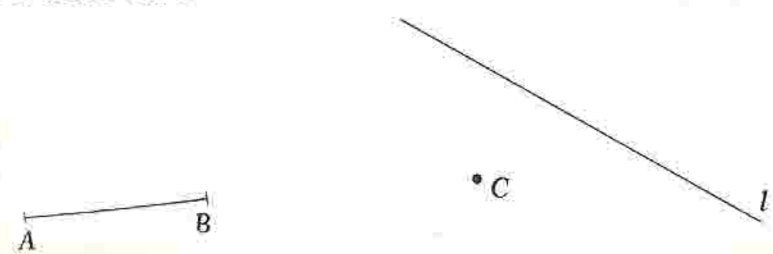
$\overline{AB}$	$\cong$	$\overline{GH}$	$\overline{IJ}$	$\cong$	$\overline{GH}$
$\overline{AB}$	$\cong$	$\overline{CD}$	$\overline{MN}$		$\overline{KL}$
$\overline{EF}$		$\overline{CD}$	$\overline{BE}$		$\overline{FA}$
$\overline{BE}$		$\overline{FD}$	$\overline{AF}$		$\overline{CD}$
$\overline{IJ}$		$\overline{KL}$	$\overline{FD}$		$\overline{AD}$

Ejercicio 5. Utilizando un compás marque sobre la recta l un segmento congruente con $\overline{PQ}$.



Ejercicio 6. Trace tres segmentos congruentes con $\overline{AB}$ y que tengan un extremo en C. Use un compás y una regla no graduada.

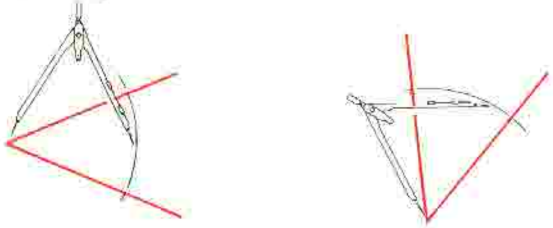
Ejercicio 7. Utilizando un compás y una regla no graduada, trace un segmento $\overline{CD}$ congruente con $\overline{AB}$ de tal manera que D pertenezca a la recta l.



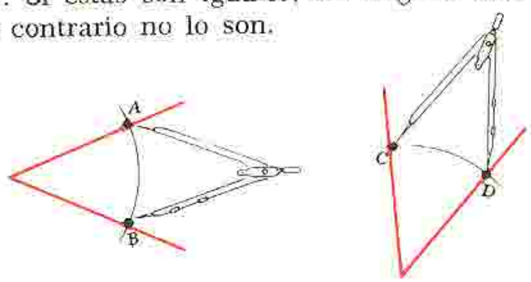
Trazo de ángulos congruentes

Utilizando un compás podemos comprobar si dos ángulos son congruentes:

a) Trazamos dos arcos de circunferencia con una misma abertura del compás:



b) Medimos después las distancias AB y CD (vea la figura siguiente). Si éstas son iguales, los ángulos son congruentes. En caso contrario no lo son.



Ejercicio 8. Con este procedimiento determine si son o no congruentes los siguientes ángulos. Escriba el signo $\cong$ o $\ncong$ según el resultado.

a)

$\angle A$ ___ $\angle A'$

b)

$\angle B$ ___ $\angle C$

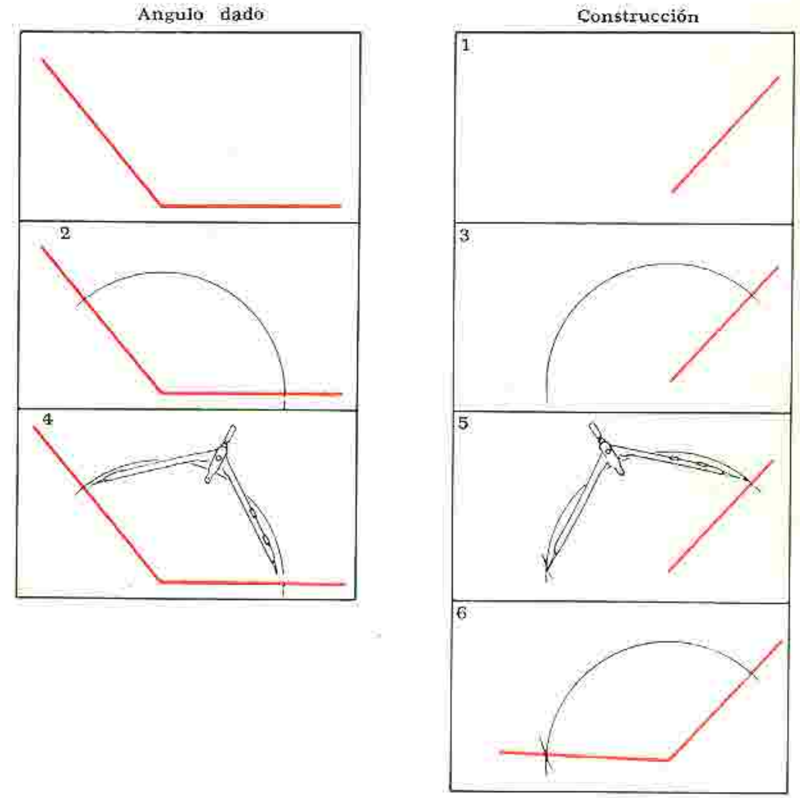
c)

$\angle D$ ___ $\angle E$

Observación. Recuerde que $\angle A$ indica el *ángulo* A y que $\measuredangle A$ indica *la medida del ángulo* A. Por lo tanto,

$$\angle A \cong \angle B \quad \text{equivale a} \quad \measuredangle A = \measuredangle B.$$

Este mismo método puede utilizarse para trazar un ángulo que sea congruente a un ángulo dado. Observe la serie de ilustraciones.



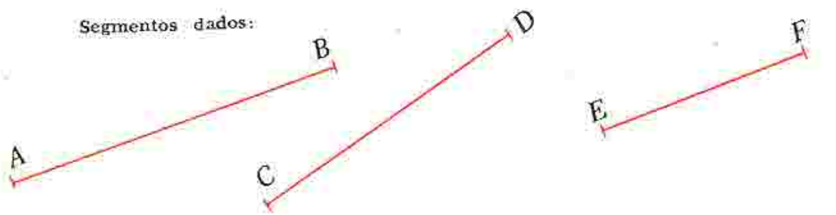
Ejercicio 9. Utilizando el método descrito construya en su cuaderno, ángulos congruentes en los siguientes.

3. CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

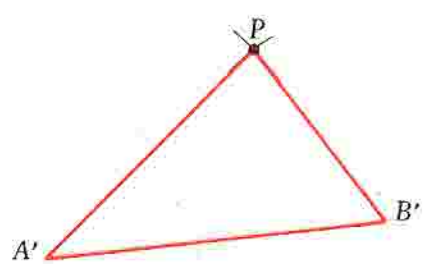
En la sección anterior de esta unidad se dijo que dos triángulos son congruentes si tienen, respectivamente, congruentes sus lados y sus ángulos. En esta sección veremos condiciones que nos permiten asegurar la congruencia de triángulos sin necesidad de verificar la congruencia de *todos* los lados y ángulos correspondientes.

Las siguientes construcciones geométricas nos ayudarán a entender estas condiciones.

Problema 1. *Trazar un triángulo que tenga sus lados congruentes a tres segmentos dados.*

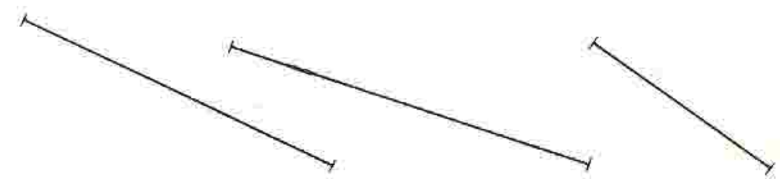


Solución. Se traza primero un segmento $\overline{A'B'}$ congruente con $\overline{AB}$ (observe la figura). Con centro en A' y una abertura de compás igual a CD se traza un arco. Después, con centro en B' y una abertura de compás igual a EF, se traza otro arco que interseque al primero.



El triángulo $A'B'P$ obtenido tiene lados congruentes con los segmentos dados.

Ejercicio 10. Dibuje un triángulo cuyos lados sean congruentes a los segmentos siguientes.

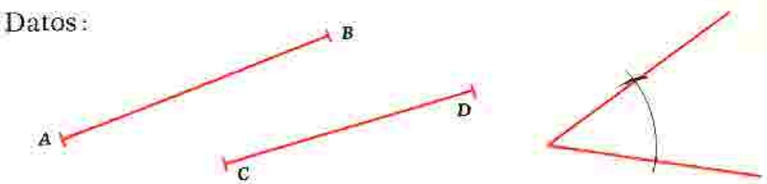


Ejercicio 11. Dibuje un triángulo cuyos lados midan 3, 4 y 5 cm.

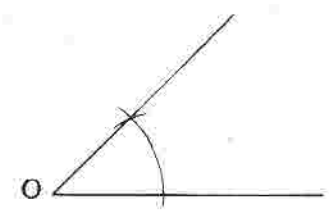
Ejercicio 12. Dibuje un triángulo equilátero.

Problema 2. *Trazar un triángulo que tenga dos lados congruentes con dos segmentos dados y el ángulo formado por ellos congruente con un ángulo dado.*

Datos:

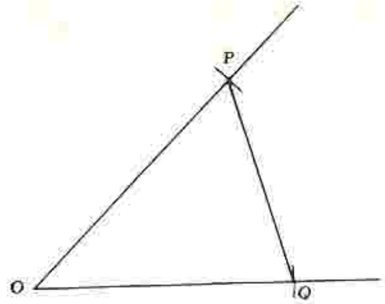


Solución. Se traza primero un ángulo congruente con el ángulo dado siguiendo el método de la sección anterior:

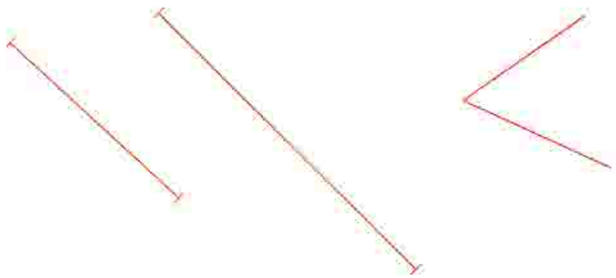


En uno de sus lados se marca un punto P de tal manera que $OP = AB$. Análogamente, en el otro lado se marca Q de tal manera que $OQ = CD$.

El triángulo obtenido OPQ tiene dos lados congruentes con los segmentos dados y el ángulo formado por ellos congruente con el ángulo dado.



Ejercicio 13. Dibuje un triángulo que tenga dos lados congruentes con los siguientes segmentos y tal que el ángulo que ellos forman sea congruente con el ángulo que se da.

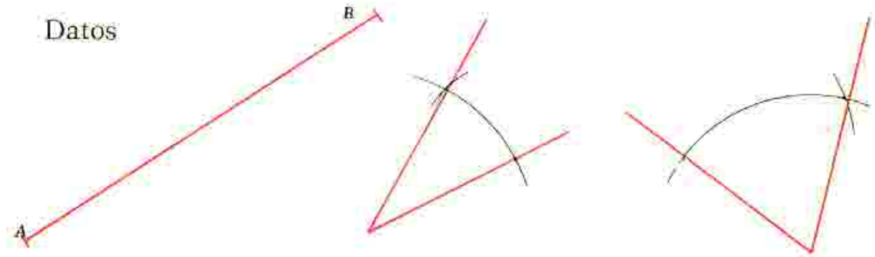


Ejercicio 14. Dibuje un triángulo que tenga dos lados de longitud 6 y 4 cm y cuyo ángulo por ellos formado sea recto.

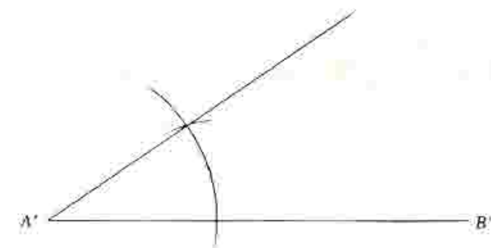
Ejercicio 15. Dibuje un triángulo que tenga dos lados congruentes entre sí y el ángulo incluido por estos de 90°. (Obsérve que los otros dos ángulos miden 45°.)

Problema 3. *Trazar un triángulo que tenga un lado congruente con un segmento dado y los ángulos adyacentes a este lado congruentes con dos ángulos dados.*

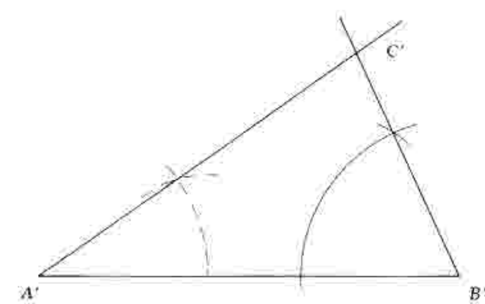
Datos



Solución. Se traza primero un segmento congruente con $\overline{AB}$. Después, siguiendo el método de la sección anterior trazamos un ángulo con vértice en A' y que sea congruente con uno de los ángulos dados:

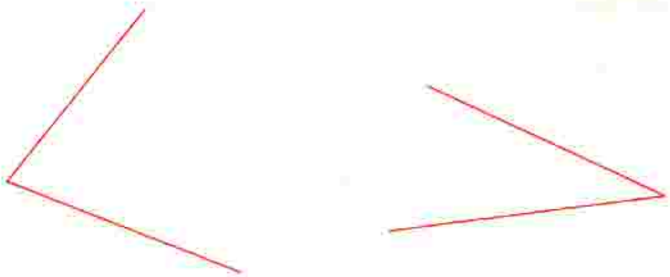


Análogamente, con vértice en B' trazamos un ángulo congruente con el otro ángulo dado.



Prolongando convenientemente los lados de los ángulos dibujados obtenemos un triángulo $A'B'C'$ que tiene un lado congruente con el segmento dado y los ángulos adyacentes congruentes a los ángulos dados.

Ejercicio 16. Dibuje un triángulo que tenga un lado de longitud 10 cm y los ángulos adyacentes congruentes con los siguientes.



Las construcciones anteriores sugieren los siguientes criterios de congruencia de triángulos que nosotros aquí *aceptaremos como axiomas*.

Criterio LLL (lado, lado, lado)

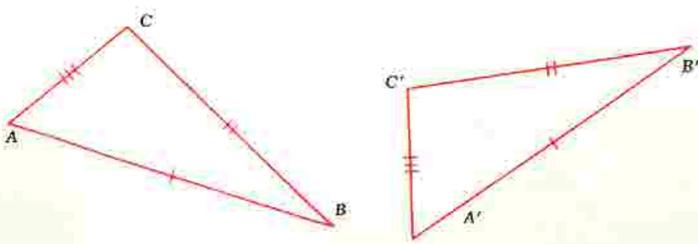
Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes a los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Por ejemplo, si en los triángulos ABC y $A'B'C'$ se tiene que

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \quad \text{y} \quad \overline{CA} \cong \overline{C'A'}$$

entonces los triángulos son congruentes. Y en particular,

$$\angle A \cong \angle A',\quad \angle B \cong \angle B',\quad \angle C \cong \angle C'.$$



Otro ejemplo: Si dos triángulos tienen sus lados de longitud 2, 3 y 4 cm, entonces los triángulos son congruentes. En particular, sus ángulos respectivos son congruentes.

Pregunta. Si los tres ángulos de un triángulo son respectivamente congruentes a los tres ángulos de otro triángulo, ¿son entonces congruentes los triángulos?

Por ejemplo, si las medidas de los ángulos de dos triángulos son 30°, 60° y 90° ¿son necesariamente congruentes los triángulos? (Piense, por ejemplo, en dos escuadras del mismo tipo, pero de diferente tamaño.)

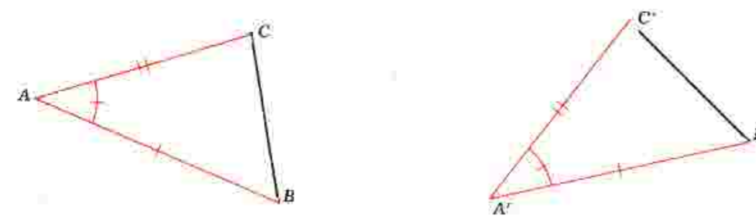
Criterio LAL (lado, ángulo, lado)

Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son tales que

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad y \quad \angle A \cong \angle A'$$

entonces los triángulos son congruentes. Y en particular

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'},\quad \angle B \cong \angle B' \quad y \quad \angle C \cong \angle C'$$



Por ejemplo, si dos triángulos rectángulos tiene sus catetos congruentes entonces los triángulos son congruentes.

Criterio ALA (ángulo, lado, ángulo)

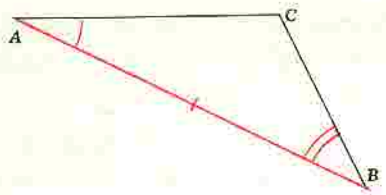
Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son tales que

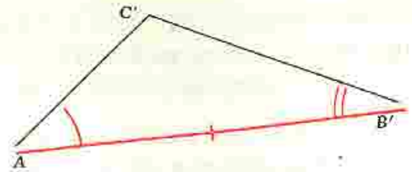
$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\quad \angle A \cong \angle A' \quad y \quad \angle B \cong \angle B'$$

entonces los triángulos son congruentes. Y en particular,

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'},\quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \quad \text{y} \quad \angle C \cong \angle C'.$$

Los tres criterios de congruencia de triángulos que acabamos de examinar y que desde ahora aceptaremos como axiomas (pues no los

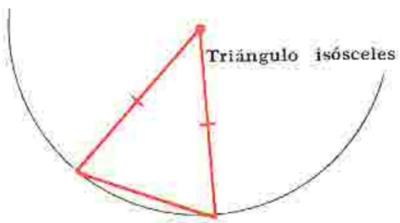




hemos demostrado) serán una especie de punto de partida. Con ellos se podrán demostrar interesantes propiedades de los paralelogramos, rombos, rectángulos y polígonos en general. Estos criterios se utilizarán también con mucha frecuencia en las dos siguientes unidades: LA CIRCUNFERENCIA y SEMEJANZA.

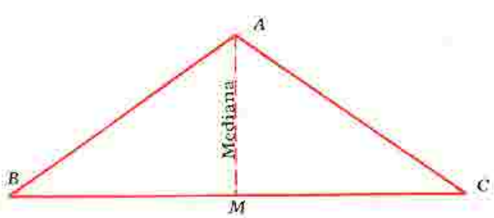
4. TRIANGULOS ISOSCELES

Recordemos que un triángulo se llama *isósceles* si tiene dos lados congruentes.



Estudiaremos ahora algunas propiedades de esos triángulos. Utilizando uno de los criterios de congruencia de triángulos demostraremos la siguiente propiedad.

Si en un triángulo isósceles ABC, con $AB = AC$, trazamos la mediana AM (es decir, $BM = MC$); entonces los triángulos AMB y AMC son congruentes.



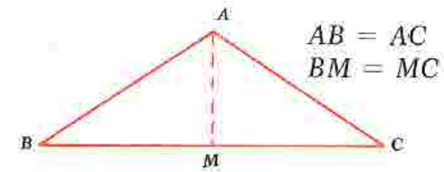
En efecto, los tres lados del triángulo AMB son respectivamente congruentes a los tres lados del triángulo AMC:

1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ por ser isósceles.
2. $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ por ser $\overline{AM}$ la mediana.
3. $\overline{AM} \cong \overline{AM}$.

Por lo tanto, según el criterio LLL de congruencia de triángulos $\triangle AMB$ y $\triangle AMC$ son congruentes.

Como consecuencia de este resultado se obtienen varias propiedades que usaremos con frecuencia posteriormente.

La mediana $\overline{AM}$ de un triángulo isósceles es bisectriz.



$AB = AC$
$BM = MC$

En efecto, como $\triangle AMB$ y $\triangle AMC$ son congruentes, los ángulos correspondientes lo son. En particular

$$\angle BAM \cong \angle CAM,$$

es decir, $\overline{AM}$ es bisectriz.

En forma análoga demostraremos que:

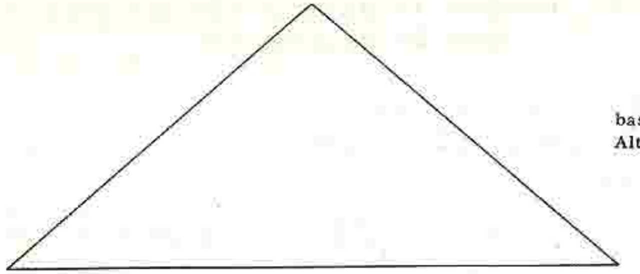
La mediana $\overline{AM}$ de un triángulo isósceles es altura. (Vea la figura anterior.)

En efecto, de la congruencia de los triángulos mencionados se deduce que

$$\angle BMA \cong \angle CMA$$

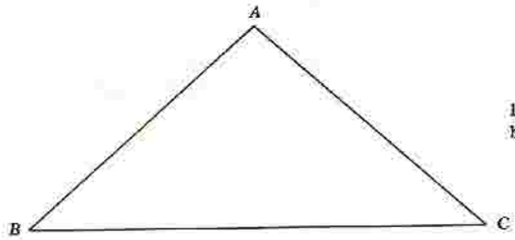
y como entre los dos miden 180°, cada uno de ellos mide 90°. Por lo tanto, $\overline{AM}$ es perpendicular a $\overline{BC}$, es decir, $\overline{AM}$ es altura.

Ejercicio 17. Utilizando solamente una regla graduada encuentre el área del siguiente triángulo. (Utilice el hecho de que la mediana es altura.)



base 8
Alt. 3.5

Ejercicio 18. Utilizando solamente una regla graduada trace la bisectriz en A del siguiente triángulo. (Compruebe que es isósceles y utilice el hecho de que la mediana es bisectriz.)

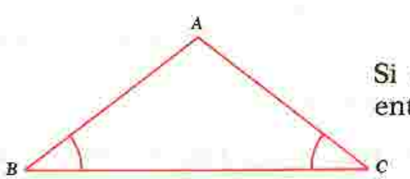


lados 4
base 6

Observación. En el Segundo Curso de Matemáticas se demostraron estos resultados utilizando el concepto de simetría axial (vea Págs. 265-267).

Otra propiedad de los triángulos isósceles es:

> *En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.*



Si $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
entonces $\angle C \cong \angle B$

Esto es también consecuencia de que los triángulos que se obtienen al trazar la mediana (vea la Fig. de la Pág. anterior) son congruentes. En particular, $\angle B \cong \angle C$.

El recíproco del resultado anterior también es cierto:

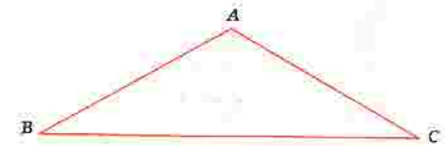
Un triángulo que tiene dos ángulos congruentes es isósceles.

Más precisamente, (vea la Fig. anterior)

$$\text{si } \angle C \cong \angle B, \text{ entonces } \overline{AB} \cong \overline{AC}$$

Omitiremos la demostración.

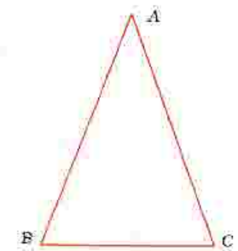
Ejercicio 19.



$AB = AC$ $\measuredangle B = 30°$

$\measuredangle C =$ $\measuredangle A =$

Ejercicio 20.



$\measuredangle C = 70°$ $AB = AC$

$\measuredangle A =$

$\measuredangle B =$

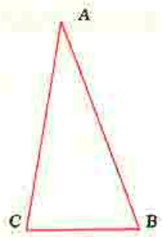
Ejercicio 21.

$\measuredangle A = 20°$ $\measuredangle B = 80°$

$\measuredangle C =$

¿Es isósceles el triángulo?
¿Por qué?

Ejercicio 22.



$\measuredangle A = 30°$ $\measuredangle B = 70°$

$\measuredangle C =$

¿Es isósceles el triángulo?
¿Por qué?

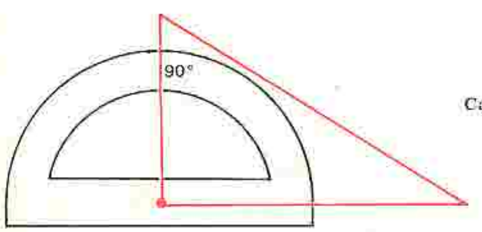
Ejercicio 23. $\measuredangle A = 80°$, $\measuredangle B = 50°$, $AC = 3$ $AB =$

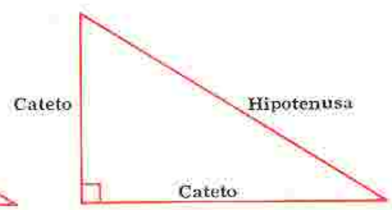
Ejercicio 24. $\measuredangle A = 90°$, $\measuredangle B = 45°$, $BC = 2.82$,

Perímetro $= 6.82$, $AB =$

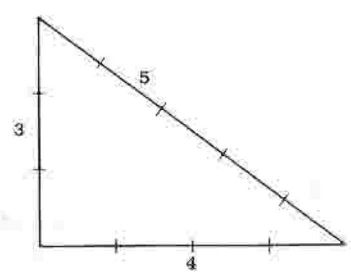
5. EL TEOREMA DE PITAGORAS

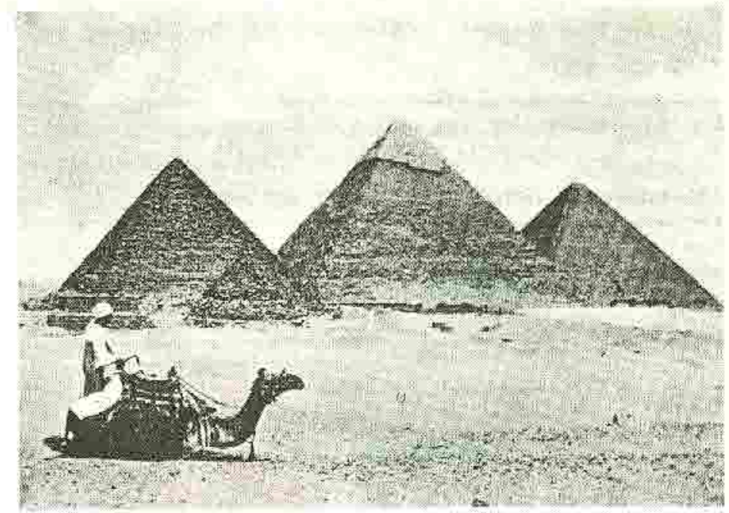
Desde la antigüedad el hombre se ha fijado en los triángulos rectángulos. Recordemos que un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto. Sus lados reciben nombres especiales:



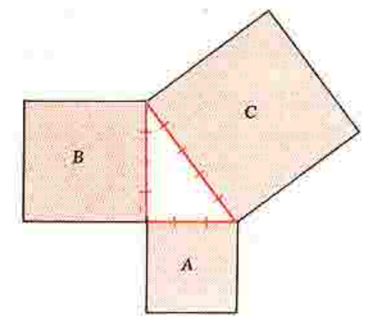


Los egipcios observaron que si un triángulo es tal que sus lados miden 3, 4 y 5 unidades entonces el triángulo es rectángulo. Y a veces se valían de esto para trazar ángulos rectos.





Observaron también que al construir cuadrados sobre los lados de ese triángulo, como se muestra en la siguiente ilustración,



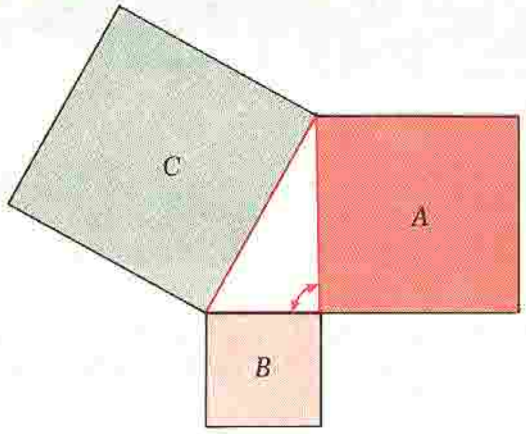
ocurre que el área del cuadrado C es la suma de las áreas de los cuadrados A y B.

Efectivamente así es, pues

el área del cuadrado A es $3^2 = 9$ unidades cuadradas
el área del cuadrado B es $4^2 = 16$ unidades cuadradas
el área del cuadrado C es $5^2 = 25$ unidades cuadradas
y se tiene que $9 + 16 = 25$.

Los griegos, en sus estudios matemáticos, encontraron que lo anterior ocurre no sólo en ese triángulo sino en *cualquier* triángulo rectángulo, sin que importe cuáles son las medidas de sus ángulos. Expresaron eso así:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa tiene una área que es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

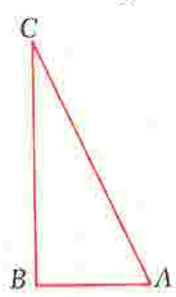


área de C = área de A + área de B

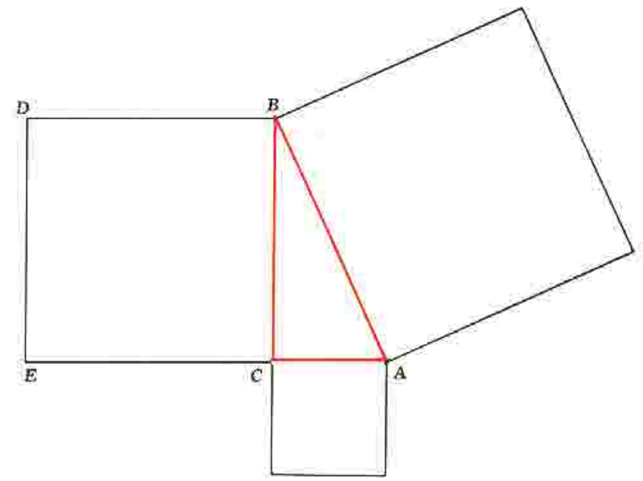
La afirmación anterior recibe el nombre de **Teorema de Pitágoras** precisamente porque fue Pitágoras de Samos el matemático griego que demostró que es verdad lo que en élla se dice.

A continuación indicaremos un trabajo práctico que ilustra el significado de este teorema. Conviene que usted realice este trabajo con un triángulo como el que se da y después con cualquier otro triángulo rectángulo.

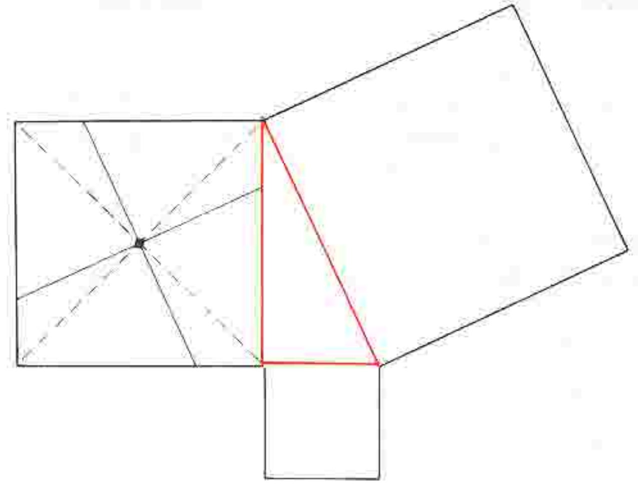
1. Trazamos un triángulo rectángulo.



2. Construimos cuadrados correspondientes a cada uno de los lados del triángulo ABC.

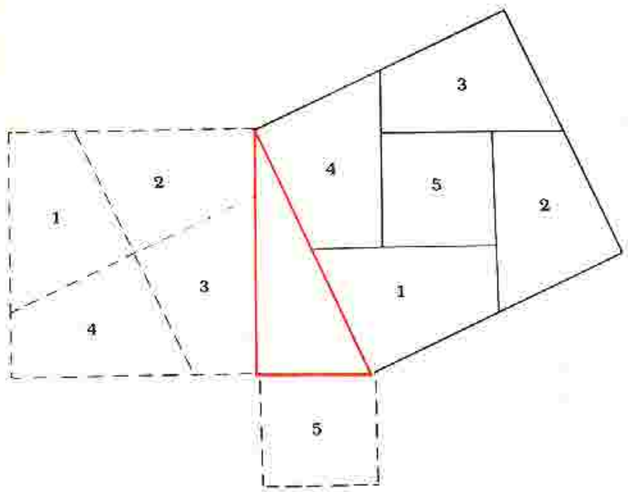


3. Buscamos el centro del cuadrado $BDEC$. (Dicho punto es la intersección de las diagonales.)



4. Por el centro encontrado trazamos una paralela y una perpendicular a la hipotenusa. Con esto determinamos 4 regiones en el cuadrado $BDEC$.

5. Recortamos estas cuatro regiones y también el cuadrado construido sobre el cateto AC. Después colocamos en forma conveniente todos esos recortes sobre el cuadrado grande:

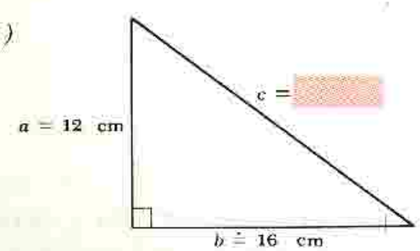


6. Esto indica que el cuadrado construido sobre la hipotenusa ocupa la misma área que los dos cuadrados construidos sobre los catetos.

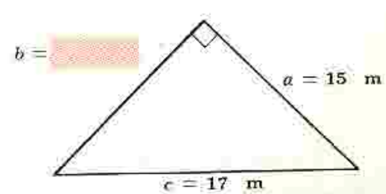
Trabajo práctico. Dibuje en un papel algún triángulo rectángulo y repita los pasos que hemos hecho en el ejemplo anterior.

Ejercicio 25. Utilice el Teorema de Pitágoras para encontrar las longitudes que faltan en los triángulos rectángulos que se ilustran. (Las ilustraciones no indican las medidas reales.)

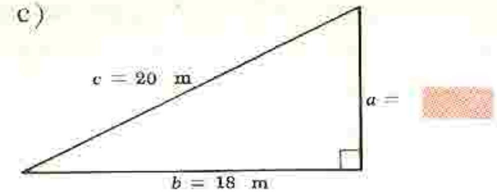
a)



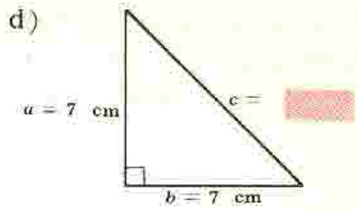
b



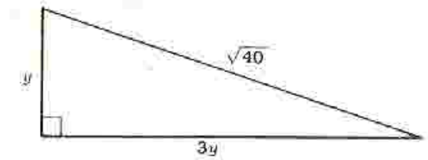
c)



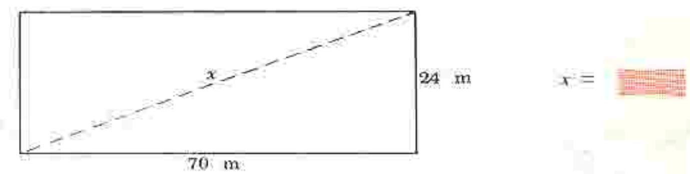
d)



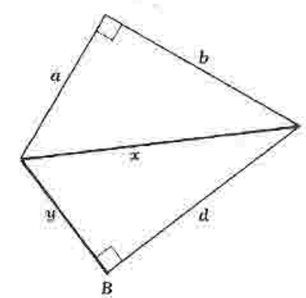
e) ¿Cuál es el valor de y?



Ejercicio 26. ¿Cuántos metros mide la diagonal de un rectángulo como el que se ilustra?

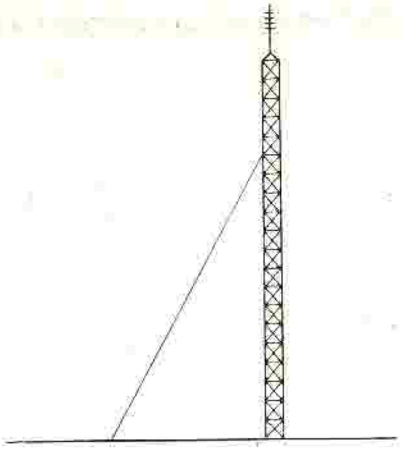


Ejercicio 27. En el siguiente polígono el ángulo A y el ángulo B son rectos.

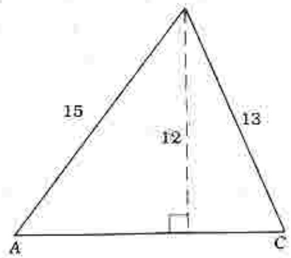


$a = 9$
$b = 12$
$d = 13$
$x =$
$y^2 =$

Ejercicio 28. Una antena de radio se encuentra sobre una torre de 20 m de altura. ¿Cuánto medirá un tirante de acero que se engancha a 5 m de la punta de la torre y queda, en su otro extremo 8 m alejado de la base?



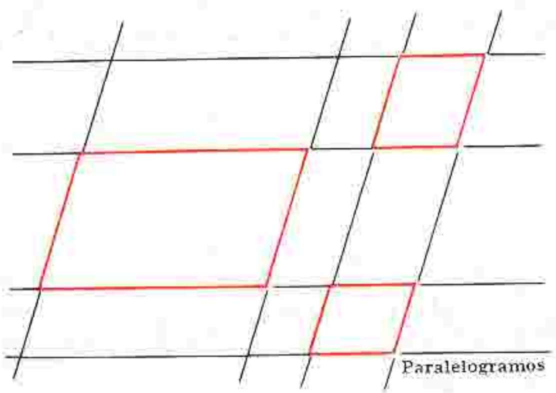
Ejercicio 29.



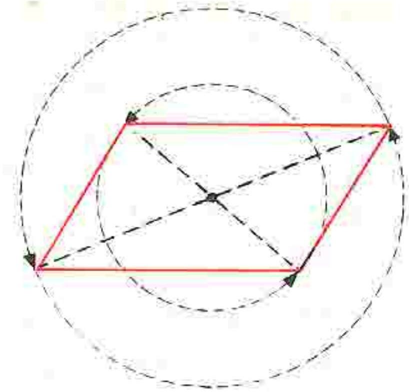
$AD =$
$DC =$
$AC =$

6. PARALELOGRAMOS

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.



Los paralelogramos tienen una interesante propiedad de simetría:



Al efectuar una rotación (de 180°) alrededor del punto de intersección de las diagonales, *el paralelogramo se transforma en sí mismo*. Es decir, es *simétrico con respecto a esta rotación*.

En particular, observamos que los lados opuestos se transforman el uno en el otro. Por lo tanto son congruentes:

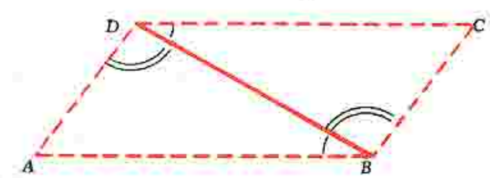
En un paralelogramo los lados opuestos son congruentes.

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\overline{BC} \cong \overline{AD}$

Esta propiedad que hemos observado se puede demostrar fácilmente utilizando un criterio de congruencia de triángulos. Hagámoslo.

Demostración. Tracemos una diagonal.



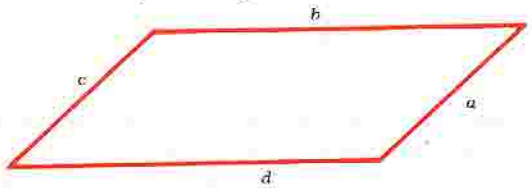
Los triángulos *ABD* y *CDB* son congruentes (criterio ALA) puesto que

1. Los ángulos marcados con un arco son congruentes (son alternos internos entre las paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$).
2. Los ángulos marcados con dos arcos son congruentes (son alternos internos entre las paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$).
3. El lado $\overline{BD}$ es común a ambos triángulos.

Por consiguiente, al ser congruentes los triángulos, los lados correspondientes son congruentes. Por lo tanto,

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \text{y} \quad \overline{BC} \cong \overline{AD}.$$

Ejercicio 30. En un paralelogramo



$a + b = 20$
$c = 7$

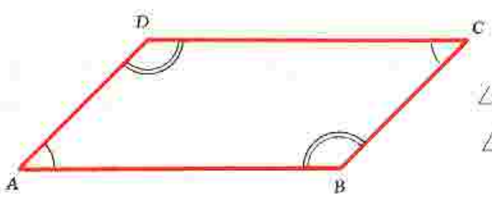
Encuentre las longitudes a, b y d de los lados.

Ejercicio 31. En un paralelogramo, el perímetro es 30 cm y la diferencia entre las longitudes de dos lados consecutivos es 3. Encuentre las longitudes de los lados.

Otra propiedad que se puede observar en la simetría de los rectángulos (vea la figura de la Pág. 92) es que los ángulos opuestos se transforman el uno en el otro y, por lo tanto, son congruentes.

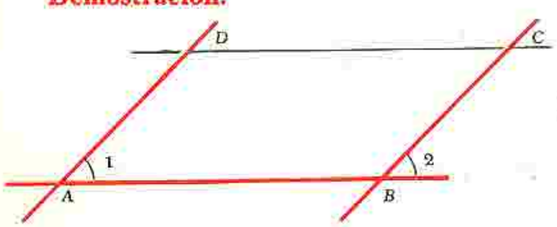
Este resultado lo podemos también demostrar fácilmente.

En un paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes.

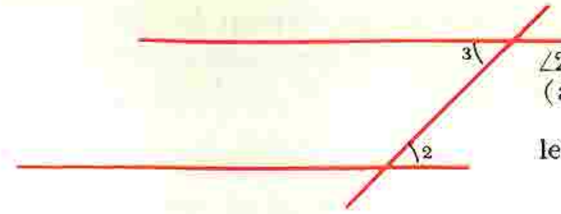


$\angle A \cong \angle C$
$\angle B \cong \angle D$

Demostración.



$\angle 1 \cong \angle 2$
(ángulos correspondientes entre las paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

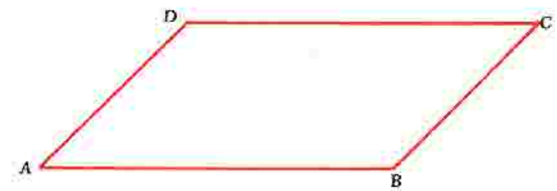


$\angle 2 \cong \angle 3$
(alternos internos entre las paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$).

Por lo tanto, $\angle 1 \cong \angle 3$, es decir, $\angle A \cong \angle C$.

Ejercicio 32. Demuestre que $\angle B \cong \angle D$ de manera análoga a la anterior.

Ejercicio 33. Demuestre que dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son complementarios. Esto es,

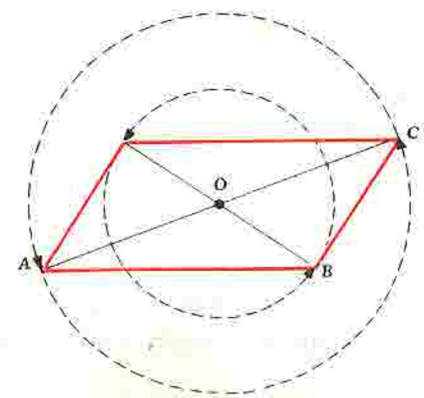


$\measuredangle A + \measuredangle B = 180°$
$\measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
$\measuredangle C + \measuredangle D = 180°$
$\measuredangle D + \measuredangle A = 180°$

(*Sugerencia.* Observe la primera figura de la demostración anterior.)

Ejercicio 34. Si un ángulo de un paralelogramo mide 30°, ¿cuánto miden los demás ángulos?

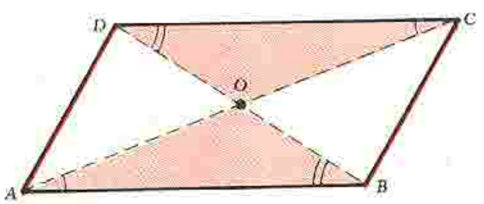
Ejercicio 35. La diferencia entre las medidas de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo es de 20°. ¿Cuánto miden los ángulos del paralelogramo?



Otra propiedad que se observa al efectuar una rotación de 180° alrededor del punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo es que el segmento $\overline{OA}$ se transforma en $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ en OD como se observa en la figura anterior.

Por lo tanto $AO = OC$ y $OB = OD$, es decir, las diagonales se cortan en sus puntos medios.

Nuevamente un criterio de congruencia de triángulos permite demostrar fácilmente este resultado que hemos observado.

> *Las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.*
>
> 
>
>
> $AO = OC$
>
> $BO = OD$

Demostración. Los triángulos AOB y COD son congruentes (criterio ALA) puesto que

1. Los ángulos marcados con un arco son congruentes (son alternos internos entre las paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$).
2. Los ángulos marcados con dos arcos son congruentes (misma razón).
3. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (son lados opuestos de un paralelogramo).

Por consiguiente, al ser congruentes los triángulos, los lados correspondientes son congruentes. Por lo tanto,

$$\overline{AO} \cong \overline{OC} \quad \text{y} \quad \overline{BO} \cong \overline{OD},$$

es decir, O es el punto medio de las diagonales.

Ejercicio 36. Usando el resultado que acabamos de demostrar encuentre un procedimiento para hallar el punto medio de un segmento utilizando únicamente una regla (no graduada) y una escuadra.

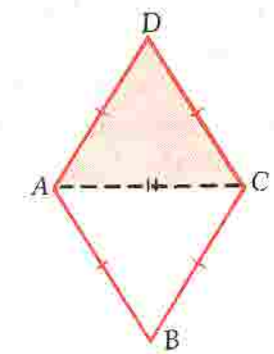
Sugerencia. Trace un paralelogramo que tenga al segmento dado como diagonal.

7. ROMBOS, RECTANGULOS Y CUADRADOS

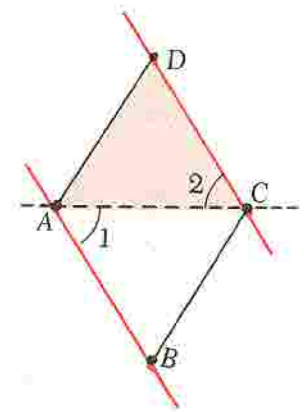
Entre los paralelogramos se distinguen los rombos, los rectángulos y los cuadrados.

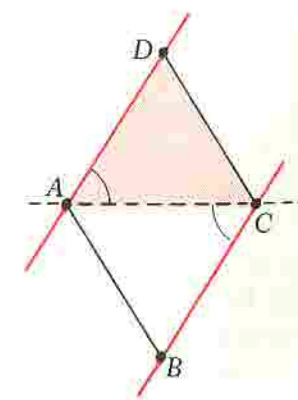
Rombo *es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes entre sí.* Por qué los rombos son paralelogramos? Contestaremos esta pregunta.

Consideremos un rombo cualquiera y tracemos una diagonal:



Los triángulos isósceles ABC y ACD son congruentes (criterio LLL) pues sus tres lados son, respectivamente, congruentes. Por lo tanto los ángulos respectivos son congruentes. En particular, $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong 4$:





Por lo tanto, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos (tienen ángulos alternos internos congruentes) y, análogamente AD y BC son paralelos. Es decir, hemos demostrado que

> *Los rombos son paralelogramos.*

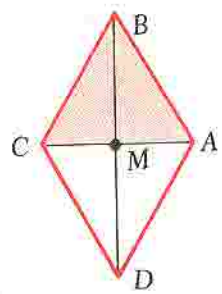
Observación. Este mismo razonamiento permite demostrar que si en un cuadrilátero los lados opuestos son congruentes entonces el cuadrilátero es paralelogramo. Trate de hacer la demostración.

Así pues, como los rombos son paralelogramos y en un paralelogramo las diagonales se cortan en sus puntos medios, también *las diagonales de cualquier rombo se cortan en sus puntos medios.*

Ahora bien, las diagonales de los rombos tienen además otra propiedad que es de mucha utilidad:

> *Las diagonales de un rombo son perpendiculares.*

Demostración. El triángulo ABC es isósceles pues $BC = BA$.



Como las diagonales se cortan en sus puntos medios, $CM = MA$, por lo que $\overline{BH}$ es la mediana de dicho triángulo isósceles. Y como en un triángulo isósceles (según hemos ya demostrado) la mediana es altura, resulta que $\overline{BM}$ es perpendicular a $\overline{CA}$. O sea, las diagonales son perpendiculares.

Ejercicio 37. Los lados de un rombo miden 10 cm y una de las diagonales mide 16 cm. ¿Cuánto mide la otra diagonal? (Utilice el teorema de Pitágoras. Haga primero una figura.)

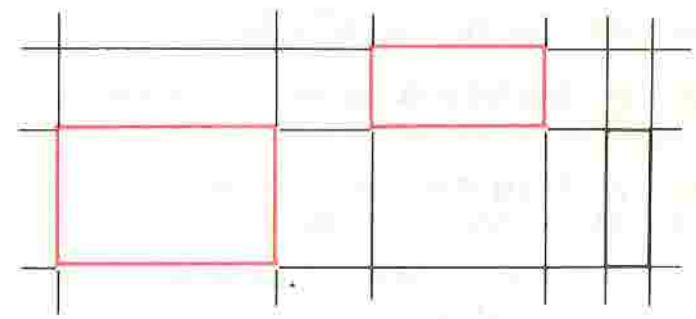
Ejercicio 38. Las diagonales de un rombo miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto miden sus lados?

Ejercicio 39. Si las diagonales de un rombo miden 60 y 80 cm, ¿cuál es el perímetro del rombo?

El hecho de que las diagonales de un rombo se bisequen y sean perpendiculares se utiliza en muchas construcciones con regla y compás. *Estudie y practique las construcciones* 4, 5, 6 y 7 *de la sección* 3 *de la quinta unidad.*

Pasemos ahora a los rectángulos.

Un *rectángulo* es un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos.

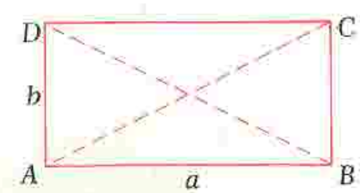


Los rectángulos son paralelogramos (dos perpendiculares a una recta son paralelos entre sí).

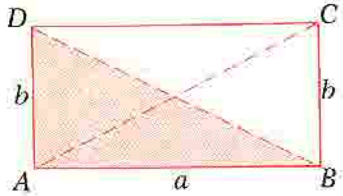
Por lo tanto, *los lados opuestos de un rectángulo son congruentes y sus diagonales se cortan en sus puntos medios.*

Pero además las diagonales de los rectángulos tienen otra propiedad:

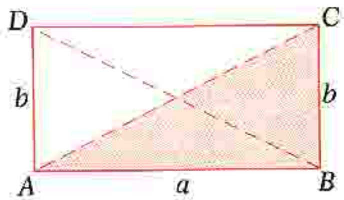
> *Las diagonales de un rectángulo son congruentes.*



Demostración. Observemos los triángulos rectángulos ABC y ADB. Tenemos que



$AC = \sqrt{a^2 + b^2}$



$BD = \sqrt{a^2 + b^2}$

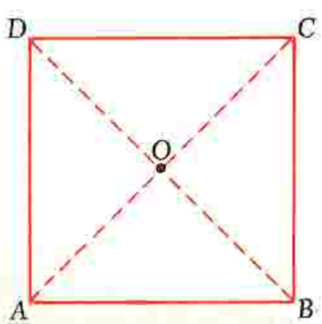
Por lo tanto, $AC = BD$, es decir, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Ejercicio 40. Los lados de un rectángulo miden 24 y 10 cm. ¿Cuánto miden las diagonales?

Ejercicio 41. Si las diagonales de un rectángulo miden 20 cm y uno de los lados 16 cm, ¿cuánto mide el otro lado?

Ejercicio 42. El perímetro de un rectángulo es 14 m y uno de los lados mide 4 m. ¿Cuánto miden las diagonales? ¿Cuál es el área del rectángulo?

Las diagonales de un cuadrado se intersecan en sus puntos medios, son perpendiculares entre sí y, además, son congruentes.



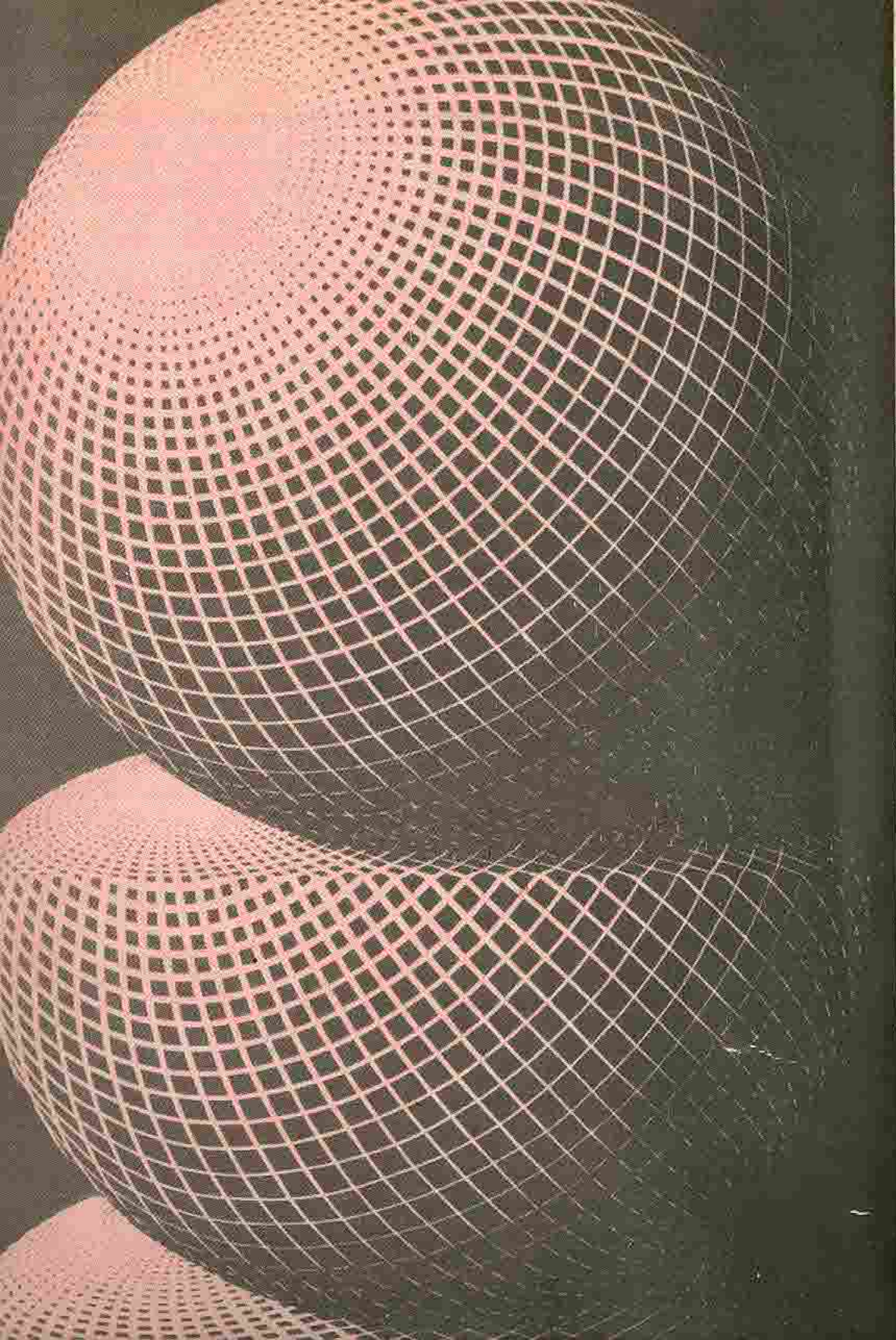
$\overline{AO} \cong \overline{OC}$ $\qquad$ $\overline{BO} \cong \overline{OD}$

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Un **cuadrado** es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes entre sí y sus cuatro ángulos rectos. En otras palabras un cuadrado es rombo y rectángulo. Es, desde luego, paralelogramo.

Por consiguiente todas las propiedades de los paralelogramos, los rombos y los rectángulos valen para los cuadrados.



CUARTA UNIDAD

LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es una de las figuras planas más importantes tanto en las matemáticas como en sus aplicaciones.

En esta unidad

1. *se estudiarán propiedades de algunos segmentos y rectas relacionados con circunferencias;*
2. *se analizarán y demostrarán varias relaciones entre diferentes ángulos y arcos en una circunferencia y*
3. *se aplicarán los resultados obtenidos para realizar y justificar dibujos con regla y compás.*

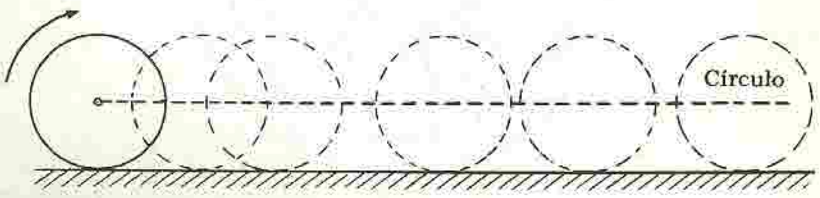
1. CONCEPTOS BASICOS

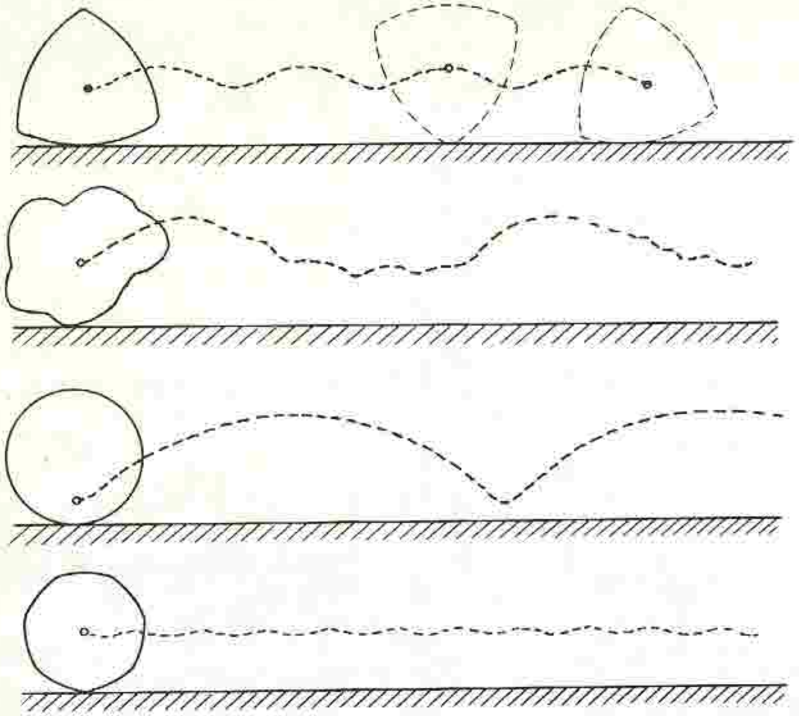
Difícil es imaginarse lo que hubiera ocurrido con nuestra civilización si no se hubiera dispuesto de **la rueda.** Esta máquina elemental, por más simple que pueda parecernos no deja de ser una maravilla.

Como figura geométrica la rueda podemos pensarla como un *círculo;* su contorno, como una *circunferencia.*

¿Qué es lo esencial en una rueda?

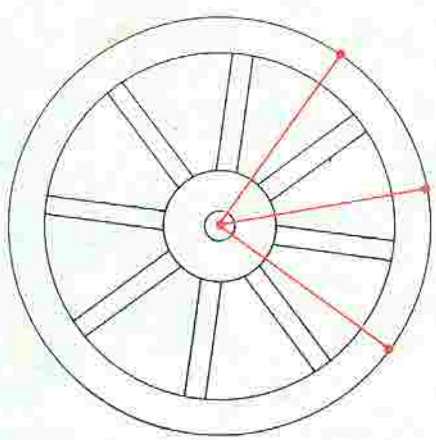
Si recortamos una figura cualquiera, marcamos en ella un punto que nos sirva de eje y la hacemos rodar en un plano, nos daremos cuenta fácilmente que:





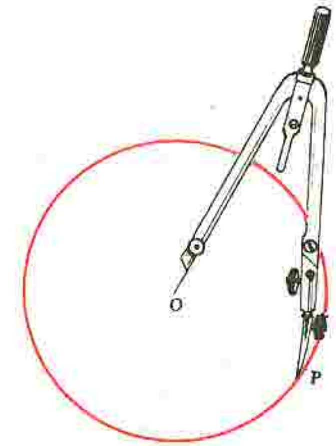
la única manera de lograr que el eje se mantenga a una misma altura es que la figura sea un círculo y que el eje sea el centro del círculo.

Así, en una rueda, la distancia del eje a cualquier punto de su contorno es siempre la misma y esto ocurre solamente en las ruedas.

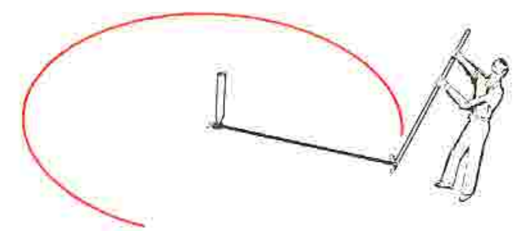


Circunferencias

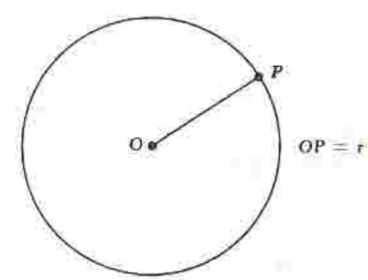
Las figuras geométricas que representan a las ruedas son las circunferencias. Para dibujar circunferencias se puede utilizar un compás:



También se puede utilizar un cordón tenso, sujeto en un extremo en el centro y con un marcador en el otro extremo:



Observemos que lo esencial en el proceso de dibujar una circunferencia es que durante el trazado de la curva no alteramos la distancia entre el centro y cualquiera de los puntos de la curva



Esto concuerda con la definición que usted conoce:

> *DEFINICION. Sea O un punto y r un número mayor que cero. La circunferencia de centro O y radio r es el conjunto de todos los puntos P del plano cuya distancia a O es r, es decir, OP = r.*

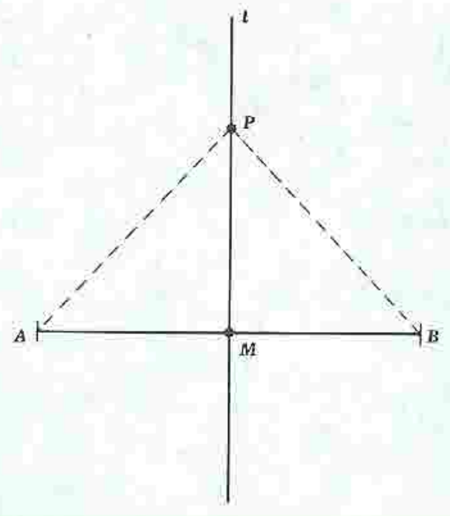
Lugares geométricos

Cuando se describe un conjunto de puntos del plano mediante cierta propiedad, como en el caso de una circunferencia, se acostumbra hablar de **lugar geométrico** *como sinónimo de* **conjunto.**

Así, por ejemplo, podemos decir que la circunferencia es el *lugar geométrico* de los puntos P del plano tales que $OP = r$, o bien que la circunferencia es el *conjunto* de los puntos P del plano, etc.

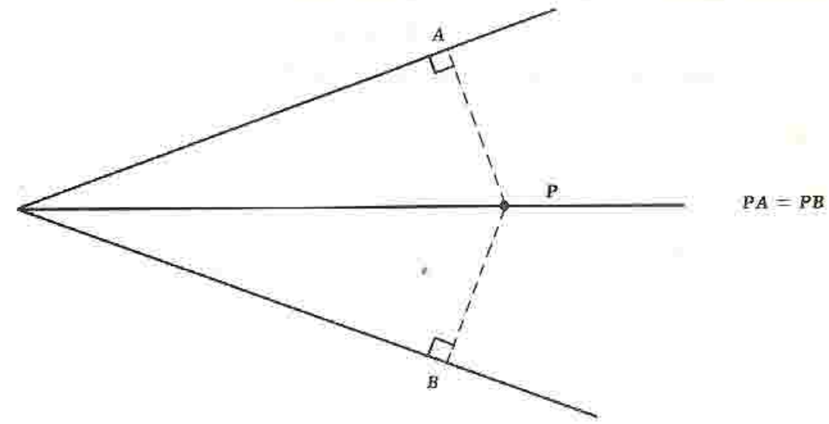
Veamos varios ejemplos de lugares geométricos.

Ejemplo 1. Dado un segmento $\overline{AB}$, sabemos que la recta l perpendicular a AB en su punto medio M consta de todos los puntos P del plano que equidistan de A y de B (es decir, tales que $PA = PB$). Esta recta se llama *mediatriz* del segmento AB. Podemos entonces decir que



> *La mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico (o el conjunto) de puntos que equidistan de A y B.*

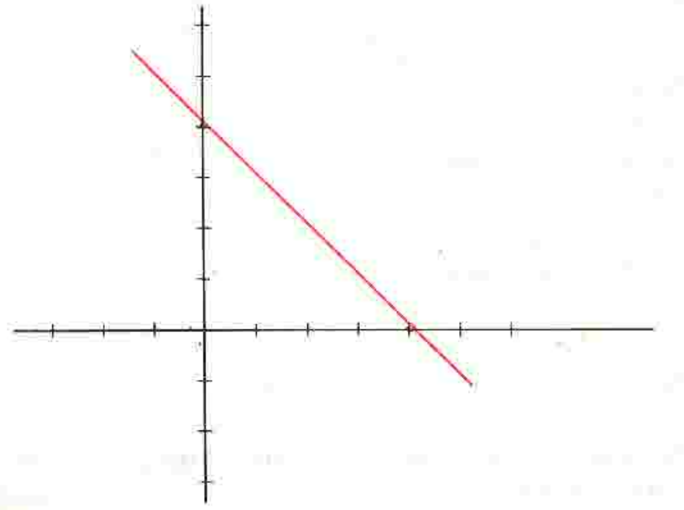
Ejemplo 2. Sabemos que si un punto P está en la bisectriz de un ángulo, entonces la distancia de P a un lado es igual que la distancia de P al otro lado del ángulo. Es decir, P equidista de los lados del ángulo:



Sabemos también que si un punto del plano equidista de los dos lados de un ángulo, el punto está en la bisectriz. Podemos entonces decir que

> *La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico (o el conjunto) de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo.*

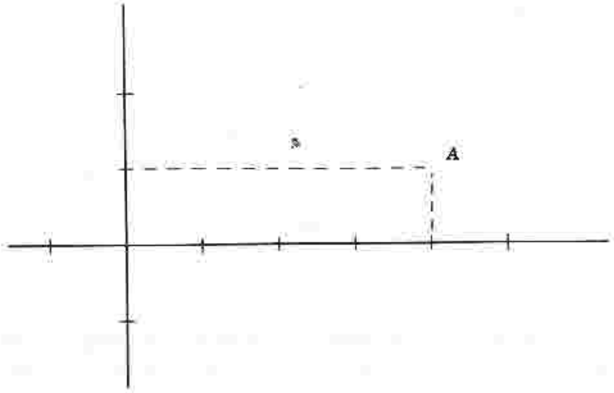
Ejemplo 3. El lugar geométrico de los puntos que son solución de la ecuación $x + y = 4$ es la recta que se ilustra:



Ejemplo 4. El lugar geométrico de las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

está formado por un solo punto $A = (4, 1)$.



Ejercicio 1. Defina la esfera como "el conjunto de puntos del espacio tales que..." en forma análoga a la definición de circunferencia.

Ejercicio 2.

a) En un sistema de coordenadas marque los puntos

$$(0, 1), (0, 7), (0, -1), (0, -3)$$

b) Marque otros puntos cuya abscisa sea 0, es decir, puntos de la forma $(0, y)$.
c) ¿Cuál es el conjunto de los puntos del plano cuya abscisa es cero?

Ejercicio 3. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya ordenada es cero?

Ejercicio 4.

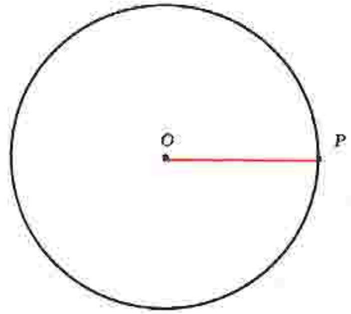
a) Encuentre el conjunto de puntos del plano cartesiano cuya abscisa es 7.
b) Encuentre el lugar geométrico de puntos del plano cartesiano cuya ordenada es 3.

Ejercicio 5.

a) Encuentre el conjunto de puntos del plano cuya abscisa es 7 y cuya ordenada es 3.
b) Encuentre el conjunto de puntos del plano tales que su abscisa es 7 o bien su ordenada es 3.

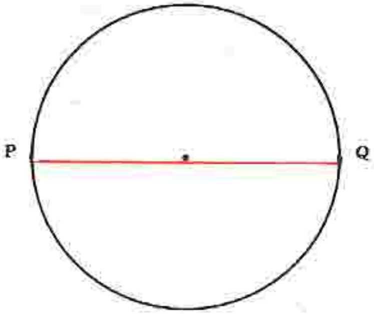
Radios y diámetros

En la definición de circunferencia hemos dicho que el radio es la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia. Es decir, es la longitud de cualquier segmento OP.



Sin embargo, también se acostumbra llamar *radio* a cualquiera de dichos segmentos. Así pues, se usa una misma palabra, radio, para hablar tanto del segmento $\overline{OP}$ como de su longitud $OP = r$. A pesar de todo, esta ambigüedad no causa confusiones.

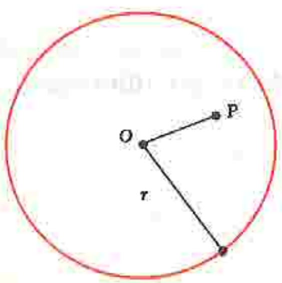
Lo mismo ocurre con la palabra diámetro:



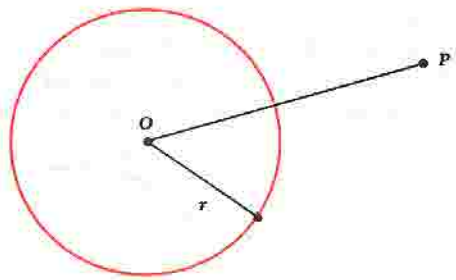
Al segmento $\overline{PQ}$ se le llama diámetro y también a su longitud $PQ = 2r$ se le llama diámetro.

Puntos interiores y exteriores. Círculos

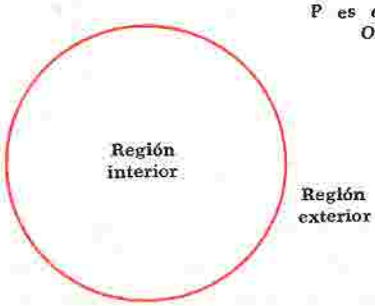
Cada circunferencia separa dos regiones en el plano, la interior y la exterior. La región interior está formada por todos los puntos cuya distancia al centro es menor que el radio r y la exterior es el conjunto de todos los puntos cuya distancia al centro es mayor que r:



P es *interior* si $OP < r$

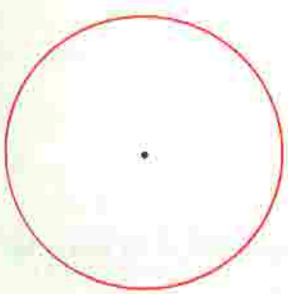


P es *exterior* si $OP > r$

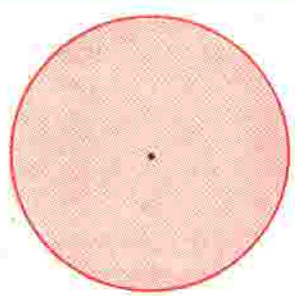


El conjunto formado con los puntos interiores y los de la circunferencia se llama *círculo*, es decir,

> *El círculo de centro O y radio r es el conjunto de todos los puntos P del plano cuya distancia a O es menor o igual que r ($OP \leq r$).*

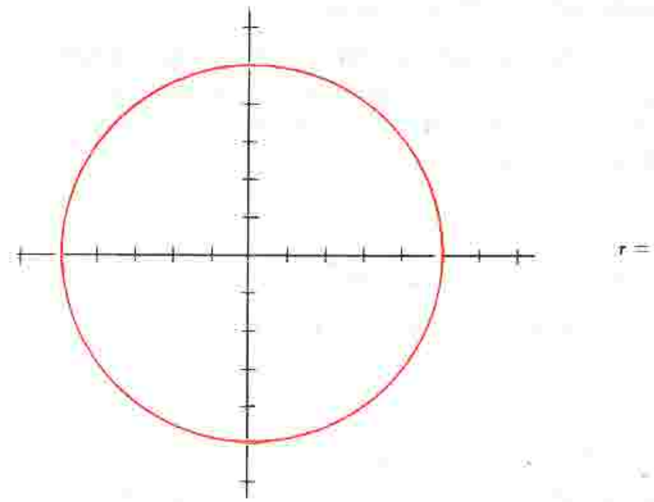


Circunferencia



Círculo

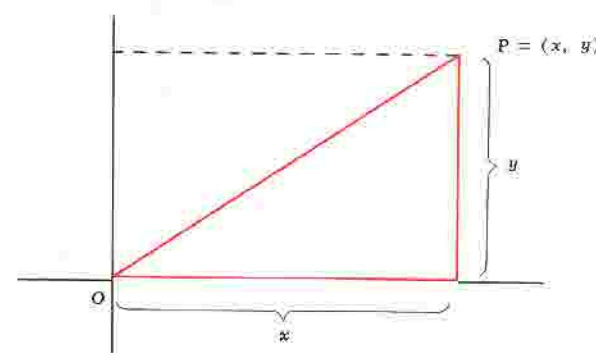
Ejemplo. (Una aplicación del teorema de Pitágoras.) Consideremos una circunferencia de radio 5 con centro en el origen de un sistema de coordenadas.



Para averiguar si un punto, por ejemplo el punto $P = (3, 2)$, es interior, exterior o bien está en la circunferencia podemos simplemente marcar el punto y observar dónde se encuentra. Sin embargo en algunos casos puede ser útil un método que no necesite recurrir a figuras.

Es fácil encontrar este método si recordamos que la distancia OP de un punto $P = (x, y)$ al origen O es, según el teorema de Pitágoras,

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$



En nuestro ejemplo tenemos

$$OP = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} = 3.46 < 5 = r$$

Así pues, como $OP < r$, P es interior.

Ejercicio 6. Procediendo como en el ejemplo anterior y en los incisos a) y b) averigüe si los puntos que se dan son interiores, exteriores o están en la circunferencia de arriba. (Utilice una tabla de raíces cuadradas si es necesario.)

a) $A = (-4, 5)$

$$OA = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} = 6.40 > 5 = r.$$

Por lo tanto, como $OA > r$, A es exterior

b) $B = (4, -3)$

$$OB = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 = r.$$

Por consiguiente, como $OB = r$, B está en la circunferencia. (Observe usted que en este caso, por las imprecisiones inevitables en los dibujos sería difícil darse cuenta si el punto está o no en la circunferencia.)

c) $C = (4, 4)$ d) $D = (3, 4)$ e) $E = (-3, 4)$

f) $F = (-4, -5)$ g) $G = (5, 0)$ h) $O = (0, 0)$

Ejemplo. Según lo que acabamos de observar en los últimos ejemplos y ejercicios, podemos decir que

La circunferencia de radio r y centro en el origen de un sistema de coordenadas es el conjunto de puntos $P = (x, y)$ tales que $\sqrt{x^2 + y^2} = r$.

Ejercicio 7. Diga cuáles son los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de puntos (x, y) tales que

$$\sqrt{x^2 + y^2} < r.$$

b) El lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ del plano tales que

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq r.$$

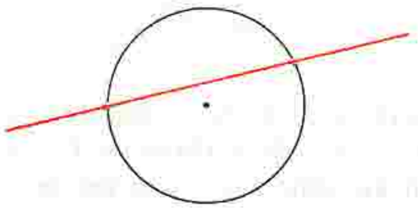
c) El conjunto de puntos $P = (x, y)$ del plano tales que

$$\sqrt{x^2 + y^2} > r.$$

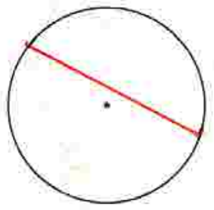
Cuerdas, ángulos centrales y arcos

A continuación se dan algunas definiciones relacionadas con circunferencias.

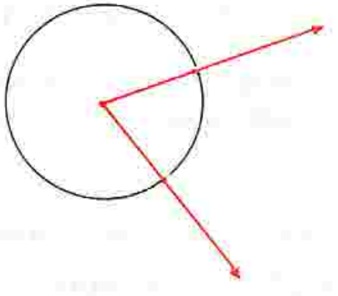
Secante. Es una recta que interseca a la circunferencia en dos puntos.



Cuerda. Es un segmento cuyos extremos son puntos de la circunferencia.

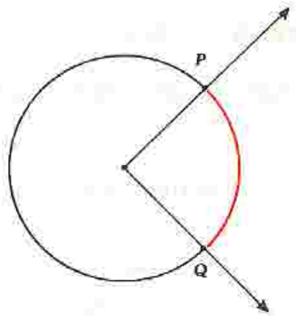


Angulo central. Es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.



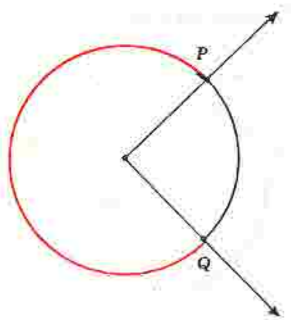
Un ángulo central determina dos arcos de la circunferencia:

Arco menor. Es el conjunto de puntos de la circunferencia que están en el interior del ángulo, incluyendo los puntos P y Q.



Arco mayor. Es el conjunto de puntos de la circunferencia que están en el exterior del ángulo, incluyendo P y Q.

P y Q se llaman los extremos, tanto del arco menor como del arco mayor.



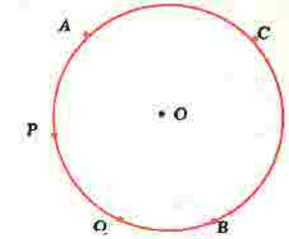
Observaciones

1. Si el ángulo central es llano, cualquiera de los dos arcos es menor y mayor.

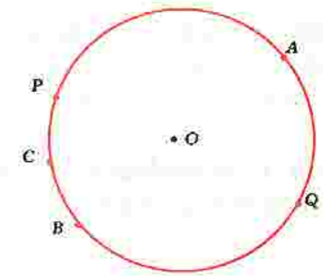
2. Si el ángulo central es de 0°, el arco menor se reduce a un punto ($P = Q$) y el arco mayor es toda la circunferencia.

Ejercicio 8.

a) En la siguiente circunferencia dibuje la cuerda $\overline{AB}$, la secante $\overleftrightarrow{AC}$, el ángulo central $\angle POQ$.



b) Haga lo mismo en la siguiente circunferencia.

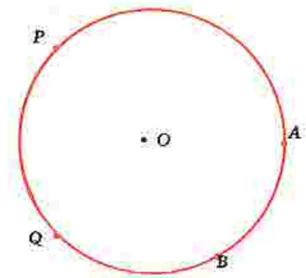


Ejercicio 9. En la figura del inciso a) del ejercicio anterior marque el arco menor determinado por el ángulo central $\angle POQ$ y el arco mayor. Haga lo mismo en la figura del inciso b).

Ejercicio 10.

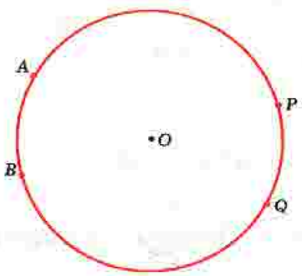
a) En la siguiente figura trace los ángulos $\angle AOB$ y $\angle POQ$. Encuentre sus medidas en grados y compárelas.

b) Trace las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$. Encuentre sus longitudes y compárelas.



Que $\measuredangle POQ = 90°$
y $\measuredangle AOB = 60°$

Ejercicio 11. Repita el ejercicio anterior en la figura siguiente.



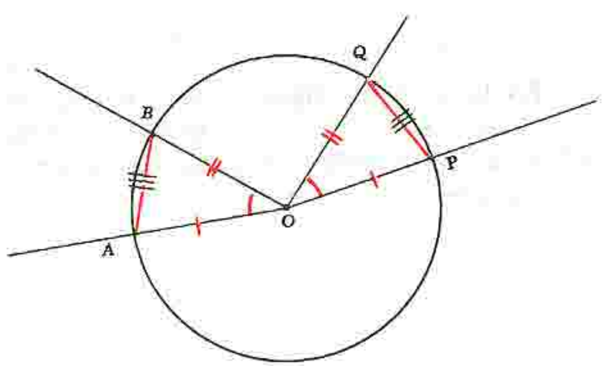
Que $\measuredangle AOB = 45°$

y $\measuredangle POQ = 45°$

Al resolver este ejercicio habrá usted observado que $\angle AOB \cong \angle AOQ$ pues ambos tienen la misma medida. Habrá observado que, en este caso, también las cuerdas respectivas son congruentes, $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$.

Esto es cierto en cualquier circunferencia y lo podemos demostrar muy fácilmente si aplicamos un criterio de congruencia de triángulos.

> TEOREMA. *Si dos ángulos centrales de una circunferencia son congruentes, entonces las cuerdas que determinan son congruentes entre sí.*



Demostración. Consideremos los triángulos

$$\triangle AOB \qquad \triangle POQ$$

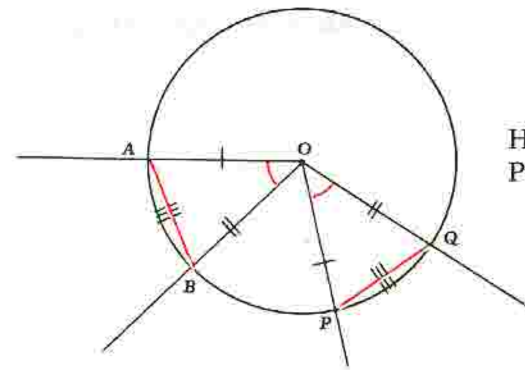
Tenemos que $\angle AOB \cong \angle POQ$ por hipótesis. Además $\overline{OA} \cong \overline{OP}$ y $\overline{OB} \cong \overline{OQ}$ (pues todos esos segmentos son radios de la circunferencia). Entonces los triángulos son congruentes pues tienen dos lados respectivamente congruentes y también el ángulo comprendido entre ellos. Por lo tanto los lados $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$ son también congruentes.

Como ejercicio y utilizando otro de los criterios de congruencia podrá usted demostrar fácilmente que vale la afirmación inversa:

Ejercicio 12. Demuestre el siguiente teorema.

> TEOREMA. *Si dos cuerdas de una circunferencia son congruentes, entonces los ángulos centrales que determinan son congruentes entre sí.*

Para la demostración observe la figura siguiente.

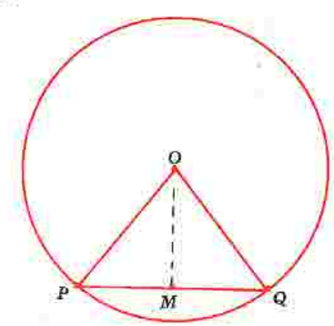


Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$

Por demostrar: $\angle AOB \cong \angle POQ$

Tres puntos no colineales determinan una circunferencia

Consideremos dos puntos P y Q en una circunferencia y dibujemos el triángulo $\triangle POQ$.



Este triángulo es isósceles pues $OP = OQ = r$. Sabemos que la altura OM de este triángulo es mediana, es decir, $PM = MQ$. En otras palabras, sabemos que

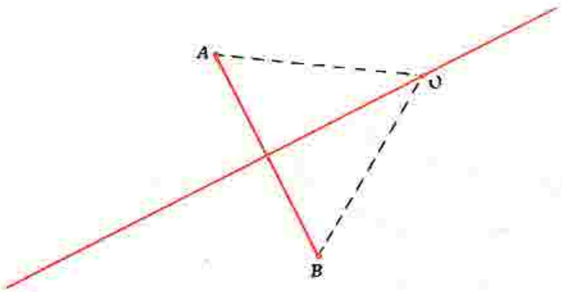
TEOREMA. *El centro de una circunferencia está en la perpendicular en el punto medio de cualquier cuerda.*

En otras palabras, si $\overline{PQ}$ es una cuerda de una circunferencia, entonces el centro está en la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$.

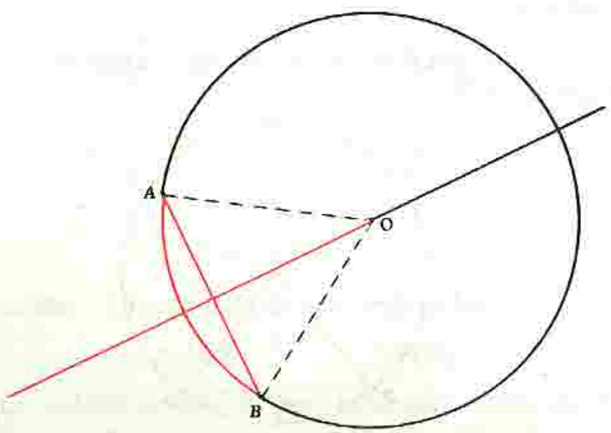
Es fácil ver también que:

TEOREMA. *Cualquier punto de la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ es centro de una circunferencia que pasa por A y por B.*

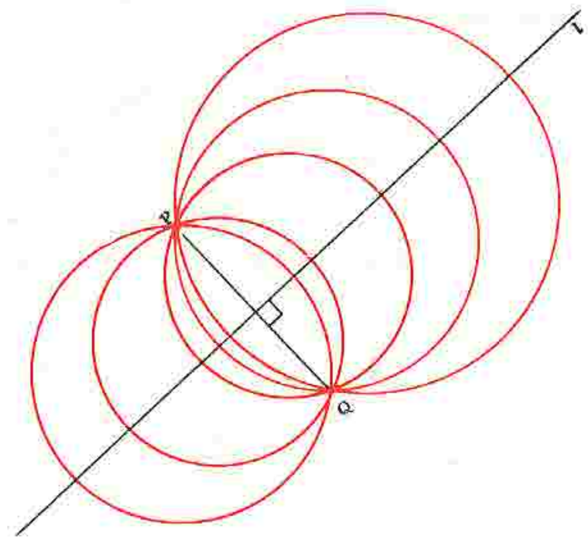
En efecto, consideremos un segmento $\overline{AB}$ y un punto O en la mediatriz.



Sabemos que entonces $OA = OB$. Por lo tanto la circunferencia con centro en O y radio $OA = OB$ pasa por A y B:



Con esto observamos que, dados dos puntos P y Q, podemos trazar tantas circunferencias como queramos que pasen por P y Q. Basta tomar como centro cualquier punto de la mediatriz del segmento PQ:



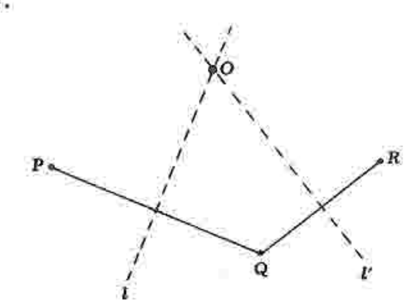
Ejercicio 13. Marque dos puntos y trace varias circunferencias que pasen por ellos.

Ahora se ve natural plantearse el siguiente problema:

Dados 3 puntos P, Q y R ¿habrá o no circunferencias que pasen por ellos?

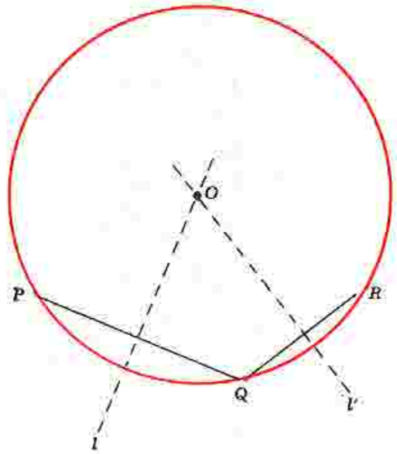
1er. caso. Supongamos que P, Q y R no son colineales. Es fácil razonar como sigue, después de lo que hemos visto:

Si una circunferencia pasa por P y Q, su centro está en l (l, mediatriz del segmento $\overline{PQ}$).



Si una circunferencia pasa por Q y R, su centro está en l' (l' mediatriz del segmento $\overline{QR}$).

Por lo tanto, si una circunferencia pasa por los puntos P, Q y R, su centro estará tanto en l como en l', es decir, su centro es la intersección O de l y l'. (Las rectas l y l' se intersectan porque P, Q y R no son colineales.)

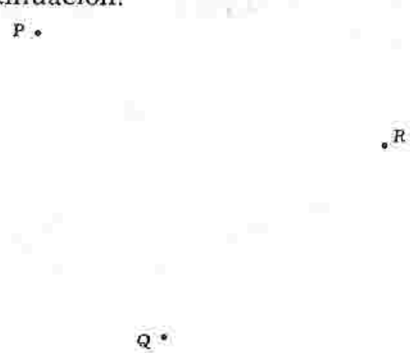


Así pues hemos demostrado que:

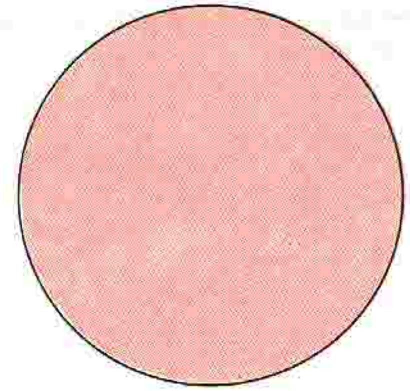
TEOREMA. *Dados 3 puntos no colineales hay una circunferencia y una sola que pasa por dichos puntos.*

Además sabemos cómo trazarla (recuerde como se traza la mediatriz de un segmento).

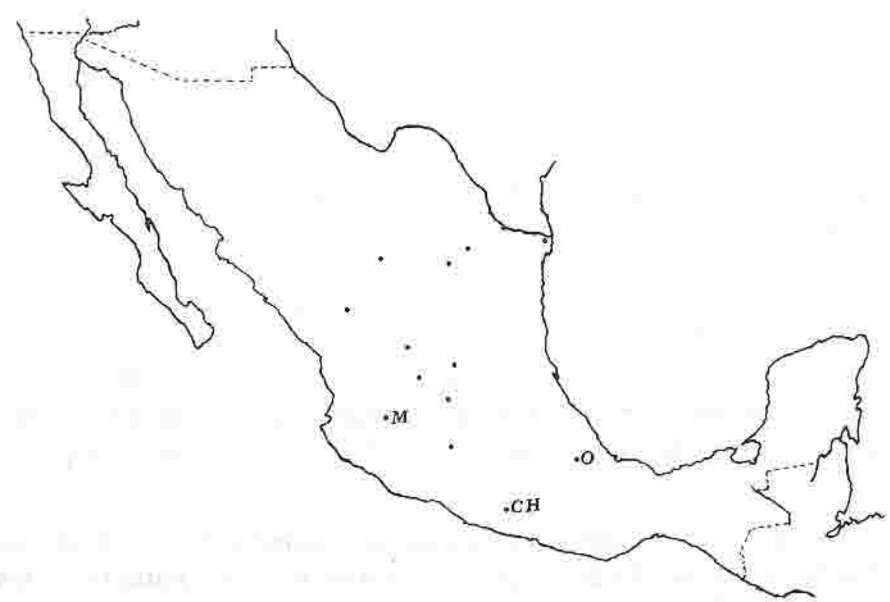
Ejercicio 14. Trace una circunferencia que pase por los tres puntos dados a continuación.



Ejercicio 15. A un mecánico le pidieron que hiciera una perforación en un disco como el que se ilustra a continuación y que sirviera de eje. ¿Puede usted ayudarlo a encontrar dicho eje?

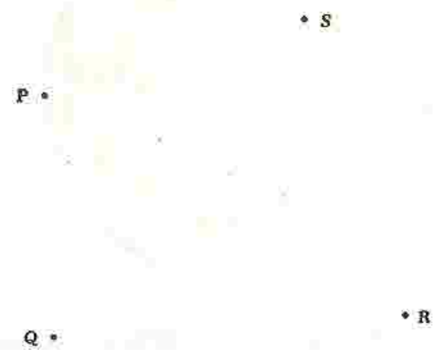


Ejercicio 16. ¿Qué lugar de la República Mexicana equidista (aproximadamente) de las ciudades de Matamoros, Orizaba y Chilpancingo? (Utilice el siguiente mapa.)



Ejercicio 17. En una explanada hay tres puntos A, B y C tales que cada uno dista del otro 550 m. Haga un plano a escala 1:1 000. Encuentre un punto M que equidiste de A, B y C y encuentre esta distancia en el plano y la distancia real.

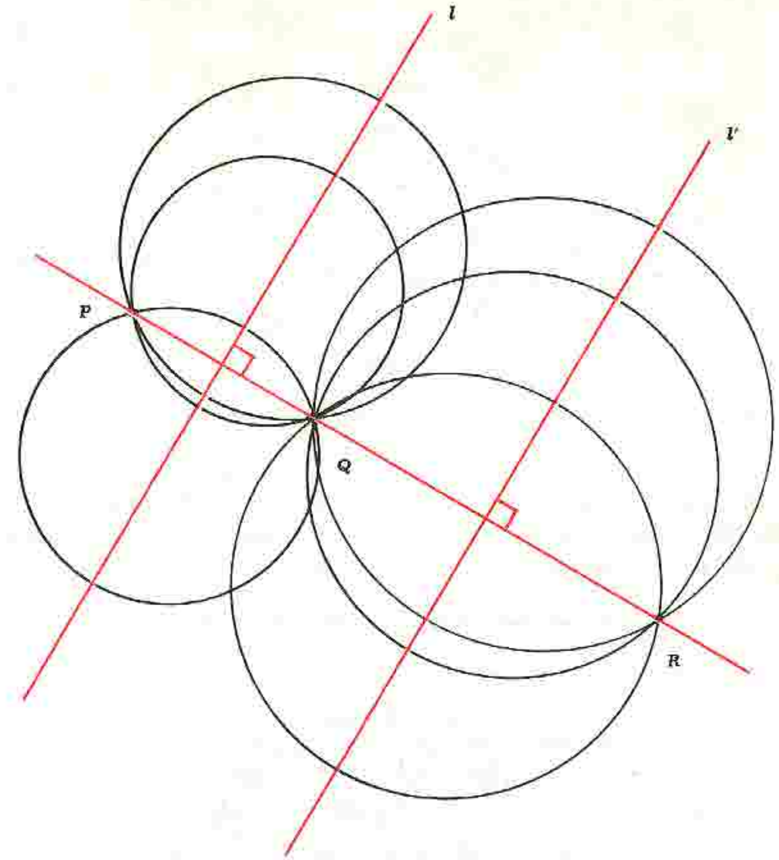
Ejercicio 18. Determine si los siguientes cuatro puntos están en una misma circunferencia.



Ejercicio 19. Determine si los siguientes cuatro puntos están en una misma circunferencia.

Después de haber examinado el *primer caso* y de ver algunas aplicaciones consideremos qué ocurre cuando se tienen tres puntos colineales:

2o. caso. Consideremos tres puntos colineales P, Q y R. Si una circunferencia pasara por P, Q y R, su centro estaría tanto en l (mediatriz de $\overline{PQ}$) como en l' (mediatriz de $\overline{QR}$). (Vea el dibujo.)



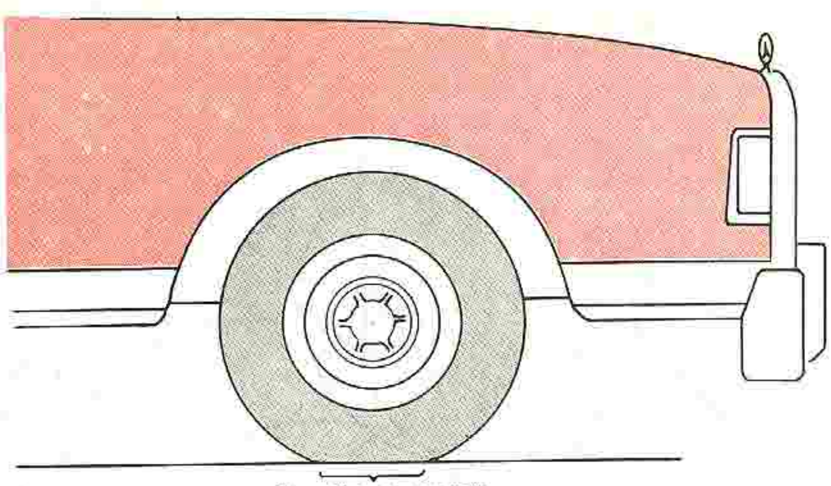
Pero ahora l y l' son paralelas por lo que no se intersecan. Por lo tanto no hay circunferencias que pasen por P, Q y R. Es decir, hemos demostrado que:

> TEOREMA. *En una circunferencia no hay tres (o más) puntos colineales.*

Tangentes

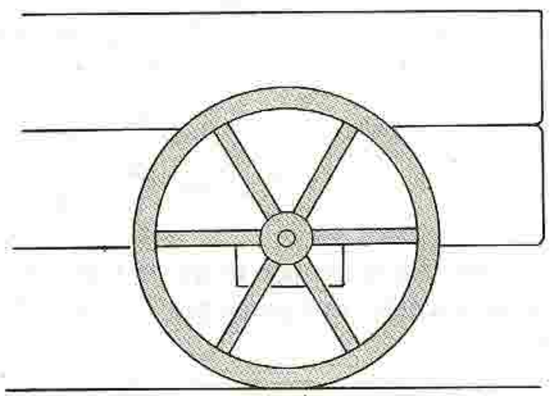
Si observamos una rueda de un camión cargado podemos notar que ésta hace contacto con el piso en un cierto tramo.

Esto se debe a que la llanta es relativamente blanda y se deforma con cierta facilidad al soportar el peso del vehículo.



Superficie de contacto

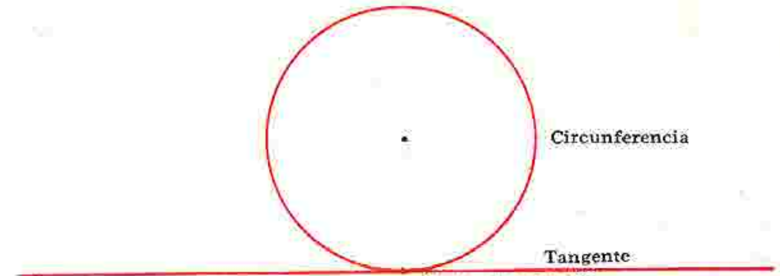
Si, en cambio, observamos una rueda de un carro, la cual es muy dura, apoyada en un piso plano y duro también, vemos que la superficie de contacto es muy pequeña.



Superficie de contacto

Estas observaciones pueden sugerirnos que una rueda "ideal" sobre un piso plano "ideal" debería tener un solo punto de contacto. La siguientes definición describe esta situación ideal.

DEFINICION. *Se dice que una recta es tangente a una circunferencia si la intersección de la recta y la circunferencia consta de un solo punto. Ese punto se llama punto de contacto.*



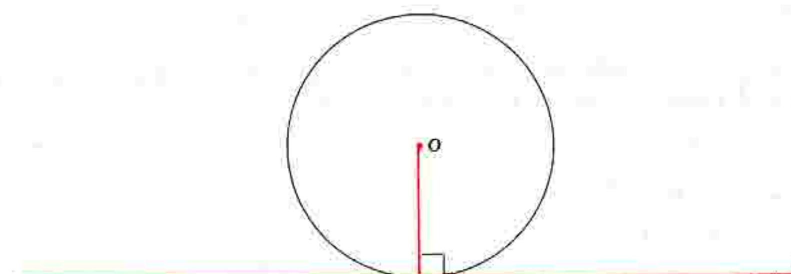
Los dos trabajos prácticos siguientes le darán una idea acerca de una propiedad básica de las tangentes a una circunferencia.

Trabajo 1. Del eje de una rueda que se encuentre sobre un piso horizontal cuelgue una plomada. ¿Dónde queda la punta de la plomada? ¿Qué ángulo forman la plomada y el piso?

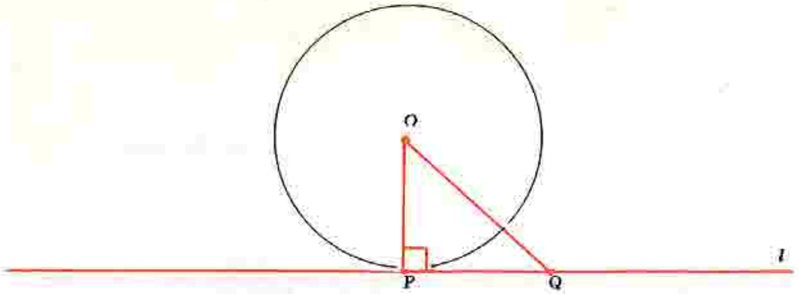
Trabajo 2. Dibuje en un cartón una circunferencia y un radio. Recorte el círculo y hágalo rodar alrededor del centro. Cuando considere que la punta del radio que usted marcó hace contacto con el piso mida el ángulo que forman el radio y el piso.

Estos dos "experimentos" sugieren que la tangente a una circunferencia debe ser perpendicular al radio en el punto de tangencia. Esto se aclarará definitivamente con el resultado siguiente.

TEOREMA. *La tangente a una circunferencia en un punto P de la circunferencia es la recta perpendicular al radio OP en el punto P.*



Demostración. Para comprobar que l es tangente debemos hacer ver que el único punto de l que está en la circunferencia es P. En efecto, tomemos un punto *cualquiera* Q de l que no sea P.

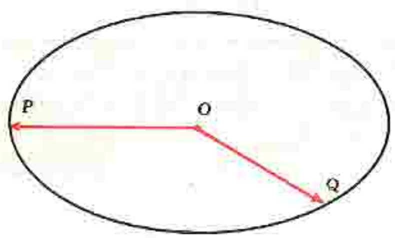


Como el triángulo OPQ es rectángulo, la hipotenusa OQ es más larga que el cateto OP. Por lo tanto,

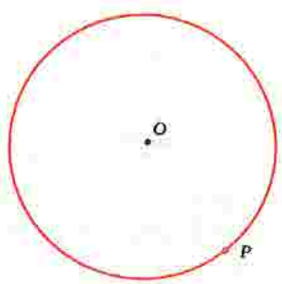
$$OQ > OP = r$$

lo cual indica que Q es exterior y *no está en la circunferencia.*

Trabajo 3. En otras curvas, como aquí observaremos, la situación no es tan simple. Copie la siguiente elipse en un cartón y hágala "rodar" alrededor del centro O. Observe que cuando el punto P hace contacto con el piso, $\overline{OP}$ es perpendicular al piso. En cambio, cuando Q hace contacto con el piso, OQ *no* es perpendicular a él. Encuentre en qué puntos de la elipse ocurre lo primero.



Ejercicio 20. Utilizando el teorema demostrado dibuje la tangente en el punto P de la siguiente circunferencia.

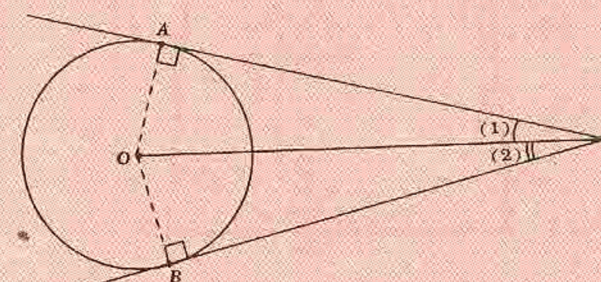


Ejercicio 21. Trace una circunferencia de 1.5 cm de radio y que sea tangente a la siguiente recta en el punto P indicado.

¿Cuántas soluciones tiene este problema?

Utilizando los conocimientos adquiridos acerca de las tangentes a circunferencias y los criterios de congruencia de triángulos es fácil demostrar una serie de interesantes resultados. Aquí demostraremos algunos y quedarán como ejercicios adicionales otros.

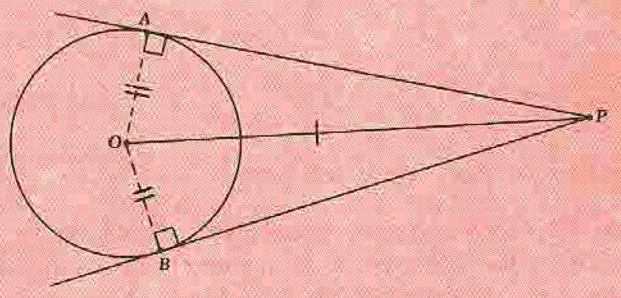
TEOREMA. *Si desde un punto P se trazan dos tangente $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ a una circunferencia de centro O entonces el rayo $\overrightarrow{PO}$ biseca al ángulo $\angle APB$.*



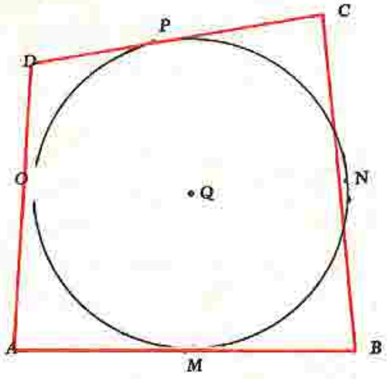
Demostración. Como $\overline{OA}$ en un radio y $\overleftrightarrow{PA}$ es tangente, $\overline{OA} \perp \overline{PA}$. Por la misma razón $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{PB}$. Los triángulos $\triangle AOP$ y $\triangle BOP$ son rectángulos. Tienen la hipotenusa común y $OA \cong OB$. Por lo tanto son congruentes. Luego, los ángulos correspondientes (1) y (2) son también congruentes.

Ejercicio 22. Utilizando criterios de congruencia de triángulos demuestre el siguiente resultado (Observe la figura).

TEOREMA. *Si desde un punto P se trazan dos tangentes a una circunferencia, entonces las distancias de P a los puntos de tangencia son iguales.*



Ejercicio 23. Se dice que un cuadrilátero *circunscribe* una circunferencia si sus cuatro lados son tangentes a ella.



Demuestre que:

TEOREMA. *Si ABCD es un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, entonces*

$$AB + CD = AD + BC$$

Es decir, las sumas de las longitudes de sus lados opuestos son iguales.

Sugerencia para la demostración. Aplique el teorema del ejercicio inmediato anterior para ver que

$$AM = AQ \qquad DP = DQ$$

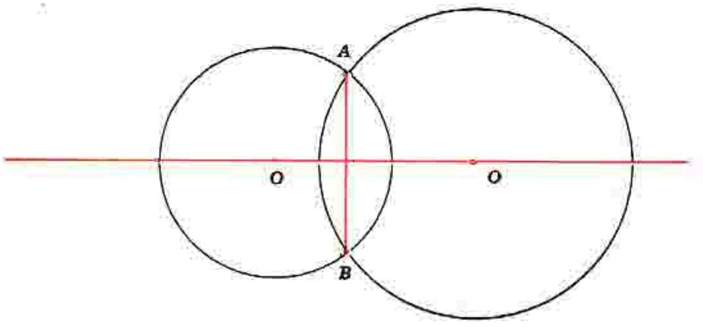
$$MB = BN \qquad PC = CN$$

Después sume las cuatro igualdades anteriores y observe que $AM + MB = AB$, etc.

Ejercicio 24. Demuestre que:

TEOREMA. *Si dos circunferencias se intersecan en dos puntos A y B, entonces $\overline{AB}$ es perpendicular a la recta que pasa por los centros.*

Sugerencias. Observe la figura y recuerde que el centro de una circunferencia está en la mediatriz de cualquiera de sus cuerdas.

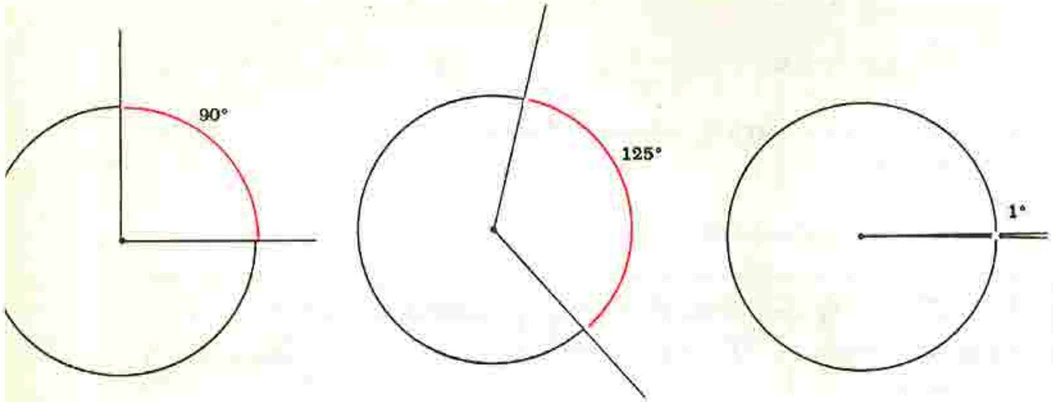


2. ANGULOS INSCRITOS

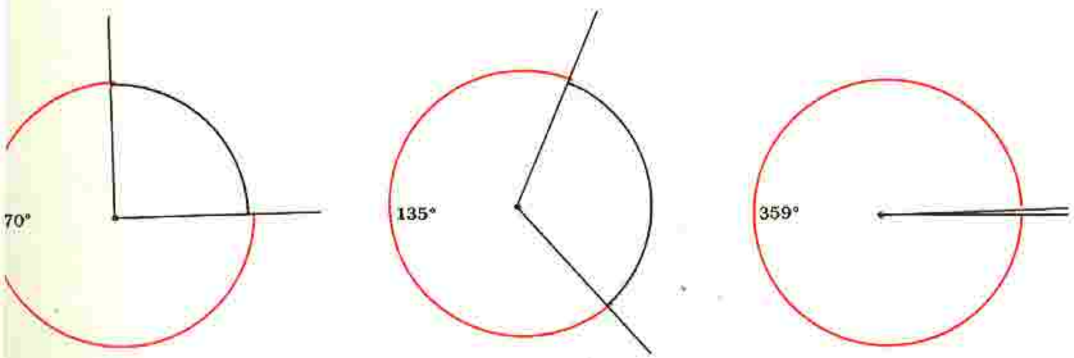
Medida en grados de un arco

En una circunferencia, cada ángulo central determina un arco que hemos llamado arco menor. Esto permite utilizar la medida en grados del ángulo también como medida del arco.

Así, por ejemplo, los tres ángulos centrales siguientes miden respectivamente, 90°, 125° y 1° Diremos entonces que los arcos menores miden, respectivamente, 90°, 125° y 1°.

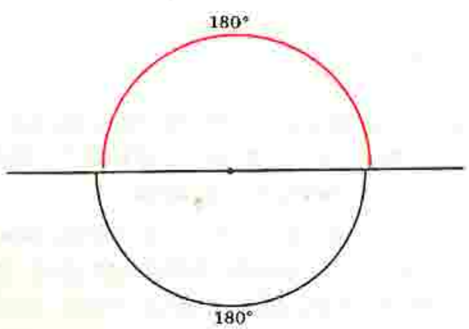


Cuando consideremos un *arco mayor*, diremos que su medida en grados es 360° menos la medida del arco menor correspondiente. Así, en los ejemplos anteriores, las medidas de los arcos mayores son:



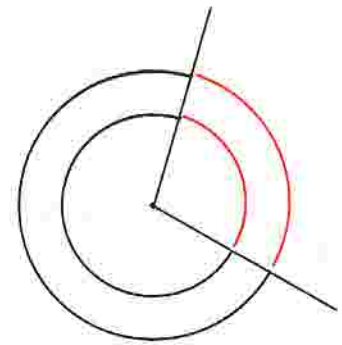
(360 − 90 = 270) (360 − 25 = 135) (360 − 1 = 359)

Observación. En el caso de un ángulo llano, resulta que cada uno de los arcos mide 180° (360° − 180° = 180°).



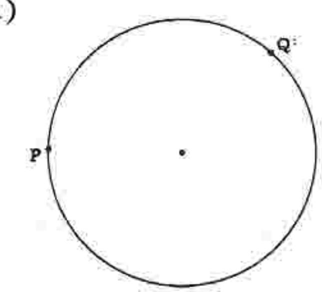
La medida de un arco reducido a un solo punto es cero grados.
La medida en grados de toda la circunferencia es 360°.

Observación. Un mismo ángulo determina distintos arcos en distintas circunferencias. Sin embargo la *medida en grados* de dichos arcos es la misma.



Ejercicio 25.

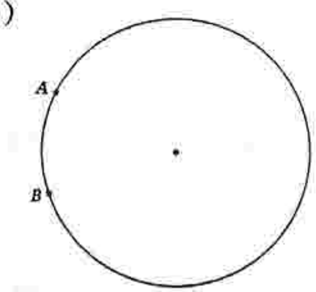
a)



El arco menor PQ mide

El arco mayor PQ mide

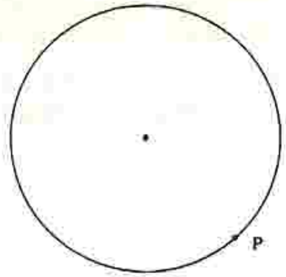
b)



El arco menor AB mide

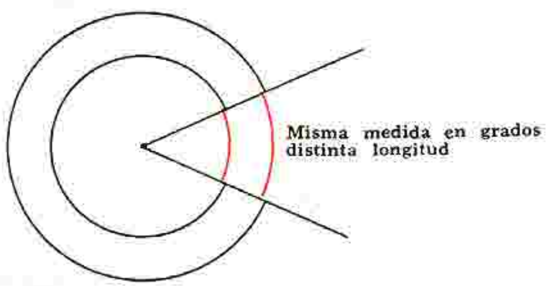
El arco mayor AB mide

c) En la siguiente circunferencia dibuje un arco de 90° que tenga un extremo en P. ¿Es el único? ¿Cuántos hay con esas condiciones?



Longitud de un arco

Como se observó en el párrafo anterior dos arcos distintos pueden tener la misma medida en grados:



Sin embargo uno de ellos puede ser "más largo" que el otro. Por ello a veces conviene medir los arcos con el mismo tipo de medida que los segmentos. La idea es muy simple.

Recordemos que la **longitud** de una circunferencia de radio r es

$$2\pi r,$$

en donde π denota un número que, aproximadamente, es 3.1416.

Como la circunferencia mide 360°, la longitud de un arco de 1 grado será

$$\frac{2\pi r}{360}$$

Por lo tanto, la longitud L de un arco que mida g grados será

$$L = \frac{2\pi r g}{360}$$

unidades de longitud.

Ejemplo

a) La longitud de un arco de 90° en una circunferencia de radio 3 cm es, aproximadamente,

$$\frac{2 \times 3.14 \times 3 \times 90}{360} = 4.71 \text{ cm.}$$

b) La longitud de una semicircunferencia (arco de 180°) es

$$\frac{2\pi r \times 180}{360} = \pi r.$$

c) La longitud de un arco de 120° en una circunferencia de 79 m es, aproximadamente,

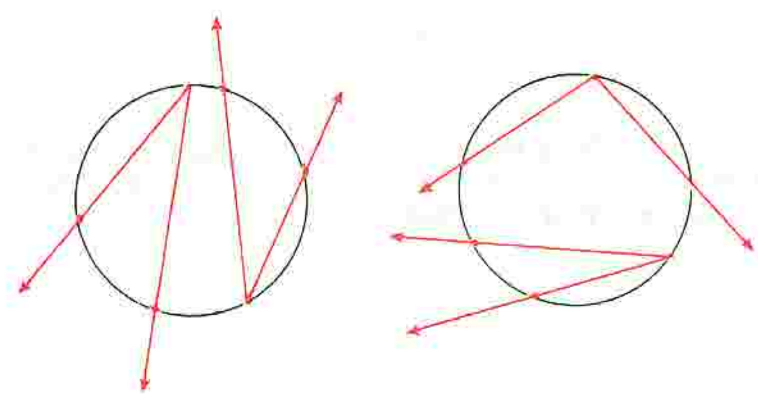
$$\frac{2 \times 3.14 \times 79 \times 120}{360} = 165.37 \text{ m}$$

Ejercicio 26. Encuentre la longitud de

a) Un arco de 90° en una circunferencia de radio 10 cm.
b) Un arco de 1 grado en una circunferencia de radio 1 km.
c) Un arco de 1 grado en la superficie de la Tierra. El radio de la tierra es, aproximadamente, de 6 400 km.)
d) Encuentre la distancia mínima (aproximada) que deberíamos recorrer para ir de un punto de la Tierra a su antípoda.

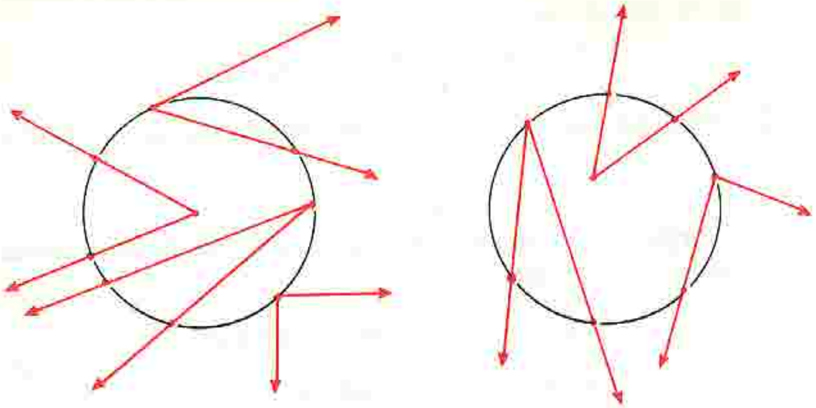
Angulos inscritos

En las siguientes figuras se ilustran ángulos inscritos en una circunferencia.

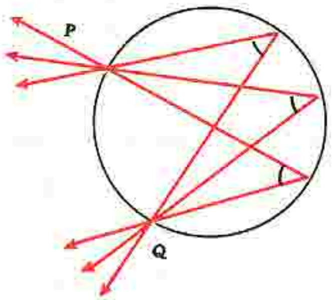


Angulos inscritos son aquellos que tienen su vértice en la circunferencia y que cada uno de sus lados interseca a la circunferencia en otro punto más.

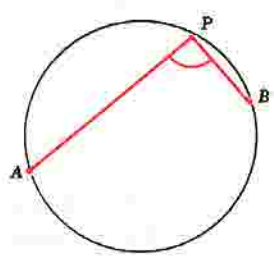
Ejercicio 27. En las siguientes figuras se ilustran varios ángulos. Diga cuáles son inscritos y cuáles no. Explique por qué.



Ejercicio 28. Los tres ángulos inscritos que a continuación se ilustran abarcan un mismo arco, el arco PQ. Compare las medidas de los tres ángulos.

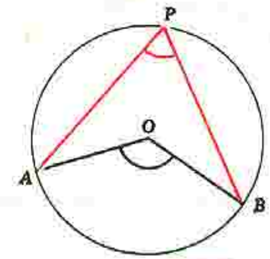


Ejercicio 29. Mida el ángulo $\angle APB$. Después trace varios ángulos inscritos que abarquen el mismo arco AB. Compare la medida de esos ángulos con la del ángulo dado.

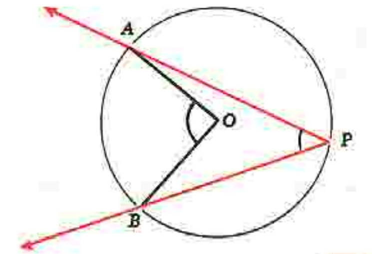


Después de haber resuelto los dos últimos ejercicios ¿puede usted hacer alguna conjetura acerca de los ángulos inscritos que determinen un mismo arco?

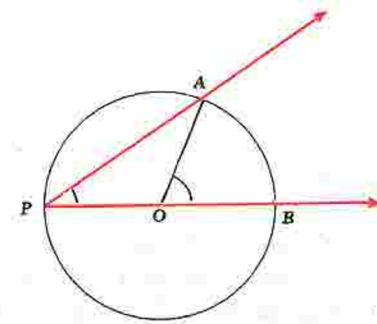
Ejercicio 30. En cada una de las siguientes figuras mida en grados el ángulo inscrito y el ángulo central correspondiente.



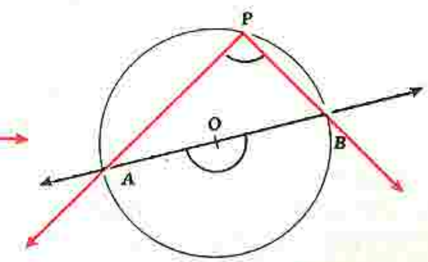
$\measuredangle APB =$
$\measuredangle AOB =$



$APB =$
$AOB =$



$\measuredangle APB =$
$\measuredangle AOB =$



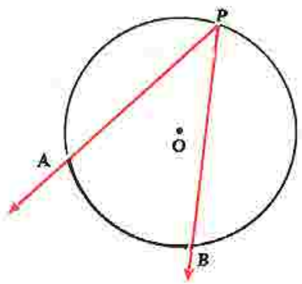
$\measuredangle APB =$
$\measuredangle AOB =$

¿Puede ahora hacer alguna conjetura acerca de las medidas de un ángulo central y un ángulo inscrito que abarquen un mismo arco?

Lo que usted acaba de observar en estos ejemplos es cierto en general y los conocimientos que ya hemos adquirido nos permitirán demostrarlo.

> TEOREMA. *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la medida en grados del arco que determina.*

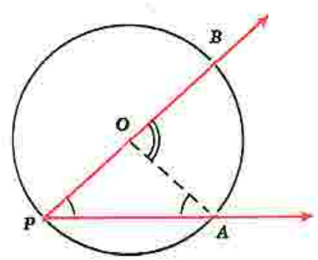
Si denotamos con AB *la medida en grados* del arco AB determinado por el ángulo inscrito $\angle APB$, tenemos:



$$\measuredangle APB = \tfrac{1}{2}\, AB$$

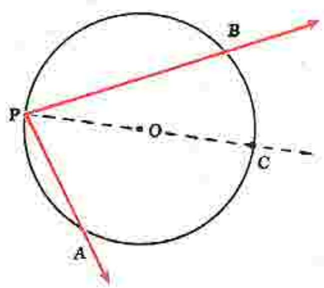
Demostración. Se pueden presentar *tres* casos, que demostraremos aparte.

Primer caso. El centro O está en uno de los lados del ángulo. En este caso consideramos el triángulo $\triangle AOP$.



Como $\overline{OP}$ y $\overline{OA}$ son radios, este triángulo es isósceles y por lo tanto $\measuredangle P = \measuredangle A$. Como $\angle AOB$ es un ángulo exterior de dicho triángulo, $\measuredangle AOB = \measuredangle P + \measuredangle A = 2\measuredangle P$. Por lo tanto, $\measuredangle P = \tfrac{1}{2}\measuredangle AOB$. Finalmente, la medida en grados del arco AB es igual a $\measuredangle AOB$, de donde, $\measuredangle P = \tfrac{1}{2}AB$.

Segundo caso. El centro de la circunferencia está en el interior del ángulo, trazamos el rayo auxiliar.



Tenemos que

$$\measuredangle APB = \measuredangle APC + \measuredangle CPB.$$

Además, según lo demostrado en el primer caso,

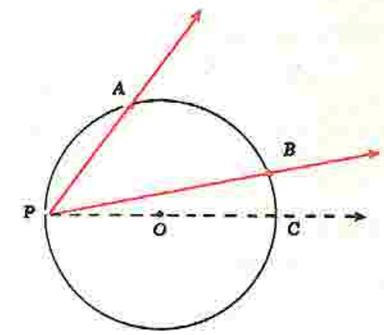
$$\measuredangle APC = \tfrac{1}{2}AC$$

$$\measuredangle CPB = \tfrac{1}{2}CB$$

Por lo tanto, sumando miembro a miembro obtenemos

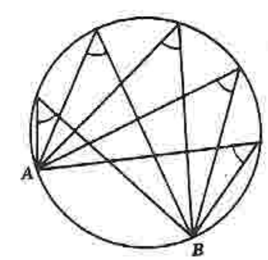
$$\measuredangle APB = \tfrac{1}{2}AC + \tfrac{1}{2}CB = \tfrac{1}{2}AB.$$

Ejercicio 31. Procediendo como en el segundo caso (sólo que restando) demuestre el tercer caso, que es cuando el centro es exterior al ángulo. Para ello observe lo siguiente figura y que $\measuredangle APB = \measuredangle APC - \measuredangle CPB$.



COROLARIO 1. *Todos los ángulos inscritos en una circunferencia y que determinen un mismo arco son congruentes.*

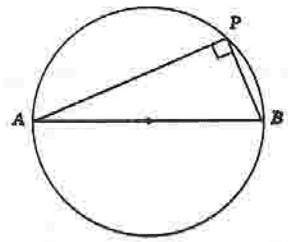
Demostración. Cada uno de estos ángulos mide la mitad del arco AB, por lo que todos miden lo mismo, es decir, son congruentes.



COROLARIO 2. *Si los lados de un ángulo inscrito en una circunferencia pasan por los extremos de un diámetro, el ángulo es recto.*

Demostración.

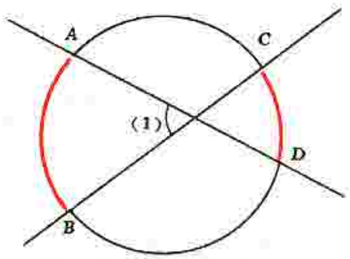
$\measuredangle APB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}180° = 90°$



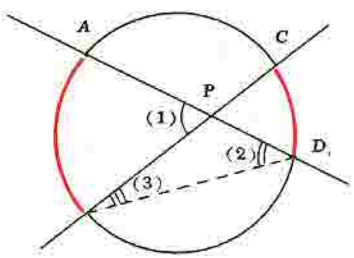
A continuación damos tres resultados adicionales como ejercicios, indicando métodos de demostración.

Ejercicio 32. Para ángulos como el de la siguiente figura demuestre que

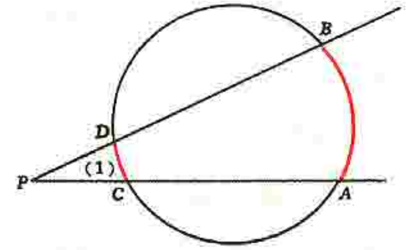
$\measuredangle(1) = \frac{1}{2}(AB + CD)$



Sugerencia. Observe la siguiente figura en donde se ha trazado el segmento auxiliar BD. Tome en cuenta que $\measuredangle(1) = \measuredangle(2) + \measuredangle(3)$. Después aplique el teorema demostrado anteriormente a los ángulos inscritos $\angle(2)$ y $\angle(3)$.

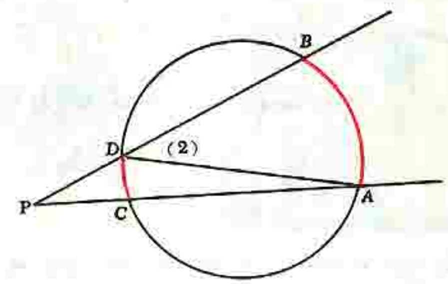


Ejercicio 33. Para ángulos como los de la siguiente figura demuestre que

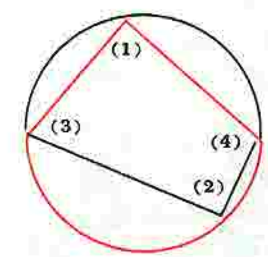


$\measuredangle(1) = \frac{1}{2}(AB - CD)$

Sugerencia. Examine la siguiente figura, en la que se ha trazado el segmento auxiliar $\overline{AD}$. Considere que $\angle(2)$ es un ángulo externo del $\triangle ADP$. Aplique después el teorema a los ángulos inscritos $\angle(2)$ y $\angle(3)$.

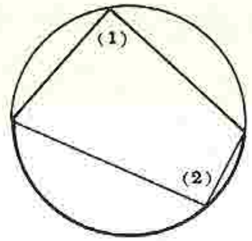


Ejercicio 34. Se dice que un cuadrilátero está inscristo en una circunferencia si sus cuatro vértices están en una circunferencia.



Demuestre que $\measuredangle(1) + \measuredangle(2) = 180°$ y análogamente, $\measuredangle(3) + \measuredangle(4) = 180°$.

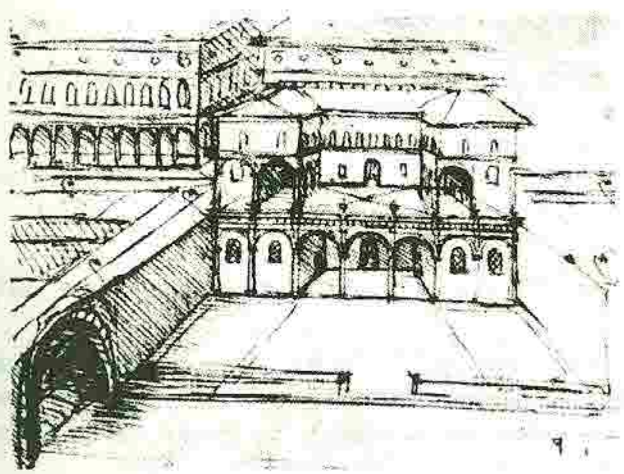
Sugerencia. Observe que $\angle(1)$ y $\angle(2)$ son inscritos. Aplique el teorema a éstos ángulos y tome en cuenta que la medida en grados del arco marcado con color más la medida en grados del arco negro es 360°.

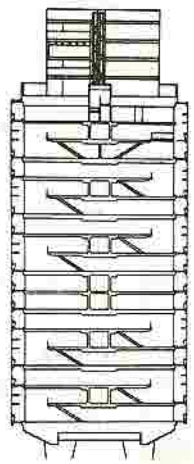


3. CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS

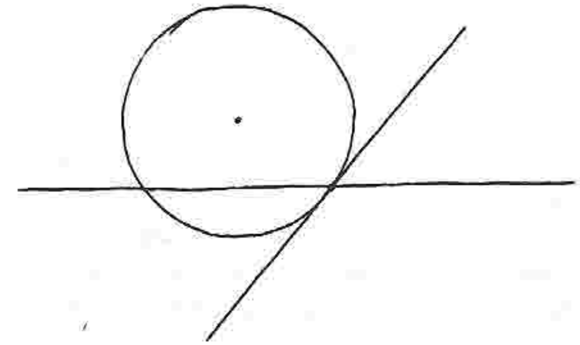
Desde los albores de la historia el hombre ha tratado de comunicarse no solamente con el idioma hablado sino también mediante imágenes pictóricas.

La mayoría de las veces los dibujos con que se describen ideas y objetos no requieren de mucha precisión. Por ejemplo, grandes artistas y hombres de ciencia han necesitado solamente unos cuantos trazos para expresarse.

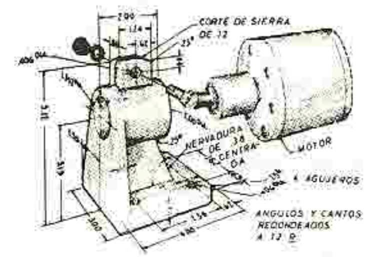




En nuestros estudios de geometría, para describir rectas, segmentos, circunferencias, etc. muchas veces bastan dibujos trazados a mano y no muy precisas (rectas "no muy rectas", circunferencias "no muy redondas").



Sin embargo a veces, como por ejemplo en el diseño y fabricación de piezas, en el diseño arquitectónico e industrial, se requieren figuras que no solamente den una idea general, sino que describan al objeto con toda precisión. Observe las siguientes figuras:

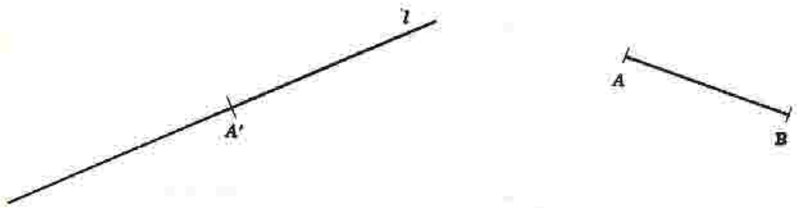


Algunos de los métodos que se usan en el trazado de dibujos se basan en los conocimientos que ya hemos adquirido de geometría euclidiana.

A continuación indicaremos varios problemas de dibujo constructivo (algunos ya se han estudiado durante los tres cursos de matemáticas) y daremos las justificaciones de cada uno de ellos. Haremos énfasis especial en las llamadas construcciones con regla y compás.

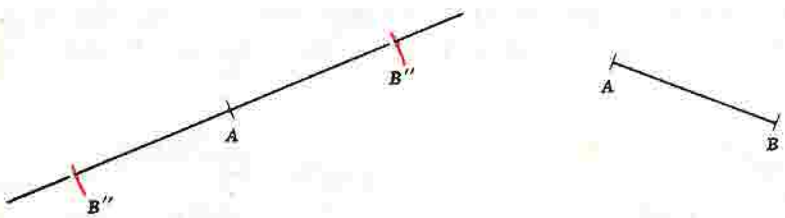
1. *En una recta dada construir segmentos congruentes a uno dado y que tengan por extremo un punto dado.*

Datos. La recta l, el punto A' en l y el segmento $\overline{AB}$.

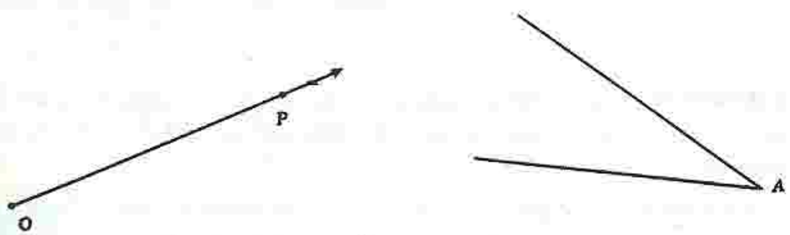


Solución. Con el compás medimos el segmento $\overline{AB}$ y con esta abertura apoyamos su punta en A' y marcamos dos arcos que corten a l'. Obtenemos puntos B' y B''. Los segmentos $A'B'$ y $A'B''$ son soluciones.

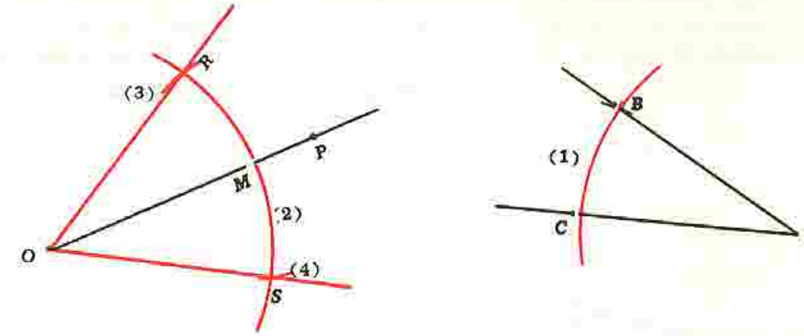
Justificación. Como $A'B' = AB$, $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$. Lo mismo para $\overline{A'B''}$.



2. *Trazar ángulos que tengan como lado a un rayo dado $\overrightarrow{OP}$ y que sean congruentes a un ángulo dado $\angle A$.*



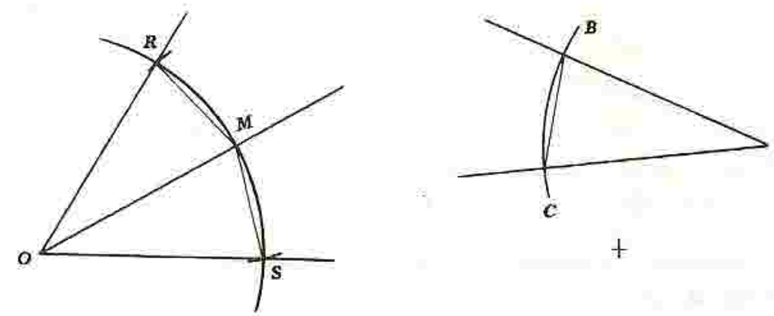
Solución. Trazamos un arco (1) con centro A que corte a los lados del $\angle A$. Con la misma abertura del compás trazamos un arco con centro en O.



Abrimos ahora el compás de modo que sus puntas coincidan con los puntos B y C. Con esa abertura y apoyando la punta en el punto M, trazamos dos arcos (3) y (4) que

intersequen el arco (2). Trazamos los rayos $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{OS}$. Los ángulos $\angle POR$ y $\angle POS$ son soluciones del problema.

Justificación.

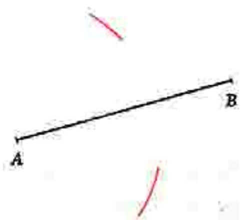
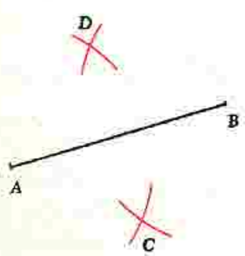
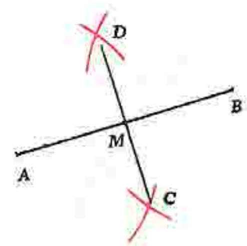


Los triángulos $\triangle ORM$ y $\triangle OSM$ son congruentes con el $\triangle ABC$.

3. *Trazar el punto medio de un segmento.*

(Esta construcción, así como la 4, 5 y 6 se vieron en el primer curso de matemáticas. Las transcribimos aquí.)

4. *Encontrar el punto medio de un segmento.*

Consideremos el segmento $\overline{AB}$. 	Con una abertura conveniente del compás, y apoyándolo en A, trazamos dos arcos. 
Con la misma abertura del compás, y apoyándolo en B, trazamos otros dos arcos que intersequen a los anteriores. 	Unimos los puntos C y D. La intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ nos da el punto M. 

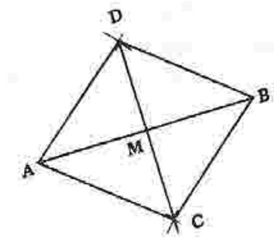
Afirmamos que

El punto M, obtenido con ese procedimiento, es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Demostración. Puesto que los cuatro arcos los hemos marcado con una misma abertura del compás, resulta que

$$AD = DB = BC = CA.$$

Por lo tanto, al unir los puntos A, B, C y D, se forma un rombo.

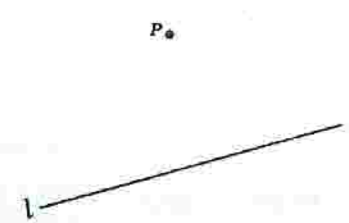
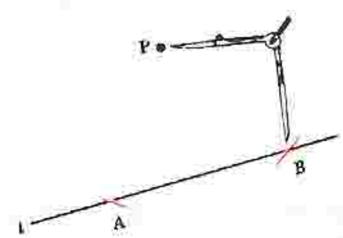


Puesto que las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio M *es el punto medio de* $\overline{AB}$. (Qué es lo que queríamos demostrar.)

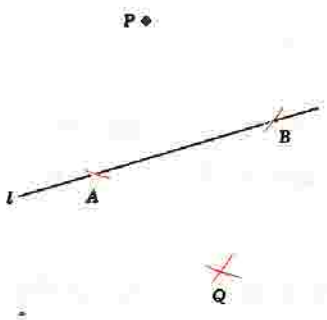
4. *Trazar una perpendicular que pase por el punto medio de un segmento.*

Repetimos exactamente la construcción anterior y la recta $\overleftrightarrow{CD}$ resulta perpendicular al segmento $\overline{AB}$. (Esto es así porque las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.)

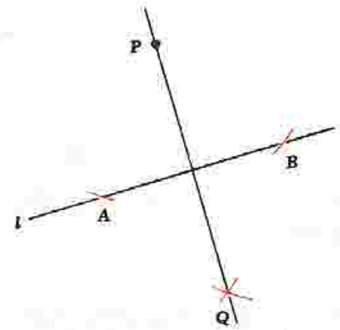
5. *Por un punto, P, que no esté en una recta l, trazar una perpendicular a l.*

Consideremos el punto P y la recta l. 	Apoyando el compás en P, y con una misma abertura, trazamos dos arcos que intersequen a l. Obtenemos dos puntos A y B. 

Apoyando el compás primero en A y después en B, y con la misma abertura que antes, trazamos dos arcos que se intersequen. Obtenemos el punto Q.



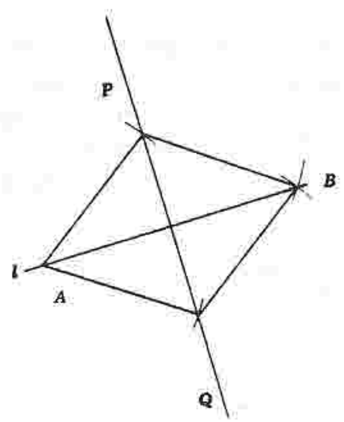
Trazamos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.



Afirmamos que

La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ trazada es perpendicular a l.

Demostración. El cuadrilátero $AQBP$ obtenido al trazar los segmentos $\overline{AQ}$, $\overline{QB}$, $\overline{BP}$ y $\overline{PA}$ es un rombo. (Pues en los pasos 2 y 3 hemos usado la misma abertura del compás.)



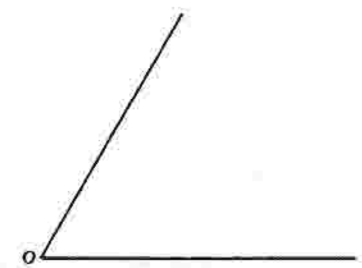
Puesto que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí, $\overline{PQ}$ es perpendicular a l. (Que es lo que queríamos demostrar.)

6. *Trazar la bisectriz de un ángulo dado.*

El trazado de bisectrices mediante el uso del transportador no es un compás y una regla. En este método se aplica una propiedad de las diagonales de los rombos.

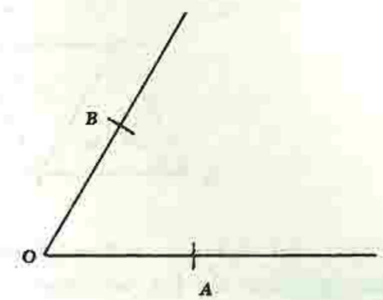
Observe la siguiente serie de ilustraciones.

1

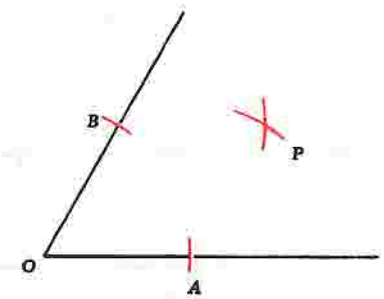


Angulo dado.

2

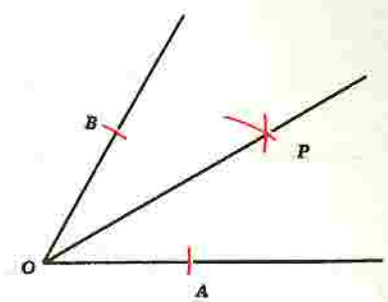


Apoyando el compás en el vértice O, trazamos dos arcos con una misma abertura. Obtenemos los puntos A y B.



Con la misma abertura del compás que en 2, marcamos dos arcos que se intersequen, apoyando el compás primero en A y después en B. Obtenemos un punto P.

4

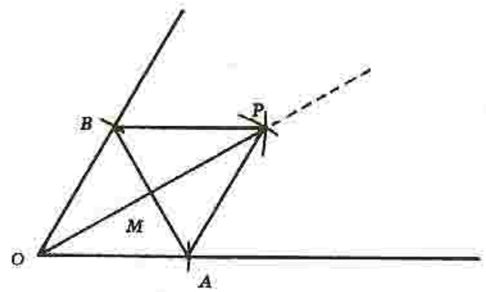


Trazamos la semirrecta OP.

Aseguramos que:

La semirrecta OP así obtenida es la bisectriz del ángulo ∠AOB dado.

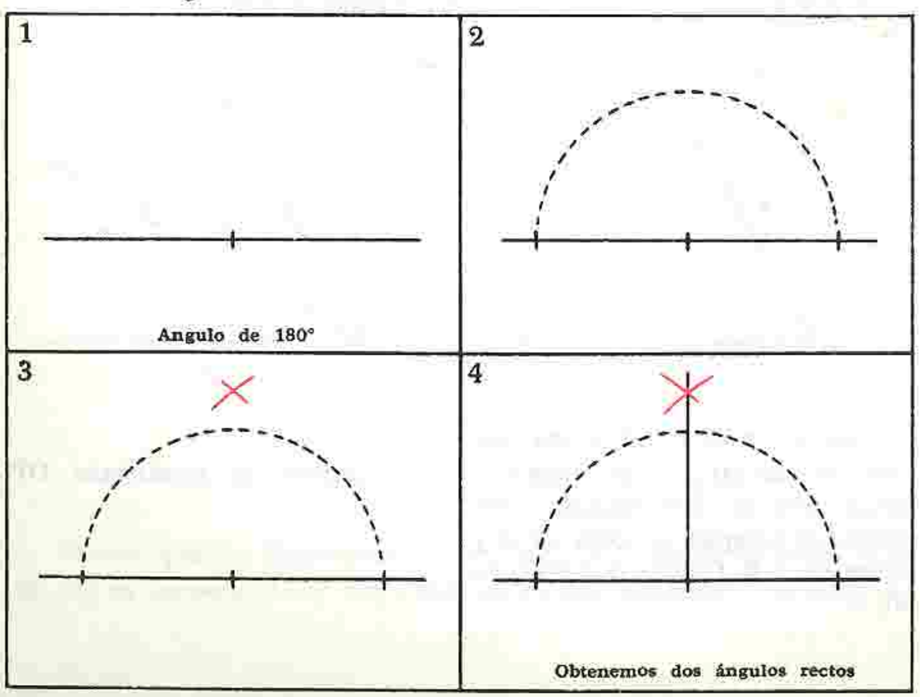
En efecto, si trazamos los segmentos *AP* y *BP*, obtenemos un rombo *OAPB*, pues los cuatro lados los hemos marcado con la misma



abertura del compás y las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos de los vértices.

7. *En un punto P de una recta trazar una perpendicular.*

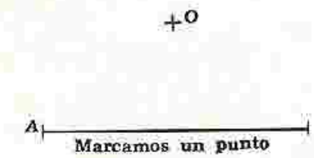
Solución. Aplicamos la construcción anterior a un ángulo llano. Observe la siguiente serie de ilustraciones.

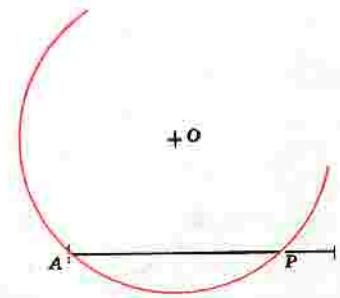


Justificación. La bisectriz de un ángulo de 180° es perpendicular a los lados.

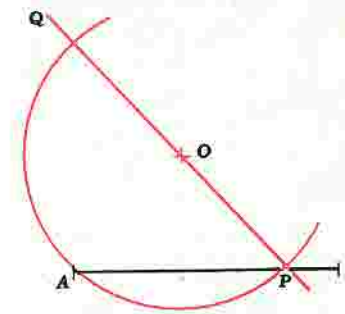
8. *En el extremo A de un segmento trazar una perpendicular* (sin necesidad de prolongarlo).

Solución.

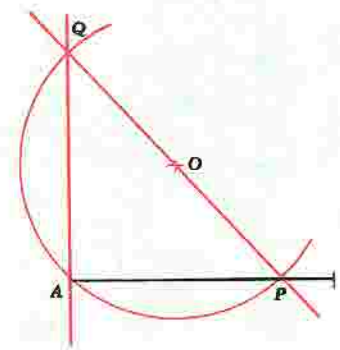




Trazamos un arco que pase por el extremo del segmento



Trazamos el diámetro que pase por P. Obtenemos un punto Q



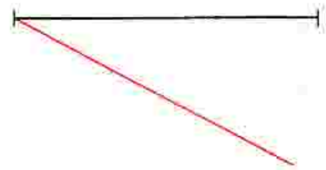
La recta $\overleftrightarrow{AQ}$ es perpendicular al segmento $\overline{AB}$

Justificación. El ángulo ∠*PAQ* es recto porque es inscrito y abarca una semicircunferencia.

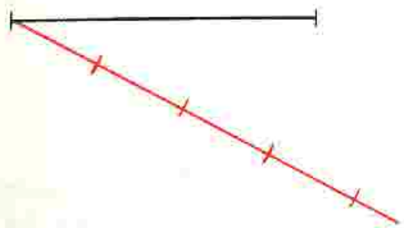
9. *Dividir un segmento en n segmentos congruentes entre sí.*

Solución. Haremos el caso $n = 4$. El método y la justificación son los mismos para cualquier n.

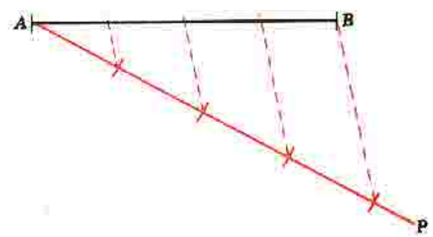
Segmento dado



Trazamos un rayo auxiliar



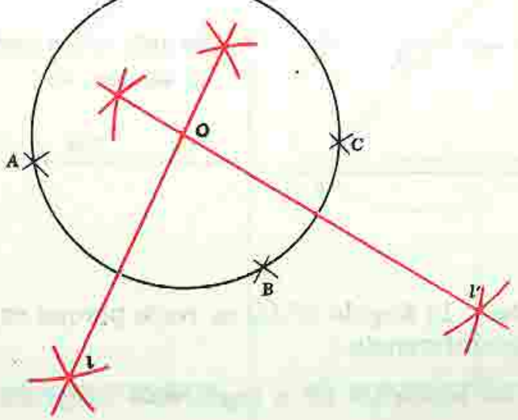
Con un compás marcamos 4 segmentos congruentes cualesquiera.



Trazamos el segmento PB y tres segmentos más, paralelos a PB.

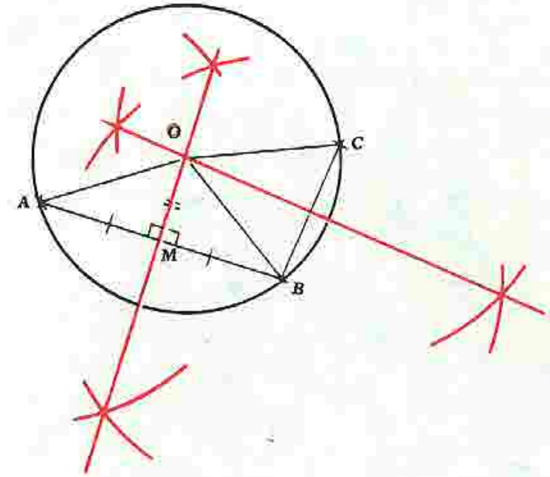
Los puntos determinados por estas paralelas a $\overline{AB}$ lo subdivide en 4 segmentos congruentes entre sí.

10. *Trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados (no colineales).*

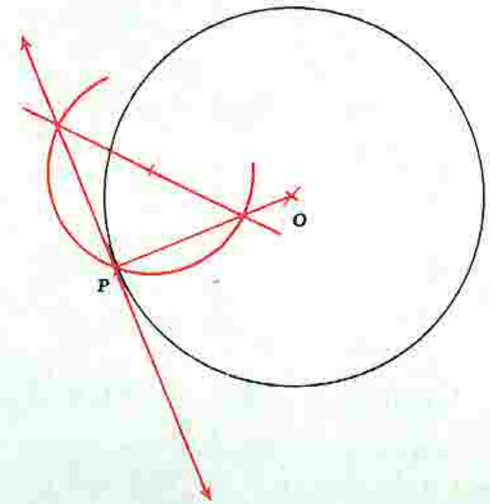


Solución. Sean A, B y C los puntos. Utilizando la construcción 3' trazamos las rectas l y l' perpendiculares a los segmentos AB y BC en sus puntos medios. La intersección de l y l' es el centro O.

Justificación. $\triangle AMO \cong \triangle BMO$ (porque son rectángulos y tienen los catetos correspondientes congruentes). Luego $AO = BO$. Análogamente, $BO = CO$.



11. *En un punto dado de una circunferencia trazar la recta tangente.*

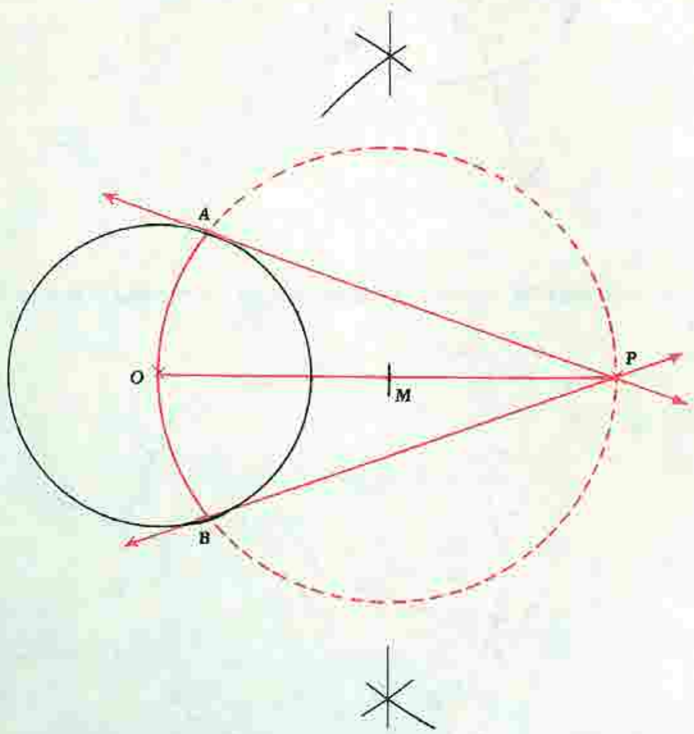


Solución. Sea P el punto dado en la circunferencia. Se traza el radio PO. Después, siguiendo la construcción 2 se traza una perpendicular al segmento $\overline{PO}$ en el extremo P.

Justificación. La tangente a la circunferencia en el punto P es la perpendicular al radio $\overline{PO}$ en P.

12. *Trazar las tangentes a una circunferencia que pasen por un punto exterior dado.*

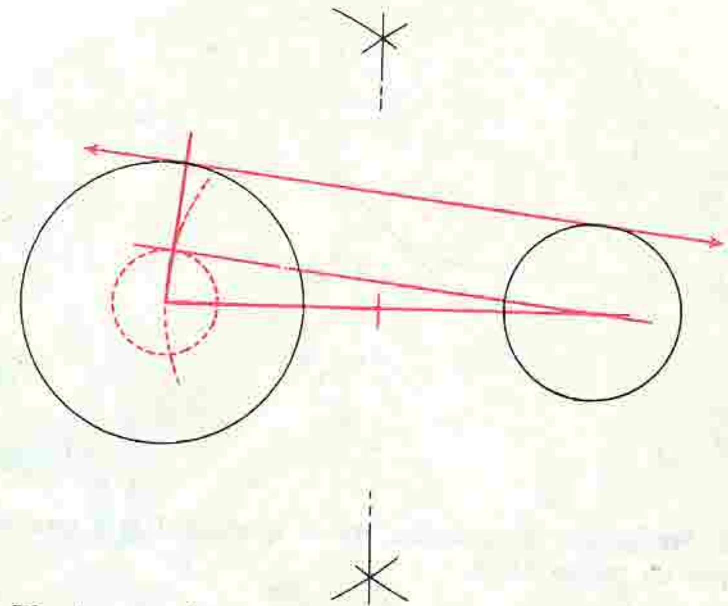
Solución. Sea O el centro y P el punto exterior. Procediendo como en la construcción 3 encontramos el punto medio M de OP. Después, con una abertura de compás determinada por $\overline{OM}$ y con centro en M trazamos un arco que interseque a la circunferencia en dos puntos A y B. Las rectas $\overline{PA}$ y PB son la solución del problema.



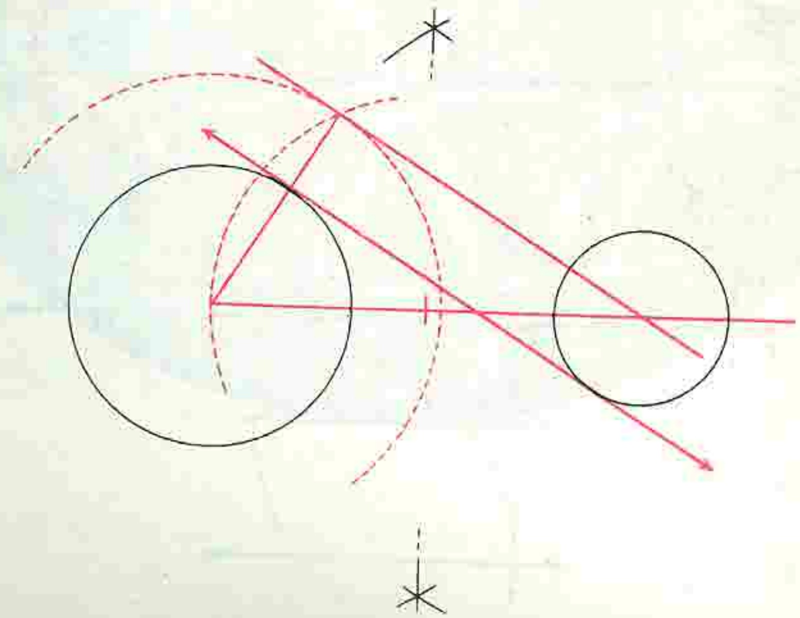
Justificación. Los ángulos $\angle OAP$ y $\angle OBP$ (imagíneselos) son rectos pues determinan una semicircunferencia. Por lo tanto AP y BP son perpendiculares a los radios $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$. Luego son tangentes.

Observe bien cada figura para que pueda explicar las siguientes construcciones.

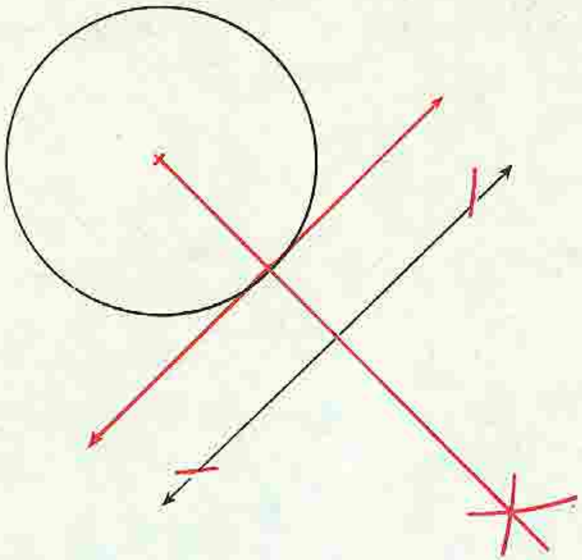
13. *Trazar una tangente común a dos circunferencias.*



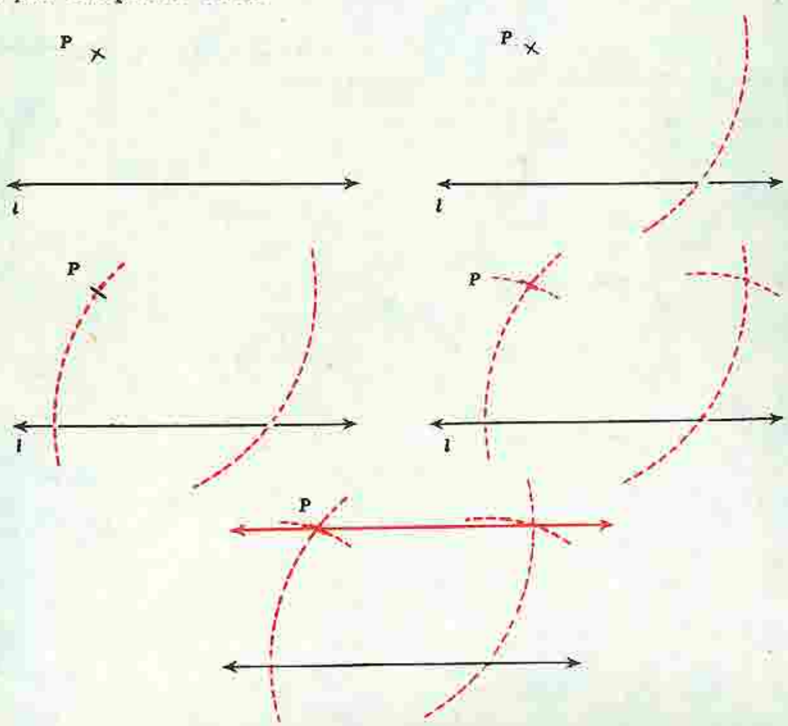
14. *El mismo problema pero que, además, la tangente común interseque el segmento que une los centros.*

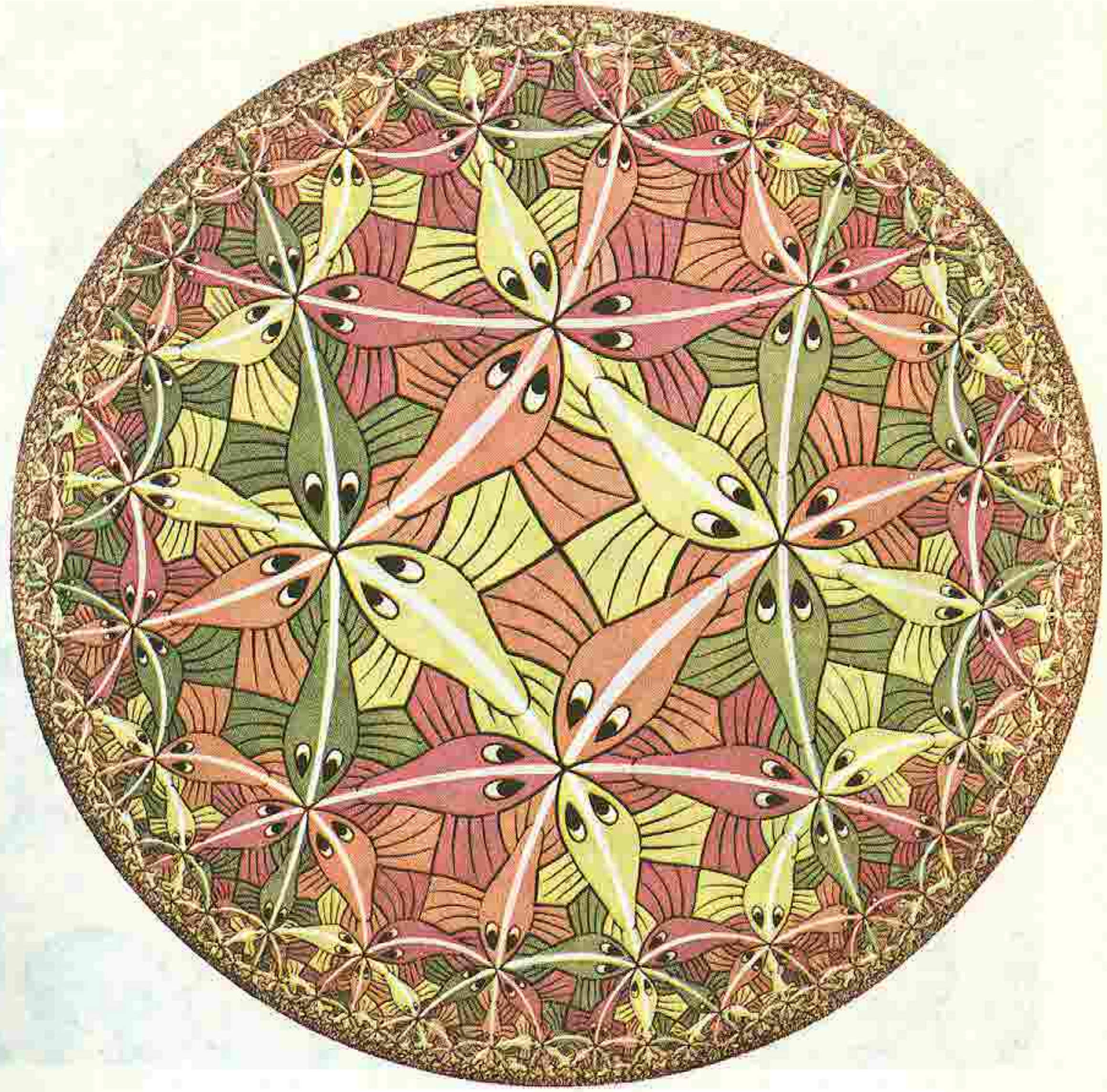


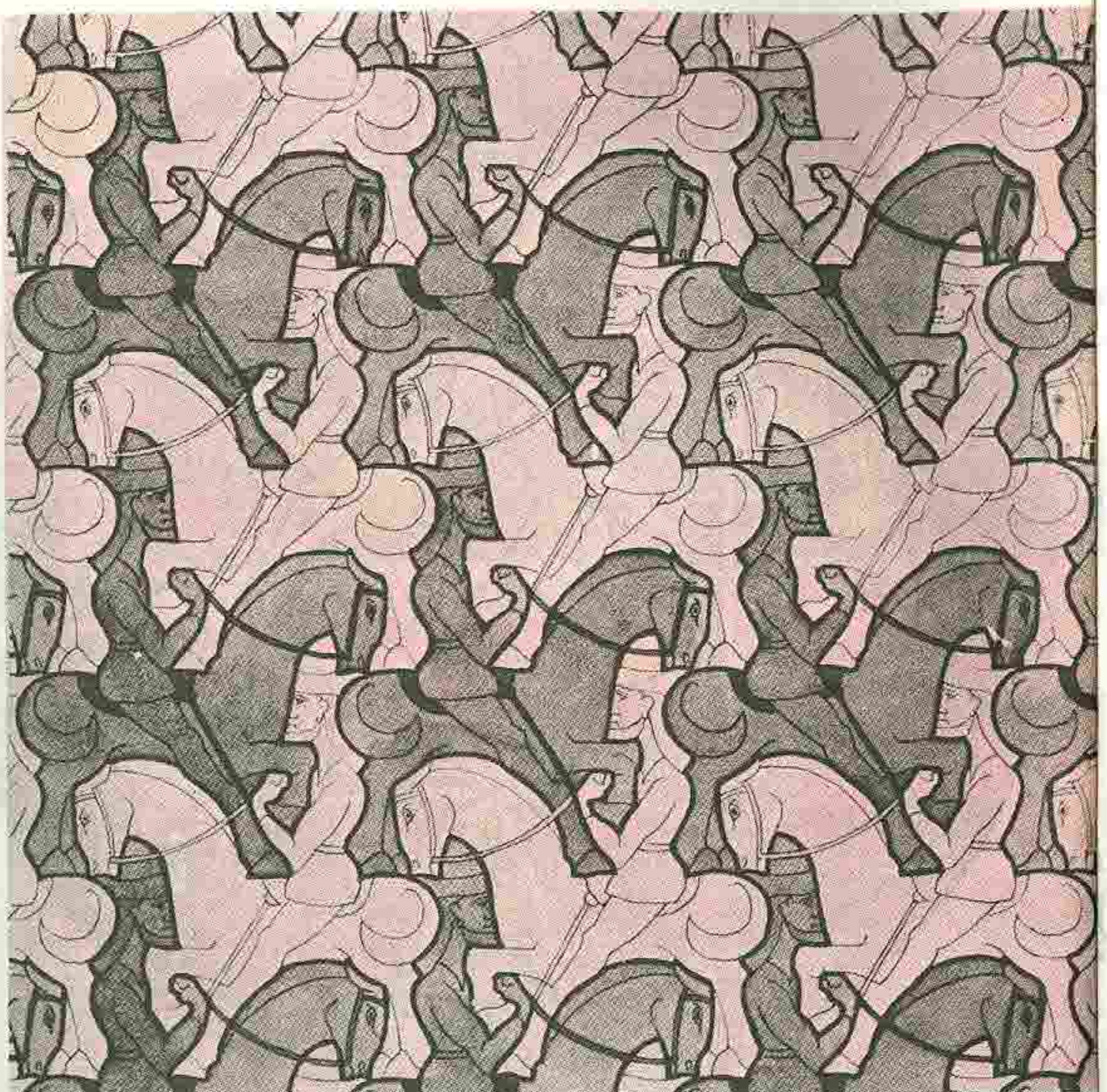
15. *Dada una recta y una circunferencia, trazar una tangente a la circunferencia que sea paralela a la recta.*



16. *Sin utilizar la escuadra, trazar una paralela a una recta, que pase por un punto dado.*







QUINTA UNIDAD

SEMEJANZA

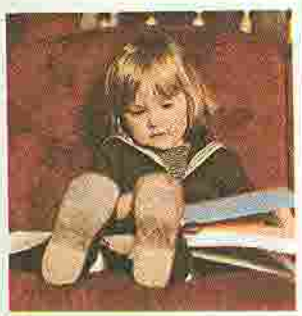
El concepto de *semejanza* en geometría es el análogo del de *proporción* en álgebra. De hecho podemos decir que son un mismo concepto. Y así como la proporcionalidad desempeña un importantísimo papel en el álgebra (es la esencia del *álgebra lineal*) la semejanza es fundamental en la geometría euclidiana y, más aún, en sus aplicaciones.

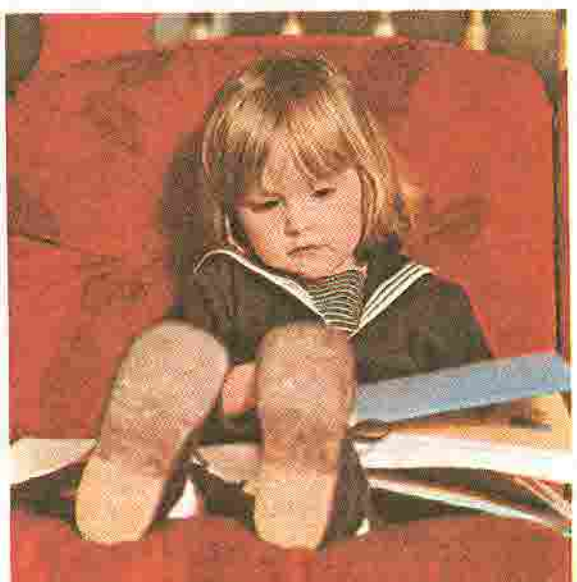
En esta unidad:

1. *Se construirán figuras semejantes utilizando el concepto de escala;*
2. *Se analizarán las propiedades de figuras semejantes mediante la comparación de sus elementos correspondientes;*
3. *Se demostrarán algunos teoremas acerca de la semejanza;*
4. *Se aplicará el concepto de semejanza en la resolución de ejercicios, problemas y trabajos prácticos;*
5. *Se tratará el concepto de homotecia.*

En los dos cursos anteriores de matemáticas y en la cuarta unidad de éste se ha hablado de la *congruencia* de figuras. Se ha dicho que por "figuras congruentes" se entiende "figuras que tienen la misma forma y el mismo tamaño" y después se ha precisado su significado.

Ahora bien, podemos también hablar de figuras "que tienen la misma forma" aunque no necesariamente el mismo tamaño. Por





En todos esos casos se dirá que las figuras son **semejantes**.

ejemplo, dos mapas a distinta escala de un mismo lugar son figuras que tienen la misma forma (aunque distinto tamaño):

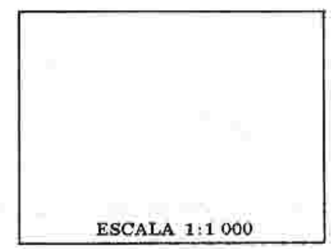
En esta unidad precisaremos este concepto intuitivo de **semejanza**. Empezaremos con dibujos a escala.

I. DIBUJOS A ESCALA

Tanto en la práctica como en el dibujo industrial, en el dibujo arquitectónico y en el dibujo de mapas se presenta con frecuencia la necesidad de dar información sobre figuras que son muy grandes o muy pequeñas para ser dibujadas en su tamaño natural. En tales casos, para poder dar información suficiente sobre alguna figura, se recurre a los dibujos a escala.

Como ejemplo, consideremos la siguiente situación. Se quiere usar un dibujo para dar una idea clara acerca de la forma y el tamaño de un terreno rectangular cuyos lados miden 30 y 40 m.

Aquí se puede recurrir al concepto de semejanza de figuras geométricas para dar idea de la forma de ese rectángulo. Convengamos, por ejemplo, que en nuestro dibujo, cada centímetro represente 10 metros en el terreno. Entonces el dibujo es así:



La notación ESCALA 1:1 000 indica que 1 *unidad de medida en el dibujo representa* 1 000 *unidades en el terreno*. Así por ejemplo, 1 cm representa 1 000 cm, es decir, 10 m.

En vez de escribir *escala* 1:1 000 puede escribirse también *escala* $\frac{1}{1\,000}$.

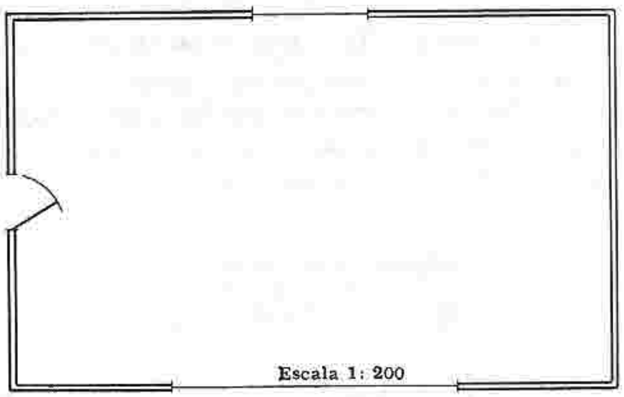
La escala es la *razón de proporcionalidad* o como se dice también la *razón de semejanza* entre las figuras.

Un dibujo a escala no solamente nos da la idea de la forma de la figura original sino que nos permite calcular más datos acerca de ella:

Ejemplo. ¿Cuánto miden las diagonales del terreno representado en la figura anterior?

Una simple medición con regla graduada (hágalo) indica que cada diagonal del rectángulo anterior mide 5 cm. Como la escala (o razón de semejanza o de proporcionalidad) es 1:1 000, 5 cm en la figura indican 5 000 cm en el terreno, es decir, 50 m. Por lo tanto, las diagonales del terreno miden 50 m.

Ejercicio 1. El siguiente plano a escala de la planta de un laboratorio le permitirá contestar las siguientes preguntas.



a) 1 cm en el dibujo representan ____ cm en el laboratorio.

b) 1 cm en el dibujo representan ____ m en el laboratorio.

c) La longitud de $\overline{AB}$ en el dibujo es de ____ cm.

d) Utilizando este dato y la escala, sabemos que el largo de la planta del laboratorio es de ______ m.

e) El segmento $\overline{AC}$ mide ____ cm.

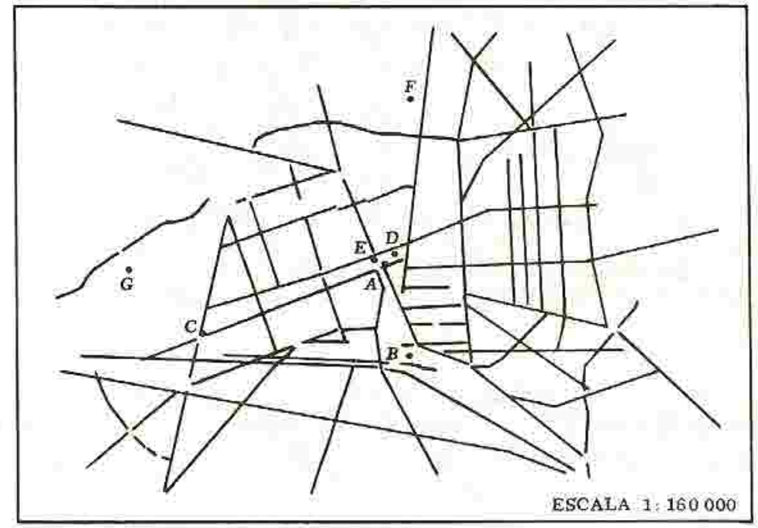
f) El ancho de la planta del laboratorio es de ____ m.

g) La puerta mide ____ cm en el plano y por lo tanto la puerta del laboratorio mide ____ m.

h) La ventana mayor del laboratorio mide ____ m.

i) La ventana menor del laboratorio mide ____ m.

Ejercicio 2. El siguiente dibujo es el plano de una parte de la ciudad de Guadalajara. En él se han señalado algunos puntos que corresponden a lugares de interés de esa ciudad. *A* indica la Plaza de Armas, *B* el Parque de Agua Azul, *C* el Museo J. Clemente Orozco, *D* el Teatro Degollado, *E* la Catedral, *F* el Estadio Jalisco y *G* la Universidad.



Midiendo sobre el plano anterior calcule las distancias (en línea recta) entre

a) El Museo J. Clemente Orozco y la Universidad.

b) La Plaza de Armas y el Parque de Agua Azul.

c) El Estadio Jalisco y el Teatro Degollado.

d) La Catedral y el Museo J. Clemente Orozco.

Ejercicio 3. Si la escala del plano de un terreno es de 1:10 000 ¿qué medidas representan en el terreno las siguientes longitudes en el plano?

a) 3 cm	b) 7 mm	c) 1.5 dm
d) 0.5 mm	e) 2.25 cm	f) 8.3 cm

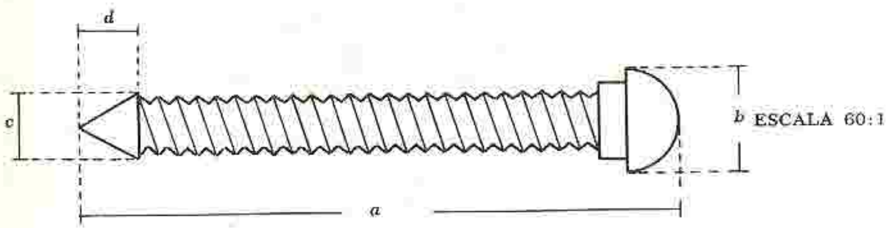
Ejercicio 4. Con la misma escala del ejercicio anterior ¿qué longitudes tendrán en el plano los segmentos que en el terreno tienen las siguientes medidas?

a) 500 m b) 1 km c) 850 m

d) 1.2 km e) 4 300 dm f) 7 hm

Actividad. En un mapa de la República Mexicana en el cual se indique la escala, mida las distancias entre varias ciudades y calcule la distancia real entre ellas (aproximada y en línea recta).

A veces, al describir objetos pequeños como por ejemplo un tornillo de un reloj utilizamos figuras más grandes que el objeto representado:



Aquí se indica que 60 unidades de medida del dibujo representan 1 unidad de medida en el objeto.

Ejercicio 5.

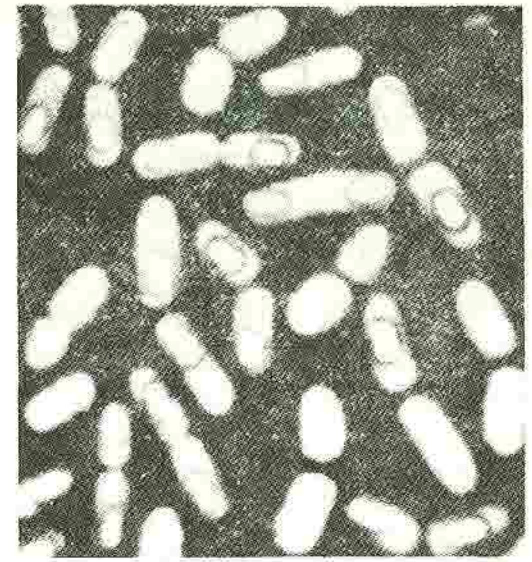
a) El largo del tornillo en el dibujo es ____ mm. Por lo tanto el tornillo mide ____ mm.

b) El ancho de la cabeza del tornillo en el dibujo es ____ mm. Por lo tanto el diámetro real de la cabeza del tornillo es ____ mm.

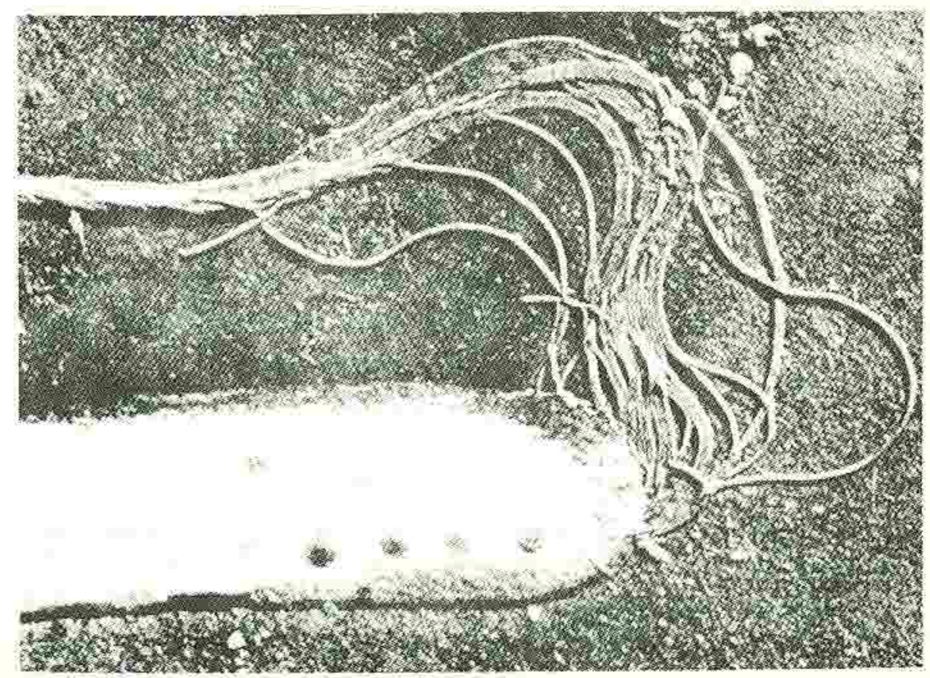
c) d = ____ mm en el dibujo. El diámetro de la punta del tornillo es ____ mm.

d) El largo de la punta del tornillo es ____ mm.

Ejercicio 6. En la siguiente fotografía tomada con un microscopio aparecen algunas bacterias con endosporas. Encuentre el grueso y el largo de algunas bacterias. Dé la respuesta en fracciones de mm y en micras.



Ejercicio 7. En la siguiente microfotografía aparece un penacho de flagelos al extremo de un bacilo. Encuentre el grueso aproximado de éste.

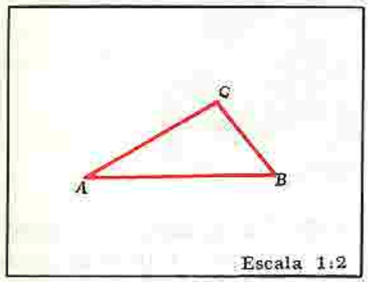


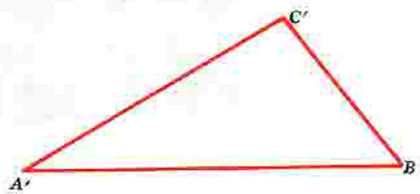
2. FIGURAS SEMEJANTES

En la sección anterior se habló de dibujos a escala como ejemplos de figuras "que tienen la misma forma"; a continuación precisaremos el significado de dicha expresión y diremos que las figuras son *semejantes*. Empezaremos con triángulos.

Triángulos semejantes

La figura de la izquierda es un dibujo a escala de la figura de la derecha.





Tenemos que

$$AB = \frac{1}{2} A'B' \qquad BC = \frac{1}{2} B'C' \qquad CA = \frac{1}{2} C'A'$$

o bien, escrito de otra manera,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2} \qquad \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2} \qquad \frac{CA}{C'A'} = \frac{1}{2}.$$

Este hecho lo expresaremos diciendo que *la razón entre los lados correspondientes de los dos triángulos es la misma* (igual a la escala 1:2).

Así, podemos escribir

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

y esto lo expresaremos diciendo que *los lados correspondientes son proporcionales*.

Así pues, en este ejemplo hemos observado que en dos triángulos a escala los lados correspondientes son proporcionales. Pero también

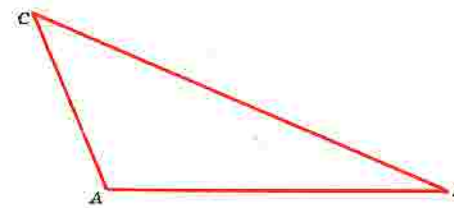
podemos observar en los mismos triángulos que *los ángulos correspondientes son congruentes*. Más precisamente $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong C'$.

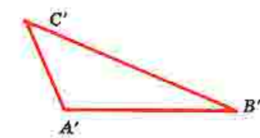
Esto sugiere la siguiente definición de semejanza de triángulos:

DEFINICION. *Dos triángulos son semejantes si los tres ángulos del primero son respectivamente congruentes con los tres ángulos del segundo y, además, los lados correspondientes son proporcionales.*

Diremos que la razón entre los lados correspondientes es la *razón de semejanza* (igual a la escala).

Ejemplo. Los triángulos





son semejantes porque

$$\angle A \cong \angle A' \qquad \angle B \cong \angle B' \qquad \angle C \cong \angle C'$$

y porque, además, como

$$\frac{AB}{A'B'} = 2 \qquad \frac{BC}{B'C'} = 2 \qquad \frac{CA}{C'A'} = 2,$$

se tiene que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

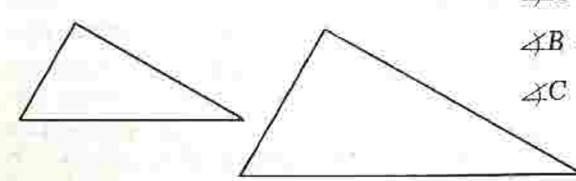
La razón de semejanza (o escala) es 2 (o bien 2:1).

Ejercicio 8. Midiendo los ángulos y los lados de los siguientes triángulos diga si son o no semejantes.

$\measuredangle A =$ $\qquad$ $\measuredangle A' =$

$\measuredangle B =$ $\qquad$ $\measuredangle B' =$

$\measuredangle C =$ $\qquad$ $\measuredangle C' =$

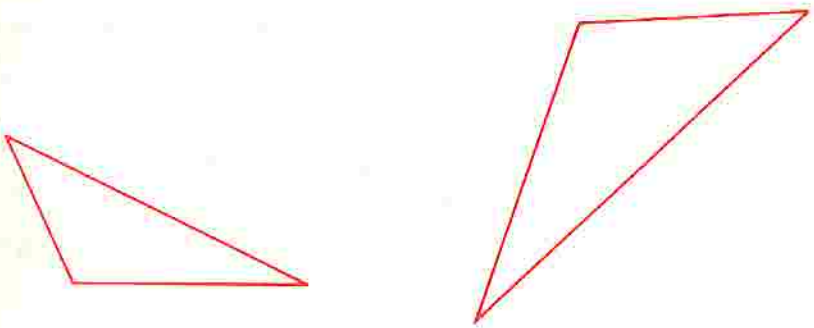


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\square}{\square} = \square \qquad \frac{BC}{B'C'} = \frac{\square}{\square} = \square$$

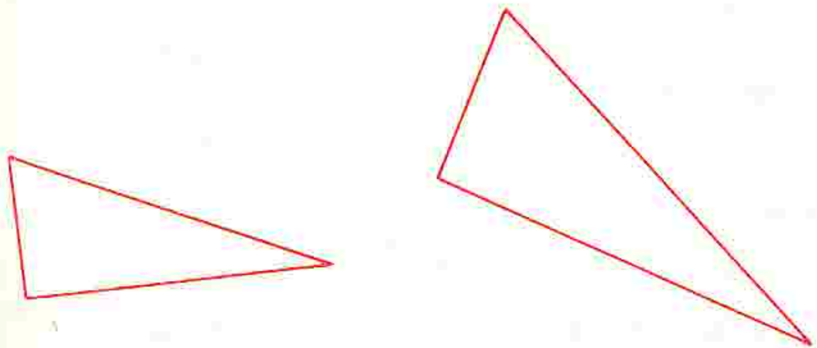
$$\frac{CA}{C'A'} = \frac{\square}{\square} = \square$$

Ejercicio 9. Proceda como en el ejercicio anterior en cada uno de los incisos. (Aquí conviene que indique con letras adecuadas los vértices de los triángulos.)

a)



b)

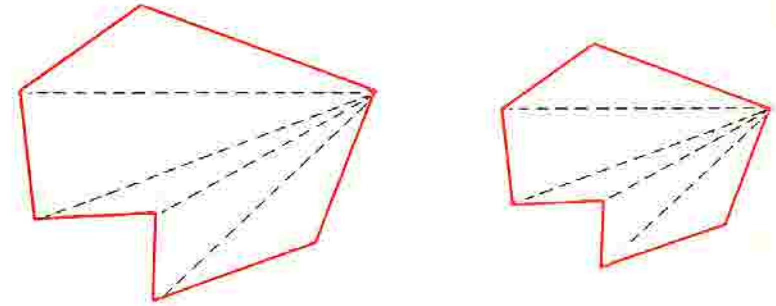


Figuras semejantes

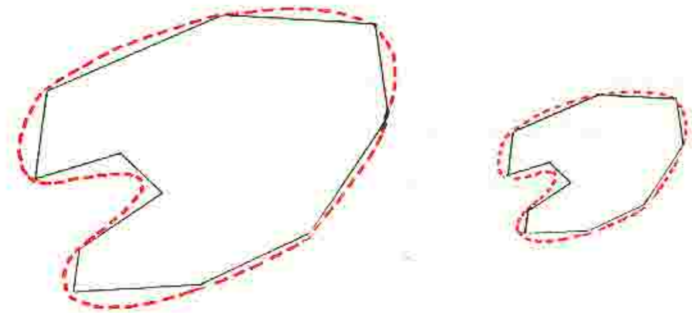
En muchas situaciones el estudio de figuras en general se puede reducir al estudio de triángulos. Aquí veremos cómo la triangulación de polígonos permite extender a éstos el concepto de semejanza.

Se dirá que dos polígonos son semejantes cuando se pueden hacer triangulaciones adecuadas de tal manera que todos los triángulos respectivos sean semejantes (y con la misma razón de semejanza).

Por ejemplo, los siguientes polígonos son semejantes pues se pueden triangular de tal manera que los triángulos correspondientes son semejantes:



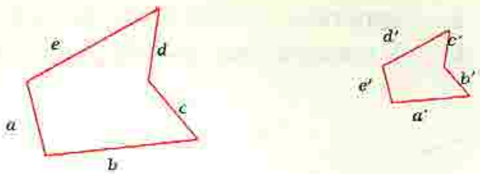
En el caso de figuras más complicadas la semejanza se puede estudiar aproximándolas con polígonos.



Perímetros de polígonos semejantes *

En este párrafo analizaremos la relación que hay entre los perímetros de polígonos semejantes. Usted ya tiene una idea intuitiva sobre esto. Por ejemplo, si le dicen que las dos figuras ilustradas más adelante representan polígonos semejantes cuya razón de semejanza es 2 y sabe que el perímetro de la figura de la izquierda es 14 cm, ¿podría decir cuál es el perímetro de la figura de la derecha sin efectuar ninguna medición directa?

* La relación entre las áreas de polígonos semejantes no se incluye aquí a pesar de su gran interés. Puede consultarse en Matemáticas, Tercer Curso, Secundaria Abierta, mismos autores.



$$P = 14 \text{ cm}$$

$$P = a + b + c + d + e \qquad P' = a' + b' + c' + d' + e'$$

$$P' = \square \text{ cm}$$

Como las figuras son semejantes y la razón es 2, sabemos que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = 2,$$

por lo que

$$a = 2a', \quad b = 2b', \quad c = 2c', \quad d = 2d', \quad e = 2e'.$$

Entonces

$$P = a + b + c + d + e = 2a' + 2b' + 2c' + 2d' + 2e'$$

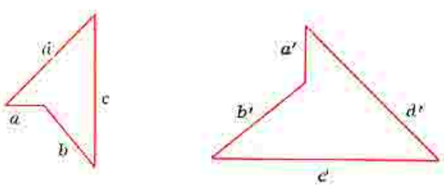
$$= 2(a' + b' + c' + d' + e') = 2P'.$$

Es decir, $P = 2P'$. Expresando esto de otra manera, obtenemos

$$\frac{P}{P'} = 2.$$

Es decir, en este ejemplo *la razón de los perímetros de estos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.* Veamos que lo mismo ocurre con los polígonos del siguiente ejercicio.

Ejercicio 10. Los siguientes polígonos son semejantes.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{2}{3}$$

$$a = \square\, a', \quad b = \square\, b' \quad c = \square\, c' \quad d = \square\, d'$$

$$P = a + b + c + d = \square\, a' + \square\, b' + \square\, c' + \square\, d'$$

$$= \square\,(a' + b' + c' + d') = \square\, P$$

$$P = \square\, P'.$$

Por lo tanto,

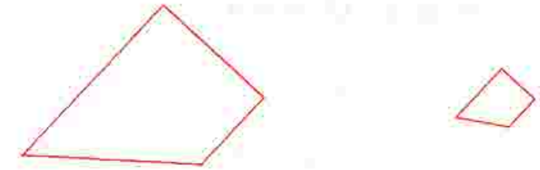
$$\frac{P}{P'} = \square$$

Siguiendo exactamente el mismo procedimiento que en el ejemplo y en el ejercicio anteriores se demuestra que:

> *En dos polígonos semejantes, la razón de sus perímetros es igual a la razón de semejanza.*

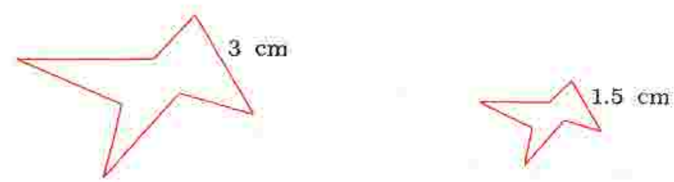
Ejercicio 11. Utilizando el resultado anterior y los datos que se dan en cada inciso complete las expresiones sin efectuar ninguna medición directa.

a) Las dos figuras ilustradas son semejantes con razón de semejanza 3:1



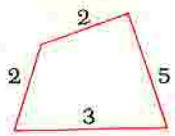
$P = 8.4$ cm $\qquad P' = \square$ cm

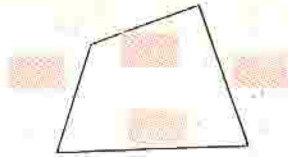
b) Las siguientes figuras son semejantes.



$P = 10.8$ cm $\qquad P' = \square$ cm

c) Las siguientes figuras son semejantes





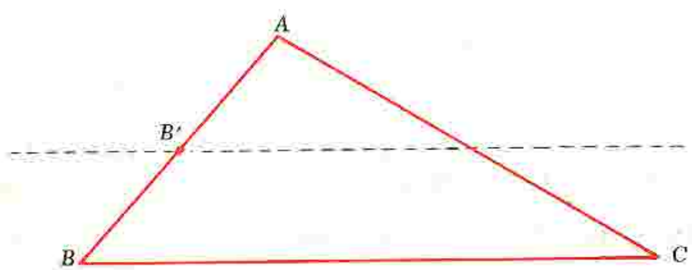
$P =$ ____ cm $\qquad P' = 17$ cm

3. EL TEOREMA DE TALES

En esta sección estudiaremos el teorema de Tales. Este resultado desempeña un papel central en los temas relativos a semejanza. Se llama así en memoria de Tales de Mileto quien fue uno de los grandes geómetras de la antigua Grecia. Vivió en la primera mitad del siglo VI antes de nuestra era y su fama se debe no tanto a sus descubrimientos de carácter experimental sino por haber sido uno de los primeros en utilizar métodos deductivos en geometría.

Trataremos este resultado a base de ejercicios y ejemplos que conduzcan a la comprensión y a una demostración del teorema principal.

Ejercicio 12. En el siguiente triángulo se ha marcado el punto medio B' de $\overline{AB}$; es decir, $AB' = B'B$.



a) Trace una recta paralela a $\overline{BC}$ que pase por B': Llame C' al punto de intersección de esta recta con $\overline{AC}$.

b) ¿Es C' el punto medio de AC? Es decir, ¿es $AC' = C'C$?

c) Trace ahora una recta paralela a AC que pase por B'.

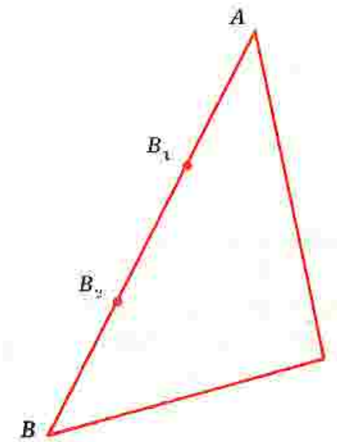
d) Llame M al punto en que la recta que trazó interseca a BC ¿Es $BM = MC$?

Ejercicio 13. Trace dos triángulos cualesquiera y repita en cada uno de ellos los pasos del ejercicio anterior.

En los triángulos de los ejercicios anteriores usted habrá observado que *si un punto divide a un lado del triángulo en dos segmentos congruentes y trazamos por dicho punto paralelas a los otros lados, cada uno de éstos queda dividido en dos segmentos también congruentes entre sí.*

A continuación observaremos en dibujos que lo mismo ocurre cuando dividimos un lado en 3, 4, o en cualquier número de segmentos congruentes.

Ejercicio 14. El lado $\overline{AB}$ del siguiente triángulo se ha dividido en 3 segmentos congruentes. Es decir, $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$.



a) Trace dos segmentos paralelos a $\overline{BC}$ que tengan un extremo en B_1 y en B_2 y el otro en $\overline{AC}$.

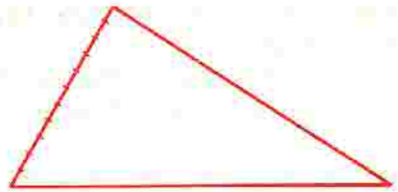
b) Trace dos segmentos paralelos a $\overline{AC}$ que tengan un extremo en B_1 y en B_2 y el otro en $\overline{BC}$.

c) ¿Cómo queda dividido el lado $\overline{AC}$?

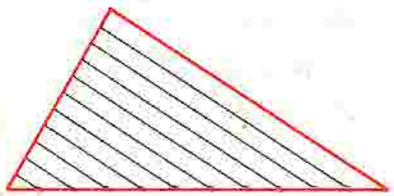
d) ¿Y el lado $\overline{BC}$?

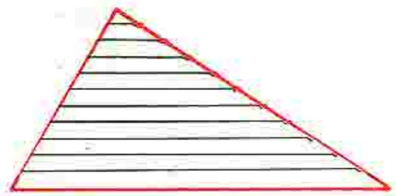
Ejercicio 15. Dibuje un triángulo arbitrario. Divida uno de los lados en 4 segmentos congruentes y siga en él los pasos del ejercicio anterior.

Ejemplo. El lado $\overline{AB}$ del siguiente triángulo se ha dividido en 11 segmentos congruentes entre sí:



Al trazar paralelas a otro lado se observa que éstas dividen al tercer lado en 11 segmentos también congruentes entre sí:





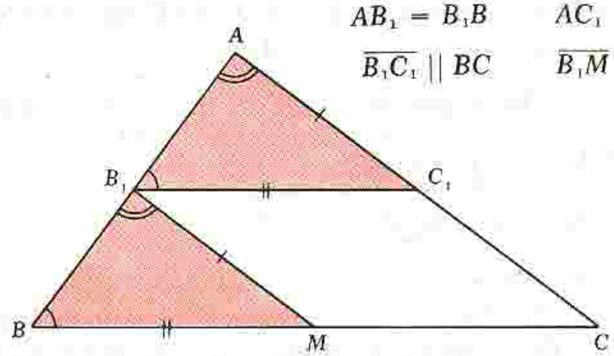
El lema básico

Posiblemente usted recuerde que al principio de esta sección, cuando se mencionó a Tales de Mileto se comentó que su fama se debe principalmente a que fue uno de los primeros en utilizar métodos deductivos en geometría. Pues bien, aquí hemos observado una propiedad. Tratemos ahora de utilizar métodos deductivos para demostrarla. Nos apoyaremos en algunos resultados relativos a la congruencia que estudiamos en la Cuarta Unidad.

Ejemplo. En el siguiente triángulo

$AB_1 = B_1B \qquad AC_1 = C_1C$

$\overline{B_1C_1} \parallel BC \qquad \overline{B_1M} \parallel \overline{AC}$



Queremos demostrar que $AC_1 = C_1C \qquad BM = MC$

Como $B_1C_1 \parallel BC$, los ángulos marcados con un arquito son congruentes.

Análogamente, como $B_1M \parallel AC$, los ángulos marcados con dos arquitos son congruentes.

Por lo tanto los triángulos coloreados son congruentes pues tienen un lado congruente ($\overline{AB_1} \cong \overline{B_1B}$) y los ángulos adyacentes también.

Por consiguiente según el criterio ALA de congruencia de triángulos sabemos que son congruentes. Por lo tanto,

$$AC_1 = B_1M \quad \text{y} \quad B_1C_1 = BM.$$

Pero MCC_1B_1 es un paralelogramo y por lo tanto

$$B_1M = C_1C \quad \text{y} \quad MC = B_1C_1.$$

De las cuatro igualdades anteriores obtenemos

$$AC_1 = C_1C \quad \text{y} \quad MC = BM$$

que es lo que se quería demostrar.

Este mismo razonamiento se puede aplicar cuando el lado se divide en cualquier número de segmentos congruentes. Se obtiene el siguiente resultado:

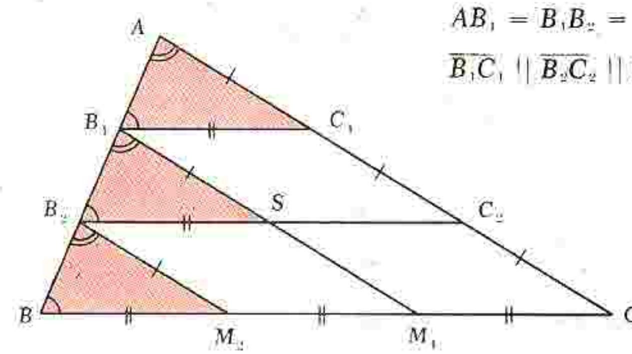
> LEMA BASICO. *Si en un triángulo dividimos el lado AB en n segmentos congruentes y por los extremos de estos trazamos rectas paralelas a $\overline{AC}$ entonces el lado $\overline{AC}$ queda dividido en n segmentos congruentes entre sí.*

En el siguiente ejercicio ilustramos la demostración para el caso $n = 3$.

Ejercicio 16. En el siguiente triángulo sabemos que

$AB_1 = B_1B_2 = B_2B$

$\overline{B_1C_1} \parallel \overline{B_2C_2} \parallel \overline{BC}$



Demostraremos que $AC_1 = C_1C_2 = C_2C$.

Para ello trazamos $\overline{B_1M_1} \parallel \overline{B_2M_2} \parallel \overline{AC}$ y consideramos los triángulos coloreados.

a) Los ángulos marcados con un arquito son congruentes. ¿Por qué?
b) Los ángulos marcados con dos arquitos son congruentes. ¿Por qué?
c) ¿Por qué resultan entonces congruentes los triángulos coloreados?
d) Por c) resulta que $AC_1 = B_1S = B_2M_2$. Y como $B_1S = C_1C_2$ y $B_2M_2 = C_2C$, tenemos que

$$AC_1 = C_1C_2 = C_2C;$$

es decir, $\overline{AC}$ *ha quedado dividido en 3 segmentos congruentes.* Pero ¿por qué $B_1S = C_1C_2$ y $B_2M_2 = C_2C$?

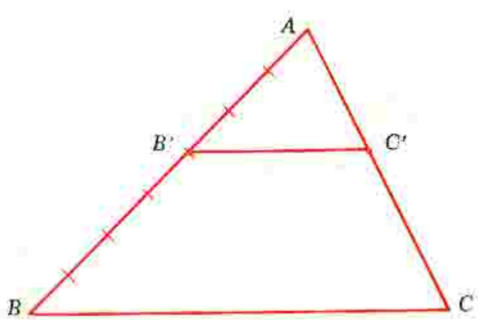
El teorema de Tales

El lema básico que acabamos de demostrar sirve, a su vez, para demostrar el teorema de Tales. Empecemos con un ejemplo.

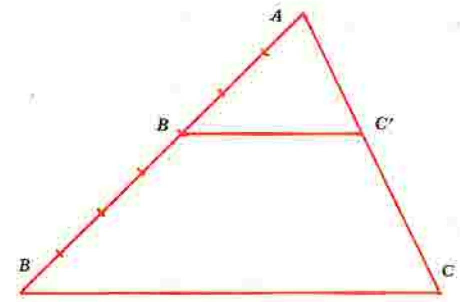
Ejemplo. Como se ilustra en la figura, consideremos un segmento $\overline{B'C'}$ tal que

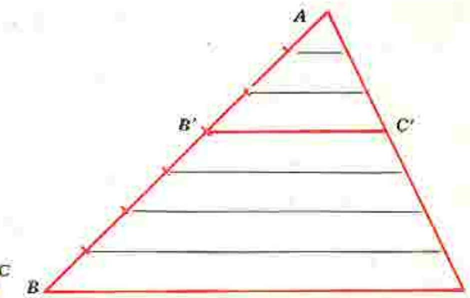
$$\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}.$$

Supongamos que la razón $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{3}{7}$.



Esto significa que podemos subdividir $\overline{AB}$ en siete segmentos congruentes entre sí y $\overline{AB'}$ abarca tres de ellos:

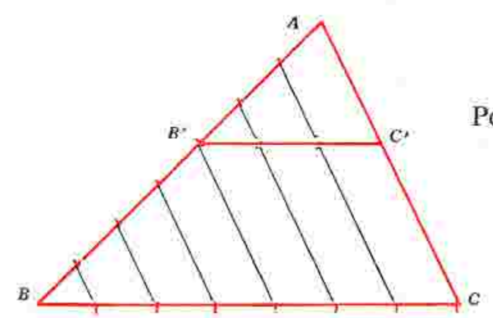




Si ahora trazamos rectas paralelas a $\overline{BC}$ como se indica en la figura de la derecha el lema básico nos permite afirmar que $\overline{AC}$ quedó partido en siete segmentos congruentes entre sí. Como $\overline{AC'}$ abarca 3 de ellos, resulta que

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{3}{7}.$$

Si ahora trazamos paralelas a $\overline{AC}$ como se indica a continuación vemos que $\overline{B'C'}$ ha quedado subdividido en 3 segmentos congruentes entre sí y también $\overline{BC}$ en 7 segmentos congruentes entre sí y congruentes con los de $\overline{B'C'}$ (observe los paralelogramos).



Por lo tanto resulta que también

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{3}{7}$$

Así pues, en este caso hemos demostrado que *si*

$$\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$$

entonces

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

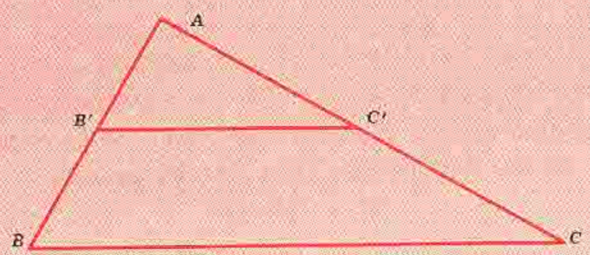
Además, como $\angle A \cong \angle A$, $\angle B' \cong \angle B$ *y* $\angle C' \cong \angle C$, *los triángulos* $AB'C'$ *y* ABC *son semejantes.*

Este mismo método de demostración sirve en todos los casos en que $\frac{AB'}{AB} = \frac{m}{n}$ con m y n naturales. Cuando $\frac{AB'}{AB}$ no es un número racional, por ejemplo si $\frac{AB'}{AB} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, con métodos de aproximación (que se salen del nivel de este curso) se demuestra que vale también el resultado. Nosotros lo aceptaremos y lo enunciamos así:

TEOREMA DE TALES. *Si* $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ *entonces*

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

y los triángulos $AB'C'$ *y* ABC *son semejantes*



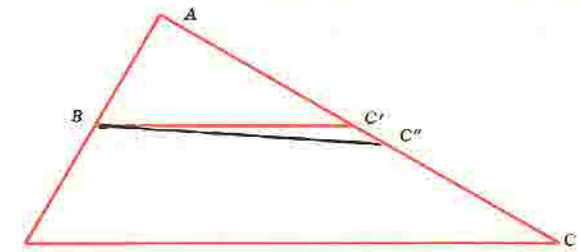
Es de mucha utilidad también el resultado siguiente:

COROLARIO. *Si*

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

entonces $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ *y los triángulos* $AB'C'$ *y* ABC *son semejantes.*

Demostración. Tracemos $B'C'' \parallel BC$:



Entonces, por el teorema de Tales

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC''}{AC}$$

Por lo tanto, de aquí y de la hipótesis obtenemos que

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{AC''}{AC}$$

y por consiguiente

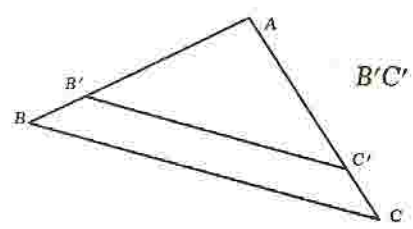
$$AC' = AC''$$

de donde

$$C' = C''$$

Luego, $B'C' = B'C''$ y $B'C' \parallel BC$. El resto se sigue del teorema de Tales.

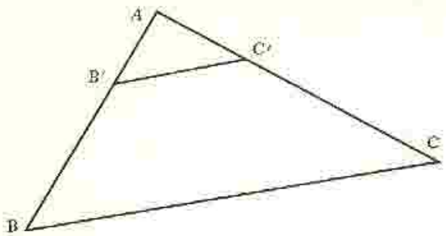
Ejercicio 17.



$B'C' \parallel BC$

$AB = 16$	$BB' =$
$BC = 24$	$AC' = 12$
$B'C' = 18$	$AC =$
$AB' =$	$C'C =$

Ejercicio 18. Si en un triángulo



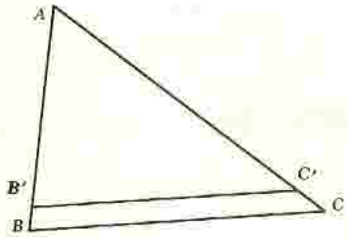
$AB' = 7.5 \qquad AC' = 9$

$AB = 22.5 \qquad AC = 28$

¿es $\overline{B'C'}$ paralelo a $\overline{BC}$? ¿Por qué?

Ejercicio 19. Si $AB' = 9$, $AB = 21$, $AC' = 12$, $AC = 28$, ¿es $\overline{B'C'}$ $\overline{BC}$? ¿Por qué?

Ejercicio 20. $AB = 200$, $AB' = 180$ $B'C' = 140$ $C'C = 30$.

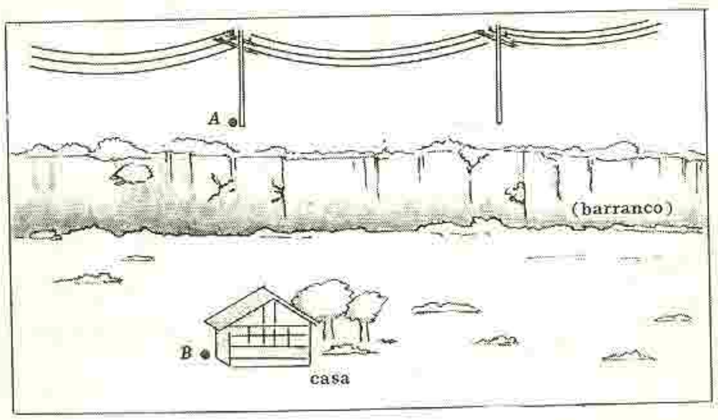


Encuentre BC, AC y AC'. (Llame, por ejemplo, $AC = x$; entonces $AC' = x - 30$. Plantee una ecuación y resuélvala.)

Medida de distancias a puntos inaccesibles

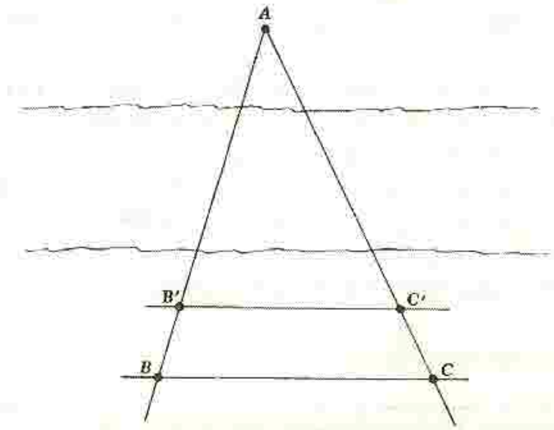
Los resultados anteriores tienen interesantes aplicaciones prácticas.

Problema. Encontrar la distancia entre un lugar A que se encuentra en el otro lado de un barranco muy difícil de atravesar y un punto B en este lado.



Se puede proceder así:

1. Marcamos un punto B' que esté alineado con A y B.
2. Trazamos dos rectas paralelas que pasen por B y B'.
3. Marcamos puntos C y C' en dichas paralelas de tal manera que A, C y C' estén alineados.



4. Medimos BC, $B'C'$ y BB'. Digamos $BC = a$, $B'C' = b$, $BB' = c$.
5. Aplicando el teorema de Tales podemos afirmar que

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

6. Si llamamos $x = AB$, tenemos que $AB' = x - c$, de donde, según 4 y 5 podemos escribir:

$$\frac{x - c}{x} = \frac{b}{a}$$

7. Resolvemos la ecuación:

$$ax - ac = bx \qquad ax - bx = ac \qquad (a - b)x = ac$$

$$\boxed{x = \frac{ac}{a - b}} \qquad (a - b \neq 0)$$

Ejercicio 21. Encuentre AB en el problema anterior, si $B'C' = 82$ m, $BC = 104$ m y $B'C' = 30$ m.

Trabajos prácticos. Utilice el método anterior para calcular la distancia a algún punto inaccesible.

4 CRITERIOS DE SEMEJANZA

Hemos definido triángulos semejantes como aquellos que tienen ángulos correspondientes congruentes y lados correspondientes proporcionales.

Ahora bien, para *comprobar* que dos triángulos son semejantes no es necesario comprobar *todas* esas condiciones. Aquí ocurre algo parecido a la congruencia de triángulos.

Por ejemplo, en la congruencia basta que los tres lados de un triángulo sean congruentes con los tres lados del otro para que los triángulos sean congruentes.

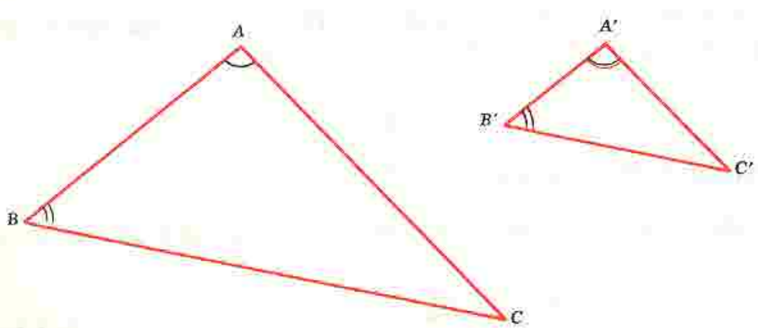
En semejanza analizaremos tres criterios.

Primer criterio de semejanza

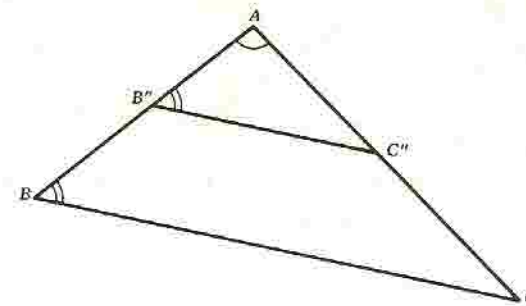
Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Demostración. Supongamos que

$$\angle A \cong \angle A' \quad , \quad \angle B \cong \angle B'.$$



Marcamos B'' y C'' en los lados del $\triangle ABC$ de tal manera que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB''}$ y $\overline{A'C'} \cong \overline{AC''}$. Entonces, como $\angle A \cong \angle A'$ el axioma LAL de congruencia de triángulos nos permite afirmar que el $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$.



Entonces $\angle B'' \cong \angle B'$ y como $\angle B \cong \angle B'$ resulta que $\angle B'' \cong \angle B$. Por lo tanto, $B''C'' \parallel BC$. Luego, según el teorema de Tales, sabemos que

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{B''C''}{BC}$$

por lo que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

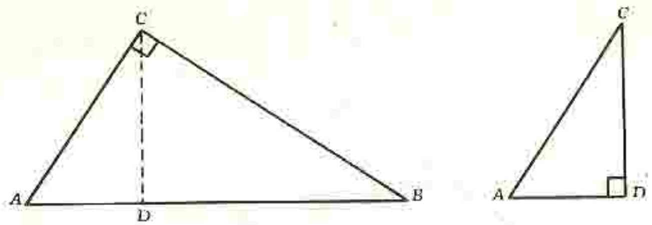
es decir, los lados correspondientes de los triángulos son proporcionales. Además, sabemos que $\angle A \cong \angle A'$ y que $\angle B \cong \angle B'$. Desde luego, esto implica que $\angle C \cong \angle C'$.

Por consiguiente los triángulos son semejantes.

Observe que decir que dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo es lo mismo que decir que los tres ángulos del primero son congruentes a los tres ángulos del segundo. ¿Por qué?

Ejercicio 22. Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es congruente con un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces dichos triángulos son semejantes.

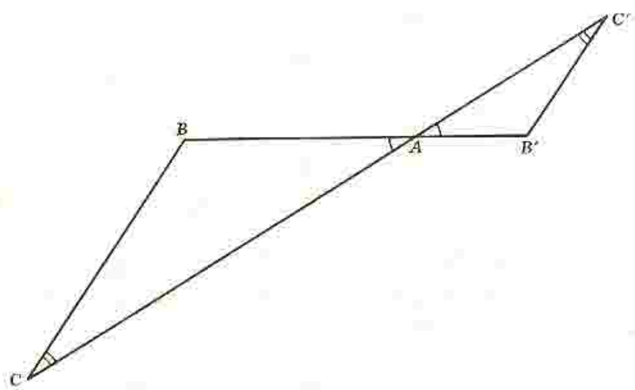
Ejercicio 23. En el triángulo rectángulo siguiente se ha trazado la altura. Por lo tanto, el triángulo ADC es rectángulo



¿Por qué el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle ACD$? Localice los lados correspondientes y complete las igualdades siguientes.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DC}{\quad} = \frac{CA}{\quad}$$

Ejercicio 24. En la siguiente figura $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$



a) Los ángulos marcados con un arquito son congruentes. ¿Por qué?

b) Los ángulos marcados con dos arquitos son congruentes. ¿Por qué?

c) ¿Por qué son congruentes los triángulos?

d) Escriba las proporciones entre los lados.

e) Si $AB = 1$, $AB' = 2$ y $B'C' = 1.5$, ¿cuánto mide BC?

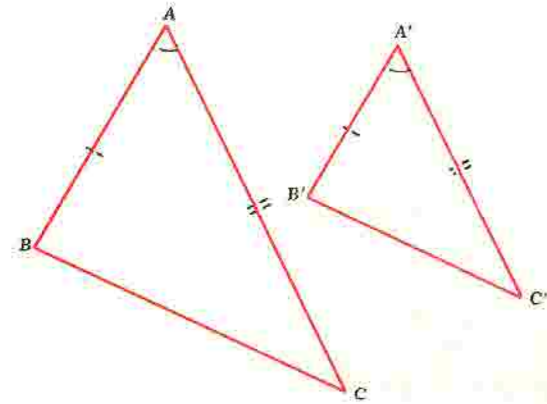
f) Si $AC = 5$ ¿cuánto mide AC'?

Segundo criterio de semejanza

Si en dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se tiene que

$$\angle A \cong \angle A' \text{ y } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

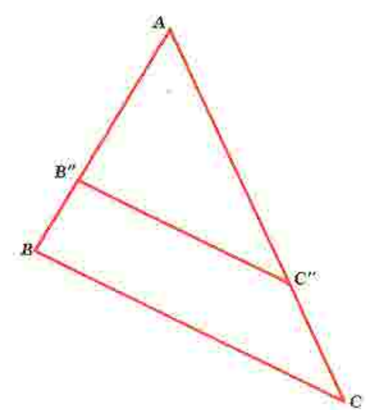
entonces los triángulos son semejantes.



$\angle A \cong \angle A'$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

En otras palabras, para asegurar que dos triángulos son semejantes basta saber que *dos* lados de un triángulo son proporcionales a dos lados del otro y que los ángulos entre ellos comprendidos son congruentes.



Demostración. Como en el primer caso de semejanza construimos en uno de los triángulos otro congruente con el segundo: $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$. Entonces, como $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ y $A'B' = AB''$ y $A'C' = AC''$ tenemos que

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''}$$

Entonces por el corolario del teorema de Tales se tiene que $B''C'' \parallel BC$ y por lo tanto

$$\angle B = \angle B'', \qquad \angle C = \angle C''$$

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{B''C''}{BC}.$$

Como $B''C'' = BC$, $\quad \angle B'' = \angle B'$ y $\angle C'' = \angle C'$,
tenemos entonces que

$$\angle A = \angle A', \qquad \angle B = \angle B', \qquad \angle C = \angle C'$$

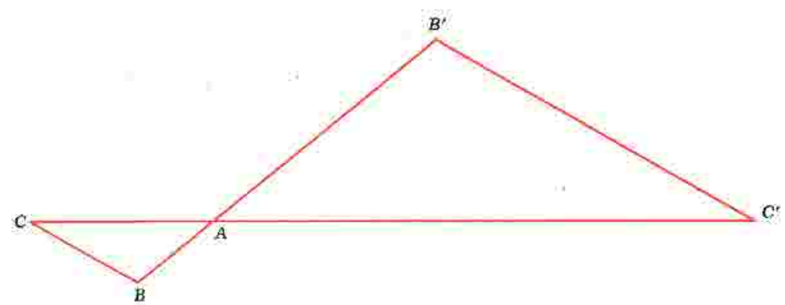
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

es decir, los triángulos son semejantes.

Ejercicio 25. En la siguiente figura se sabe que

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = 3$$

a) ¿Son semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$? ¿Por qué?



b) Si $BC = 2.4$, ¿cuánto mide $B'C'$?

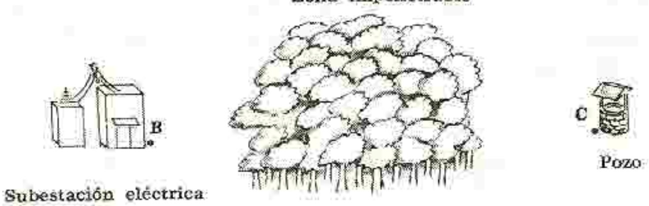
c) Si $AB = 1.9$, ¿cuánto mide AB'?

d) $\angle C \cong$ $\qquad$ $\angle B \cong$

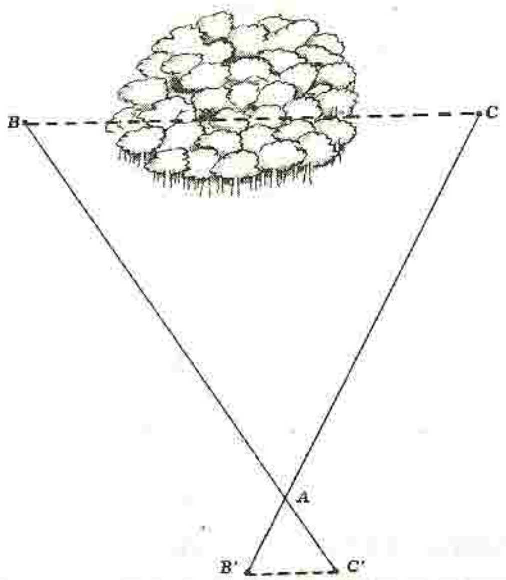
Mediciones indirectas

La semejanza de figuras y los teoremas y criterios que hemos estudiado tienen interesantes aplicaciones.

Próblema. Medir la distancia entre dos lugares entre los que se encuentre algún obstáculo que impida una medición directa.



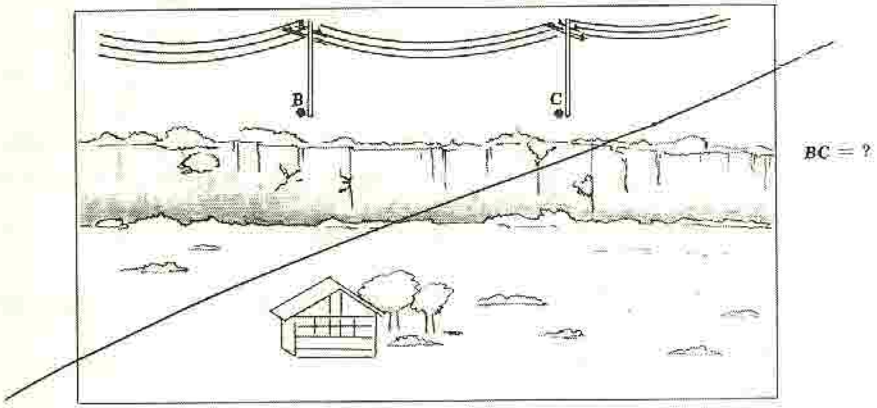
Alguien procedió de la siguiente manera. Marcó un punto A desde el que pudiera medir $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Prolongó los segmentos y marcó B' de tal manera que $AB' = \dfrac{1}{10} AB$; después marcó C' de tal manera que $AC' = \dfrac{1}{10} AC$. Midió $B'C'$ y aseguró que la distancia buscada es 10 veces $B'C'$. (Vea el dibujo)

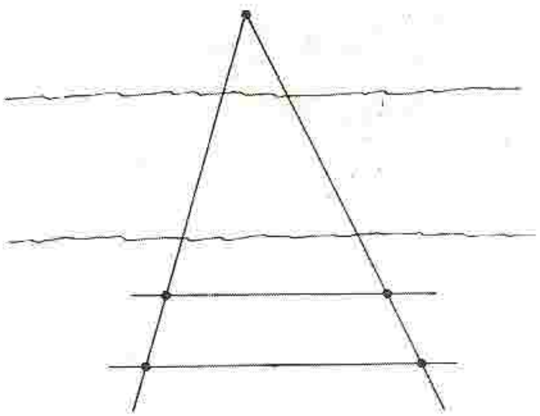


Ejercicio 26. Explique por qué es correcto el procedimiento.

Trabajo pràctico. Utilice este método para calcular algunas distancias que no se puedan medir directamente.

Problema. Supongamos que se necesite medir la distancia entre dos puntos que se encuentren del otro lado de un barranco muy difícil de cruzar. ¿Podría usted encontrar un procedimiento práctico para hacerlo sin cruzar el barranco? Recuerde que podemos calcular ya la distancia de cada uno de ellos a un punto de nuestro lado (final de la Sección 3 de esta unidad).





Trabajo práctico. Utilice el método del problema anterior para encontrar la distancia entre dos puntos que no pueda alcanzar.

Tercer criterio de semejanza

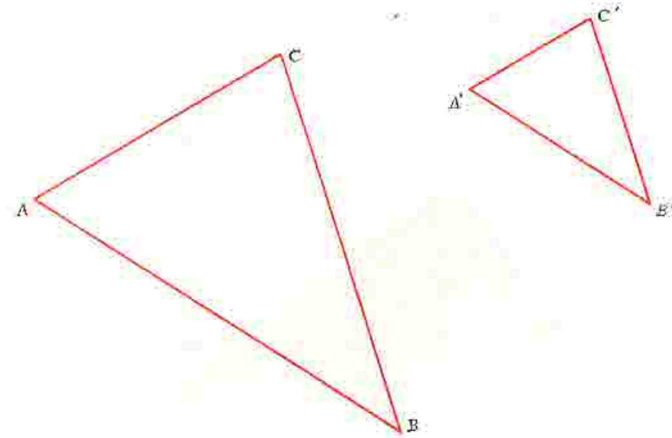
> *Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro, entonces los triángulos son semejantes.*

Es decir, si

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

entonces

$$\angle A \cong \angle A', \qquad \angle B \cong \angle B' \quad \text{y} \quad \angle C \cong \angle C'$$



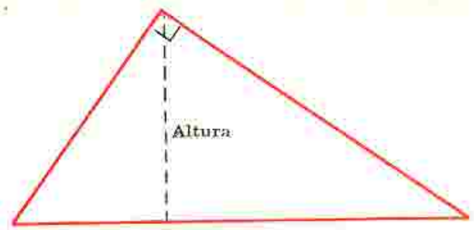
Por razones de tiempo omitiremos la demostración. (Se puede hacer como en los casos anteriores, utilizando el teorema de Tales y anteriores de congruencia de triángulos.)

5. UNA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE PITAGORAS

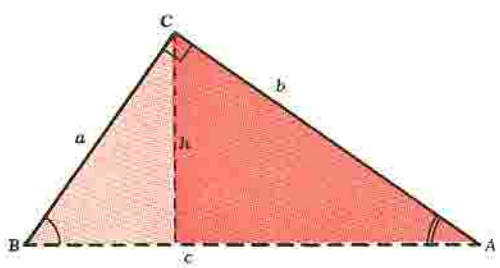
El teorema de Pitágoras es de gran importancia tanto en las mismas matemáticas como en sus aplicaciones. En la cuarta unidad de este curso enunciamos este teorema, lo ilustramos con algunas actividades de recorte de figuras y vimos varias aplicaciones. Sin embargo, no dimos ninguna demostración de él. Y es que entonces todavía no contábamos con suficientes conocimientos para hacerlo fácilmente.

Ahora, con lo que sabemos acerca de la semejanza ya lo podemos demostrar sin demasiada dificultad.*

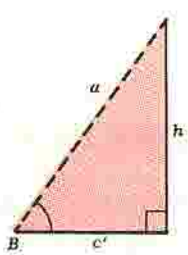
Consideremos un triángulo rectángulo cualquiera y tracemos la altura que pasa por el vértice del ángulo recto.



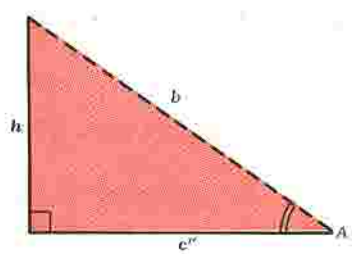
Obtenemos de esta manera dos triángulos (también rectángulos) que para mayor claridad dibujamos aparte:



(1)



(2)



(3)

* En esta sección solamente se da una demostración del teorema de Pitágoras. Si por razones de tiempo se omite, el resto del curso no queda afectado. Sin embargo, es una interesante aplicación de los criterios de semejanza.

Los triángulos (1) y (2) son semejantes porque tienen dos ángulos respectivos congruentes (el recto y el que tiene vértice en B). Por lo tanto, los lados correspondientes son proporcionales. Entonces,

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{c'}.$$

Análogamente, los triángulos (1) y (3) son semejantes porque tienen dos ángulos respectivos congruentes (el recto y el de vértice A). Por lo tanto, sus lados son proporcionales y tenemos que

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{c''}.$$

De estas dos expresiones obtenemos:

$$a^2 = cc'$$
$$b^2 = cc''$$

Al sumar, obtenemos

$$a^2 + b^2 = cc' + cc''$$
$$a^2 + b^2 = c(c' + c'')$$

y como $c' + c'' = c$, resulta que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

que es lo que se quería demostrar.

6. TRANSFORMACIONES DE SEMEJANZA (HOMOTECIAS)

En el segundo curso de matemáticas se estudiaron transformaciones del plano que tienen la propiedad de que cada figura se transforma en una congruente a ella (traslaciones, rotaciones y simetrías axiales). Ahora analizaremos unas transformaciones, llamadas de semejanza u homotecias, en las que cada figura se transforma en otra semejante a ella.*

* En lo que resta del curso no se utilizarán los resultados que se obtienen en esta sección. Sin embargo, es un buen complemento al tema de transformaciones que figura en el segundo curso; además, la técnica de coordenadas que aquí se usa será de gran utilidad al alumno.

Consideremos un sistema de coordenadas en el plano y definamos una transformación que consista en asociar a cada punto A del plano otro punto A' de acuerdo con la siguiente orden:

"Multiplique por 3 las coordenadas de A".

Así, por ejemplo, si $A = (3, 4)$, el transformado de A será el punto

$$A' = (3 \times 3, 3 \times 4) = \boxed{(9, 12).}$$

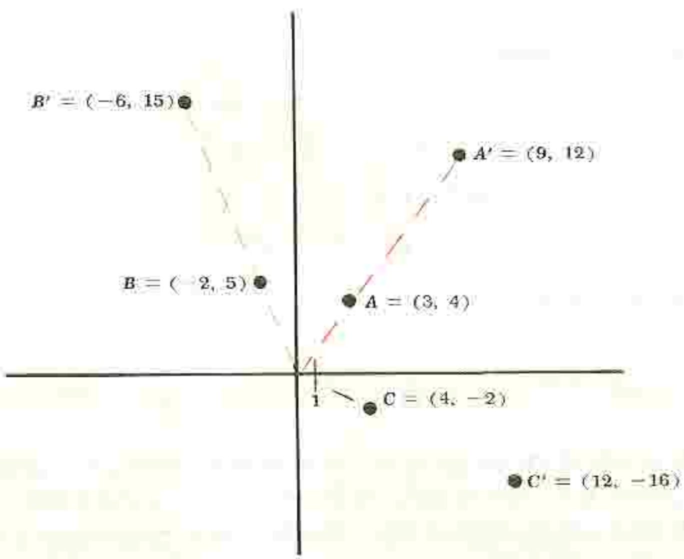
El transformado de $B = (-2, 5)$, será el punto

$$B' = (3(-2), 3 \times 5) = \boxed{(-6, 15).}$$

El transformado de $C = (4, -2)$, será el punto

$$C' = (3 \times 4, 3 \times (-2)) = \boxed{(12, -6).}$$

En el siguiente dibujo se ilustran los puntos A, B y C y sus transformados.



Como en las otras transformaciones que hemos estudiado, para indicar que un punto A se transforma en A' escribiremos $A \to A'$, o bien, $(3, 4) \to (9, 12)$. Así, por ejemplo,

$$(6, 2) \to (3 \times 6, 3 \times 2) = (18, 6)$$
$$(-5, 0) \to (3 \times (-5), 3 \times 0) = (-15, 0)$$

$$(4, -5) \to (3 \times 4, 3 \times (-5)) = (12, -15)$$
$$(0, 0) \to (3 \times 0, 3 \times 0) = (0, 0)$$

y, en general,

$$\boxed{(x, y) \to (3x, 3y)}$$

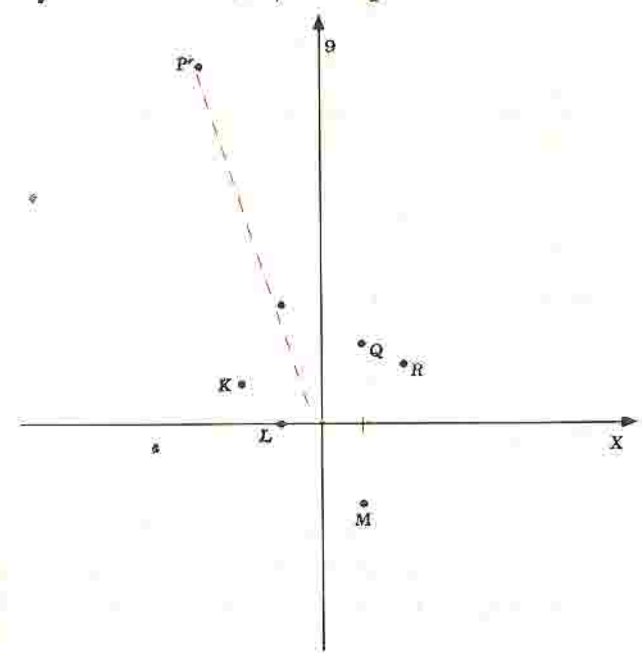
Ejercicio 27. En la anterior transformación del plano, es decir, en la transformación dada por la fórmula

$$\boxed{(x, y) \to (3x, 3y)}$$

a) Encuentre los transformados de los puntos siguientes:

$P = (-1, 3)$	$P \to P'$	$P' = (3 \times (-1), 3 \times 3) = (-3, 9)$
$Q = (1, 2)$	$Q \to Q'$	$Q' = (3 \times \_\_, 3 \times \_\_) = (\_\_, \_\_)$
$R = (2, 1.5)$	$R \to R'$	$R' =$
$K = (-2, 1)$	$K \to K'$	$K' =$
$L = (-1, 0)$	$L \to L'$	$L' =$
$M = (1, -2)$	$M \to M'$	$M' =$

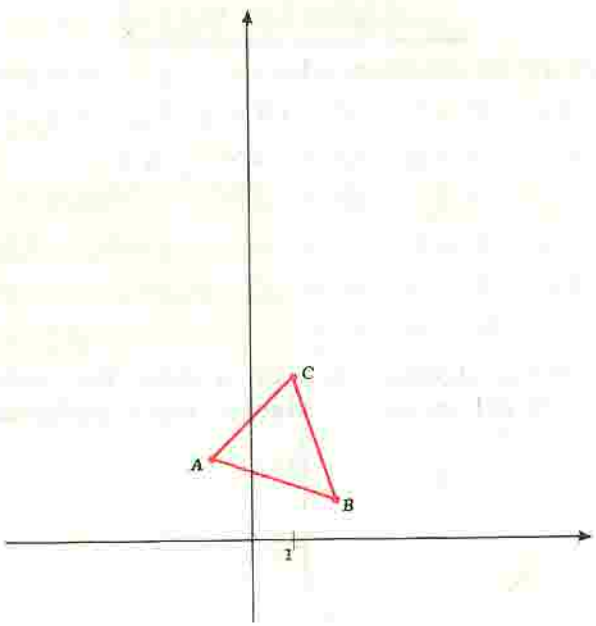
b) En el dibujo siguiente se han marcado los puntos P, Q, R, K, L y M del inciso a). Marque sus transformados P', Q',



R', K', L' y M'. Observe que los puntos P, Q y R son colineales. ¿Cómo son sus transformados P', Q' y R'? Observe lo mismo con los puntos K, L, M y sus transformados.

Se puede demostrar que en esta transformación la imagen de un segmento $\overline{AB}$ es el segmento que tiene por extremos los puntos A' y B' transformados de A y B respectivamente.

Ejercicio 28. En el siguiente dibujo se ilustra el triángulo ABC.



$A = (-1, 2)$ $\quad$ $B = (2, 1)$ $\quad$ $C = (1, 4)$

a) Los transformados de los puntos A, B y C son, respectivamente,

$$A' = (3 \times \quad, 3 \times \quad) = (\quad, \quad)$$

$$B' =$$

$$C' =$$

b) Trace en el dibujo anterior los puntos A', B' y C'. Debido a que la imagen de un segmento, por ejemplo $\overline{AB}$, es el segmento $A'B'$, el triángulo ABC se transforma en el triángulo $A'B'C'$.

c) Trace en el dibujo el $\triangle A'B'C'$, transformado del $\triangle ABC$.

d) Midiendo los lados respectivos, encuentre las razones siguientes:

$$\frac{AB}{A'B'} = \qquad \frac{BC}{B'C'} = \qquad \frac{CA}{C'A'} =$$

e) Recuerde la definición de semejanza de triángulos. Lo que se encontró en el inciso d) indica que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son

f) En dos triángulos semejantes, los ángulos respectivos son Por lo tanto,

$$\angle A \cong \quad, \qquad \angle B \cong \quad, \qquad \angle C \cong$$

Observe que la razón de semejanza del triángulo ABC al triángulo transformado $A'B'C'$ es $\boxed{\frac{1}{3}}$

En el ejemplo y los ejercicios anteriores hemos examinado la transformación del plano dada por la fórmula

$$(x, y) \to (3x, 3y)$$

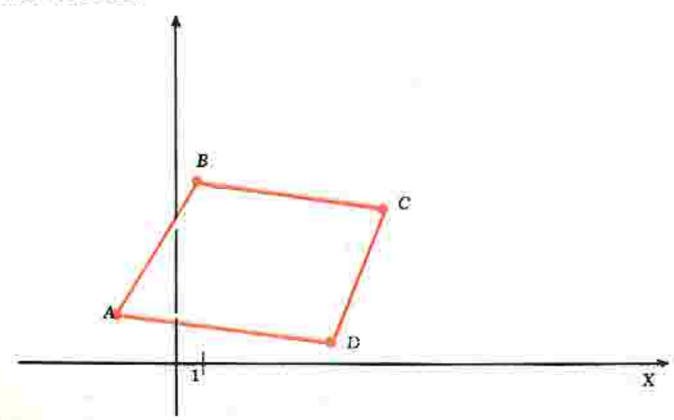
En general, podemos considerar transformaciones del plano determinadas por la regla

$$(x, y) \to (kx, ky)$$

donde k es un número cualquiera diferente de cero.

En este tipo de transformaciones se puede ver que cada figura se transforma en una figura semejante a ella.

Ejercicio 29. En la siguiente figura está ilustrado un cuadrilátero $ABCD$.



$A = (-2, 2)$

$B = (1, 7)$

$C = (8, 6)$

$D = (6, 1)$

a) Considerando la transformación dada por la fórmula $(x, y) \to (2x, 2y)$ encuentre los transformados de los puntos A, B, C y D.

$A' =$ $\qquad$ $B' =$ $\qquad$ $C' =$ $\qquad$ $D' =$

b) Trace en el dibujo anterior los puntos A', B', C' y D'.

c) Debido a que en esta transformación cada segmento se transforma en un segmento, el cuadrilátero $ABCD$ se transforma en el cuadrilátero $A'B'C'D'$. Trace el cuadrilátero transformado.

d) Midiendo los lados respectivos, encuentre las razones siguientes:

$$\frac{AB}{A'B'} = \qquad \frac{BC}{B'C'} = \qquad \frac{CD}{C'D'} = \qquad \frac{DA}{D'A'} =$$

e) Compruebe que

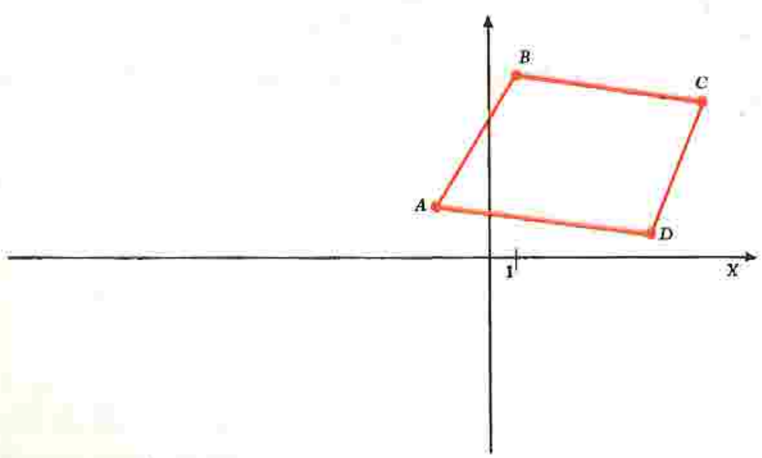
$$\angle A \cong \angle A', \qquad \angle B \cong \angle B', \qquad \angle C \cong \angle C' \quad \text{y} \quad \angle D \cong \angle D'$$

f) De d) y e) podemos concluir que el cuadrilátero $ABCD$ y su transformado $A'B'C'D'$ son

g) La razón de semejanza del primer cuadrilátero a su transformado es

Ejercicio 30. Haga los mismos pasos que en el ejercicio anterior con la transformación dada por la fórmula

$$(x, y) \to (-2x, -2y)$$



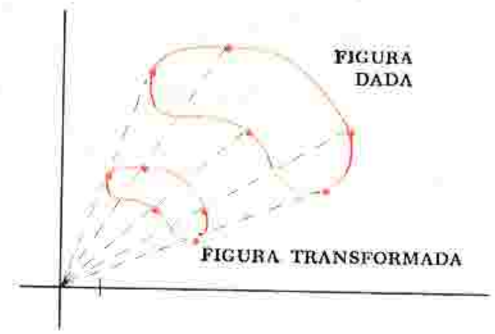
$A = (-2, 2)$ $\qquad$ $B = (1, 7)$
$C = (8, 6)$ $\qquad$ $D = (6, 1)$.

En general la transformación del plano dada por la regla $(x, y) \to (kx, ky)$, con $k \neq 0$, tiene las siguientes propiedades:

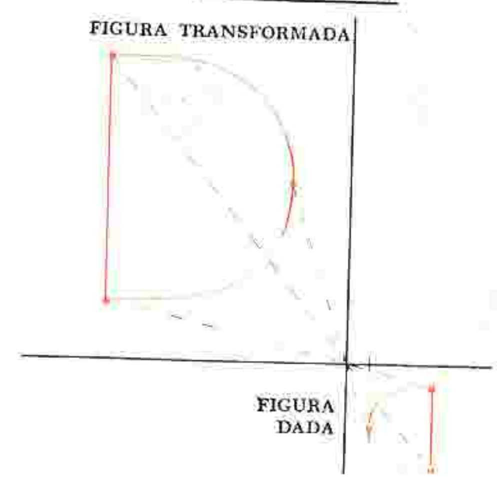
a) *El transformado de cualquier figura es una figura semejante a ella.*

b) *La razón de semejanza de una figura a su transformado es $\dfrac{1}{k}$.*

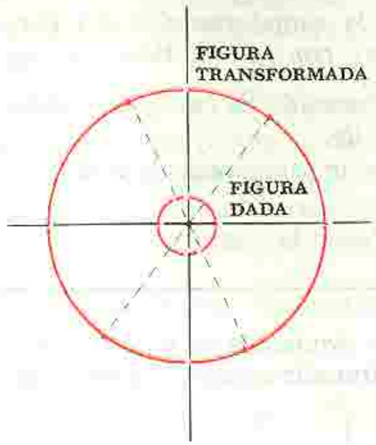
En los dibujos siguientes se ilustran algunas figuras y sus imágenes según las transformaciones indicadas.



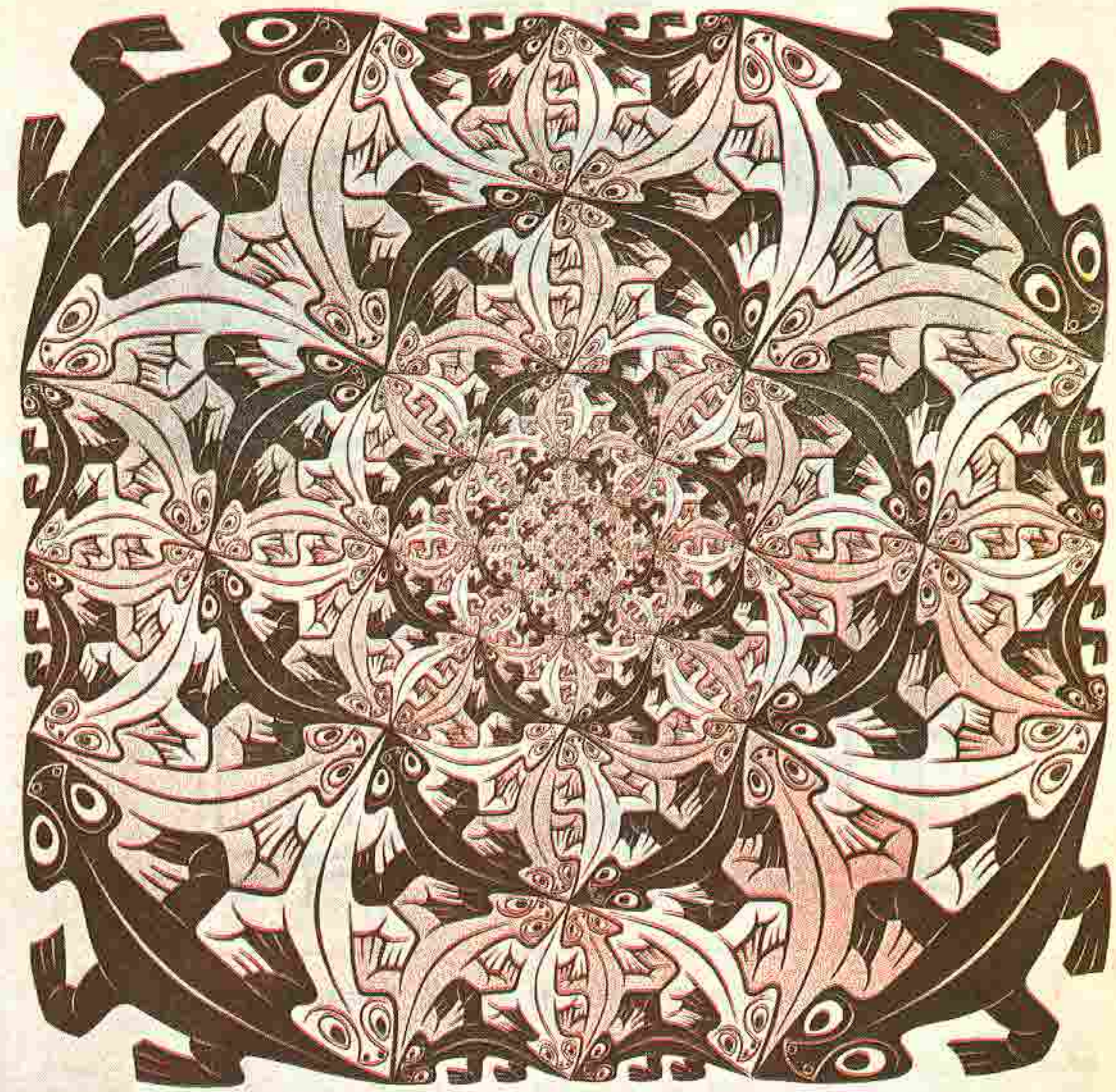
$$(x, y) \to \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$$

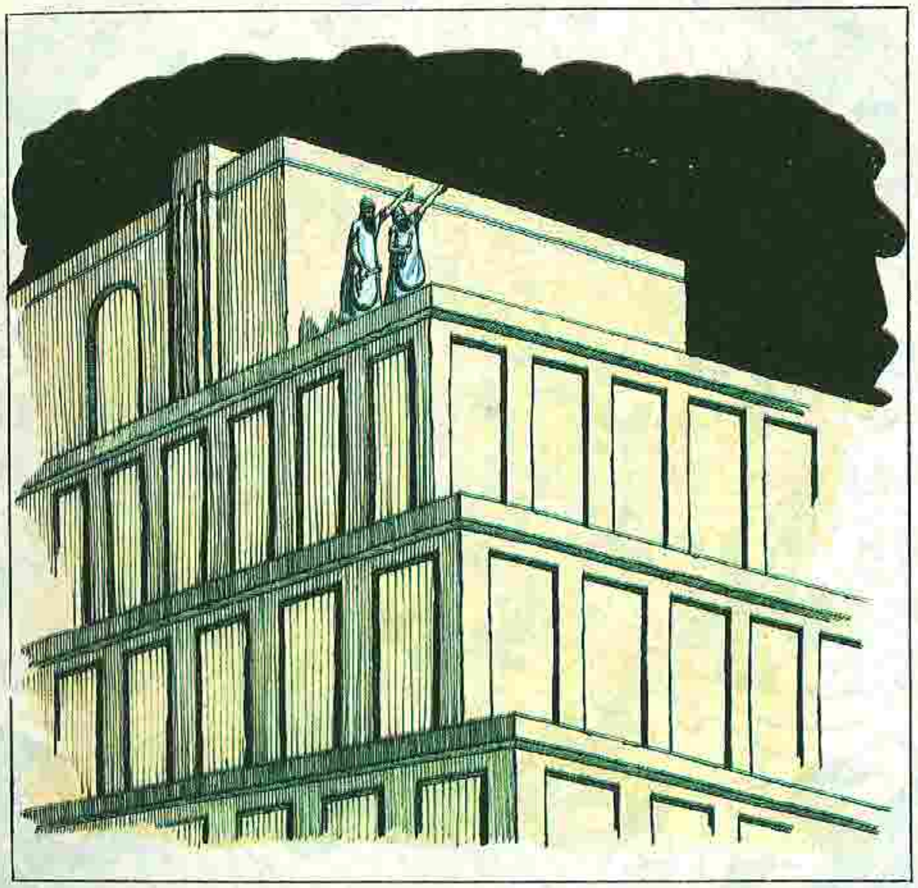


$$(x, y) \to (-3x, -3y)$$



$$(x,\ y) \rightarrow (5x,\ 5y)$$





El estudio de los astros fue el origen de la trigonometría

SEXTA UNIDAD

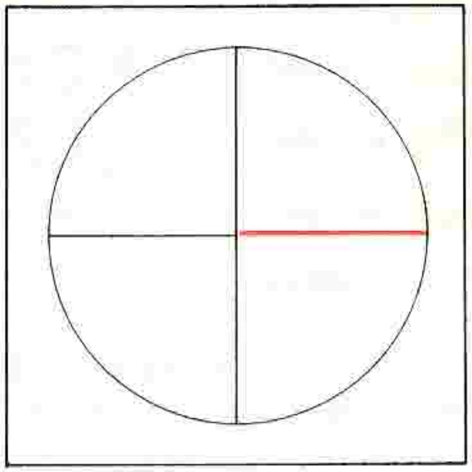
TRIGONOMETRIA

Desde la antigüedad, al estudiar triángulos, el hombre observó algunas relaciones entre los ángulos y los lados de dichas figuras. Fue el estudio sistemático de esas relaciones lo que llevó a la humanidad a la creación y la utilización de la trigonometría. En lo que sigue iniciaremos el estudio de algunas funciones trigonométricas.

1. LA FUNCION SENO

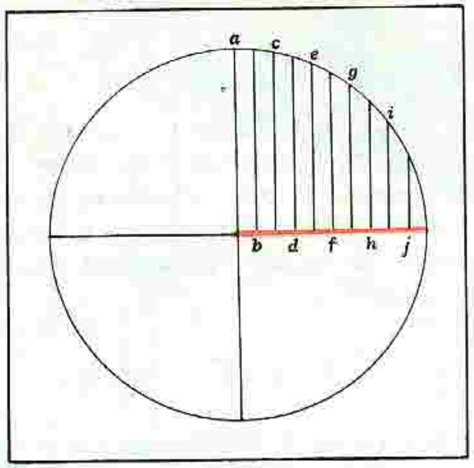
En el estudio que vamos a emprender nos serán de mucha utilidad las ideas que obtendremos al realizar los Ejercicios 1 y 3.

Ejercicio 1. En una hoja de papel milimétrico dibuje usted una circunferencia de 10 cm de radio, trace dos de sus diámetros, de tal manera que sean perpendiculares entre sí y pinte de rojo uno de los radios. (Vea la ilustración)



En lo que sigue, la unidad de medida de todos los segmentos que consideremos será el radio coloreado en rojo y a la construcción que hemos hecho la denominaremos "circunferencia de radio unidad".

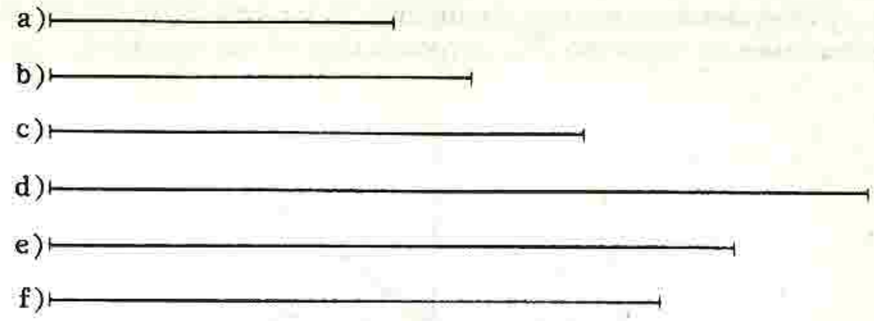
Ejercicio 2. Divida el radio unidad en 10 segmentos de igual longitud y en los puntos de división trace perpendiculares a ese radio.



Considerando la unidad que hemos fijado, la medida de estos segmentos perpendiculares es:

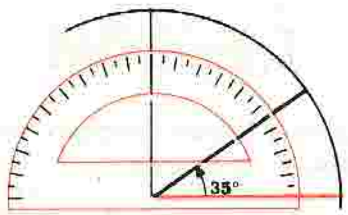
a)	unidades	b)	unidades
c)	unidades	d) .95	unidades
e)	unidades	f) .86	unidades
g)	unidades	h)	unidades
i)	unidades	j)	unidades

Ejercicio 3. Utilizando la misma unidad de medida que hemos considerado, indique la longitud de cada uno de los siguientes segmentos.



Recuerde que se llama *ángulo central* a cualquier ángulo que tenga su vértice en el centro de una circunferencia.

Por ejemplo, en la siguiente ilustración tenemos un ángulo central de 35° en nuestra circunferencia de radio unidad.



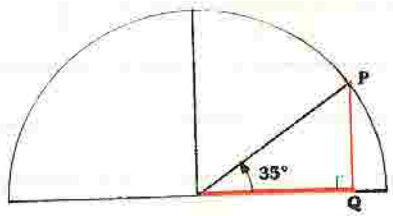
Los ángulos centrales que consideraremos en adelante, serán únicamente aquellos que tengan uno de sus lados sobre el radio unidad.

Ejercicio 4. En su circunferencia de radio unidad, construya los ángulos centrales cuya medida se indica.

a) 5°	b) 10°	c) 15°	d) 20°
e) 25°	f) 30°	g) 35°	h) 40°
i) 45°	j) 50°	k) 55°	l) 60°
m) 65°	n) 70°	o) 75°	p) 80°
q) 85°	r) 90°		

Utilizando una circunferencia de radio unidad se pueden ilustrar algunas relaciones muy sencillas entre ángulos centrales y longitudes de segmentos, tal como hacemos a continuación:

Construimos en nuestra circunferencia un ángulo central de 35° y trazamos el segmento $\overline{PQ}$, perpendicular al radio unidad.



A la medida del segmento $\overline{PQ}$ (tomando como unidad de medida el radio unidad) la llamamos *seno del ángulo de* 35°, y la simbolizamos así *sen* 35°.

Como vemos, esa medida es .57. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\boxed{\text{sen } 35° = .57}$$

Siguiendo este procedimiento podemos asociar a cada ángulo entre 0° y 90° un seno determinado.

Ejercicio 5. Complete las siguientes igualdades.

sen 20° = ______ sen 40° = ______

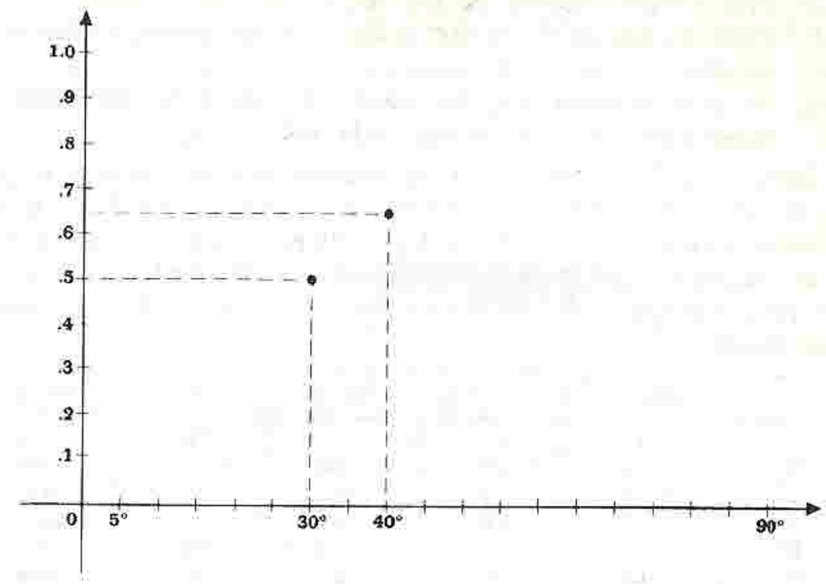
sen 60° = ______ sen 80° = ______

Ejercicio 6. Complete la siguiente tabla

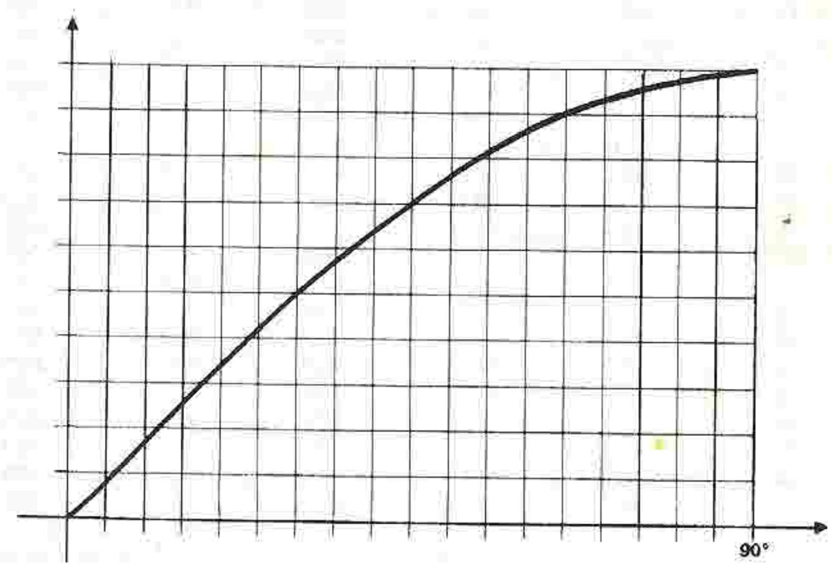
X	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
sen X										

X	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
sen X									

Ejercicio 7. Con los datos de la tabla anterior, complete la siguiente gráfica.



Si pudiéramos, para cada ángulo entre 0° y 90°, encontrar su seno correspondiente y representar esto gráficamente, obtendríamos una gráfica como la siguiente:



Ejercicio 8. Observe la gráfica anterior y resuelva las siguientes cuestiones:

a) ¿La gráfica anterior es una recta?

b) Para un ángulo entre 30° y 60°, el seno correspondiente está entre ________ y ________.

c) Si consideramos ángulos cada vez mayores, entonces los senos correspondientes son cada vez

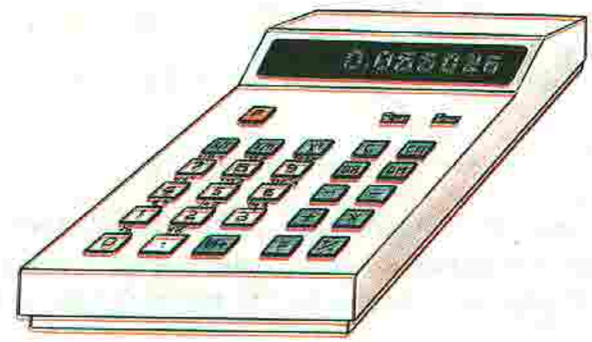
Como podemos observar, en lo anterior hemos asociado a cada ángulo (entre 0° y 90°) un número (entre 0 y 1). Es decir, hemos determinado una *función* a la cual se le da el nombre de **función seno.**

En cursos superiores se define la función seno en forma rigurosa; pero para nuestros fines basta con las ideas que hasta aquí hemos desarrollado.

x	sen x	x	sen x	x	sen x
1°	.017	31°	.515	61°	.875
2°	.035	32°	.530	62°	.883
3°	.052	33°	.545	63°	.891
4°	.070	34°	.559	64°	.899
5°	.087	35°	.574	65°	.906
6°	.105	36°	.588	66°	.914
7°	.122	37°	.602	67°	.921
8°	.139	38°	.616	68°	.927
9°	.156	39°	.629	69°	.934
10°	.174	40°	.643	70°	.940
11°	.191	41°	.656	71°	.946
12°	.203	42°	.669	72°	.951
13°	.225	43°	.682	73°	.956
14°	.242	44°	.695	74°	.961
15°	.259	45°	.707	75°	.966
16°	.276	46°	.719	76°	.970
17°	.292	47°	.731	77°	.974
18°	.309	48°	.743	78°	.978
19°	.326	49°	.755	79°	.982
20°	.342	50°	.766	80°	.985
21°	.358	51°	.777	81°	.988
22°	.375	52°	.788	82°	.990
23°	.391	53°	.799	83°	.993
24°	.407	54°	.809	84°	.995
25°	.423	55°	.819	85°	.996
26°	.438	56°	.829	86°	.998
27°	.454	57°	.839	87°	.999
28°	.469	58°	.848	88°	.999
29°	.485	59°	.857	89°	.999
30°	.5	60°	.866	90°	1

Existen tablas más completas de la función seno que la que hemos elaborado. Por ejemplo, la que se anota en la pág. 204 y que utilizaremos posteriormente para resolver algunos problemas.

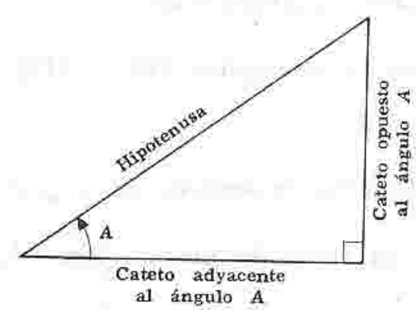
También hay en el mercado pequeñas calculadoras electrónicas que proporcionan senos de ángulos con gran precisión. Si usted pudiera manejar alguna de ellas, en lugar de las tablas, sería mucho mejor por la comodidad que ello le reportaría.



La función seno tiene múltiples aplicaciones en las ciencias y en la industria. Por ejemplo, para describir el comportamiento de una corriente eléctrica es imprescindible el empleo de esta función. En este curso nos iniciaremos en el estudio de las aplicaciones de dicha función, resolviendo únicamente algunos problemas elementales sobre triángulos rectángulos.

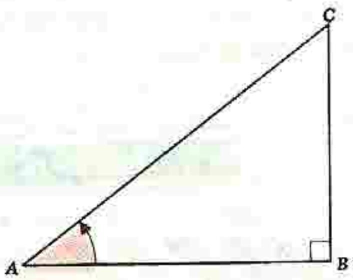
La función seno y los triángulos rectángulos:

Sabemos que en un triángulo rectángulo, al considerar uno de los ángulos agudos (por ejemplo al A), se usa la siguiente nomenclatura:

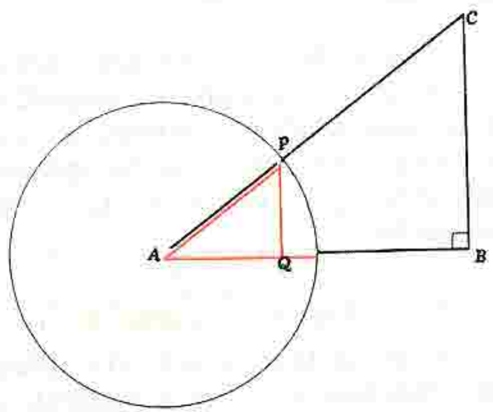


En un triángulo rectángulo la función seno nos puede servir para describir la relación que hay entre uno de sus ángulos agudos, la hipotenusa y el cateto opuesto a dicho ángulo.

Consideremos por ejemplo, el ángulo A del triángulo rectángulo ABC siguiente.



Tracemos una circunferencia de radio unidad, tomando como centro el vértice A y haciendo que el radio unidad y el segmento AB se traslapen. Tracemos el segmento $\overline{PQ}$ perpendicular a $\overline{AB}$.



En esta construcción observamos que:

$\frac{PQ}{AP} = \frac{BC}{AC}$ (Porque los triángulos ABC y APQ son semejantes)

Sabemos que

PQ = sen A (Por definición de seno de un ángulo)

$AP = 1$ (Porque $\overline{AP}$ es radio de nuestra circunferencia de radio unidad)

Esto es,

$$\frac{PQ}{AP} = \frac{\text{sen } A}{1} = \text{sen } A$$

Por lo tanto,

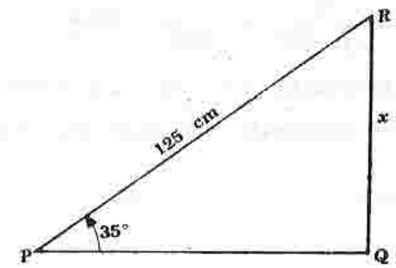
$$\text{sen } A = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{cateto opuesto de } A}{\text{hipotenusa}}$$

Lo que observamos aquí es válido para cualquier triángulo rectángulo.

$$\text{Sen } X = \frac{\text{cateto opuesto a } X}{\text{hipotenusa}}$$

Con esta igualdad podremos resolver problemas como los siguientes:

Problema. ¿Cuánto mide el cateto $\overline{QR}$ del siguiente triángulo rectángulo?



Aplicando la fórmula anterior, tenemos que:

$$\text{sen } 35° = \frac{x}{125}$$

Resolviendo la ecuación encontramos que:

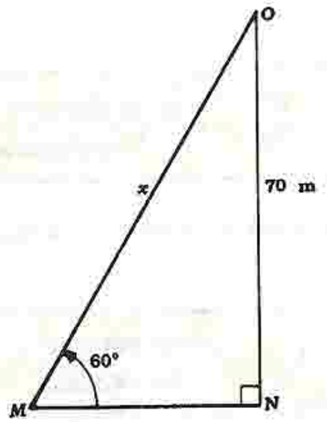
$$x = (\text{sen } 35°)(125)$$

Como sen 35° = .573, entonces:

$$\boxed{x = 71.625}$$

Respuesta. El cateto $\overline{QR}$ mide 71.625 cm.

Problema. ¿Cuánto mide la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo?



Aplicando la fórmula, tendremos:

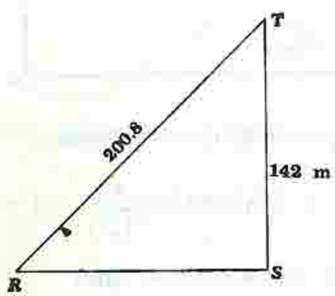
$$\text{sen } 60° = \frac{70}{x}$$

Resolviendo la ecuación encontramos:

$$x = \frac{70}{\text{sen } 60°} = \frac{70}{.866} = 80.831$$

Respuesta. La hipotenusa mide 80.831 metros.

Problema. Dado el siguiente triángulo rectángulo, ¿cuál es la medida del ángulo R?

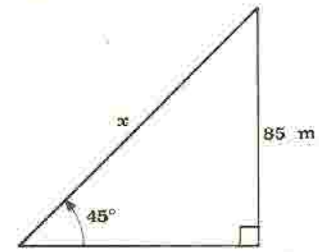


$$\text{sen } R = \frac{142}{200.8} = .707$$

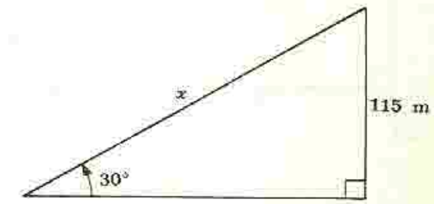
Buscando en la tabla encontramos que el ángulo R es de 45°

Ejercicio 9. En cada triángulo rectángulo encuentre usted el valor x.

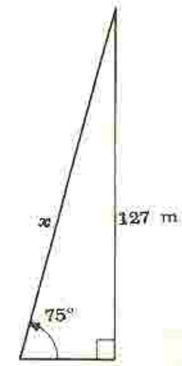
a)



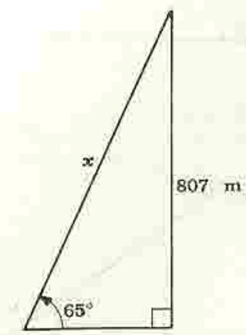
b)



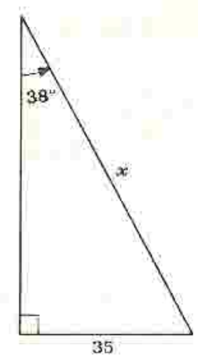
c)



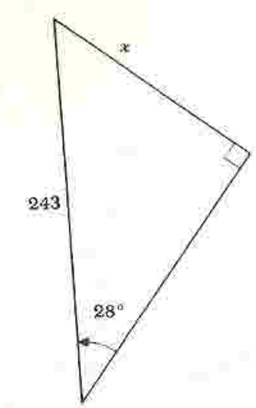
d)



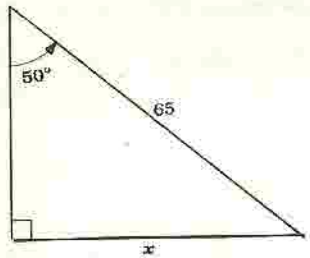
e)



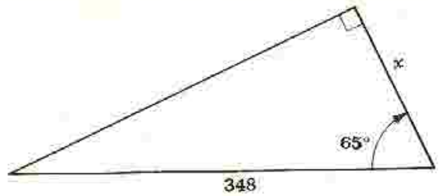
f)



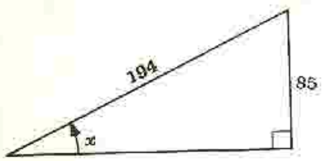
g)



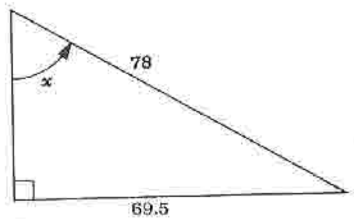
h)



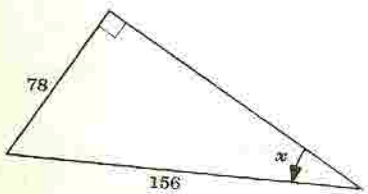
i)



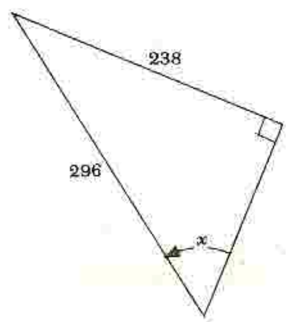
j)



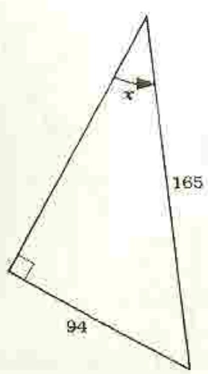
k)



l)

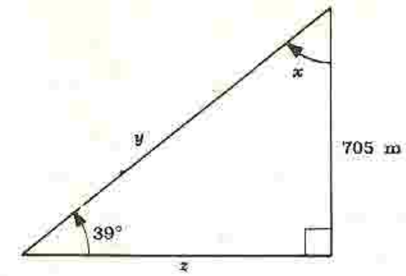


m)

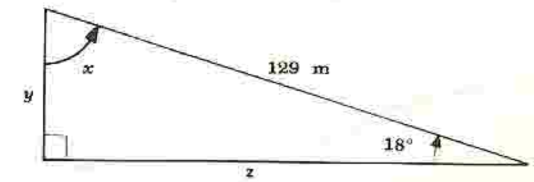


Ejercicio 10. Encuentre usted todos los segmentos y ángulos faltantes de los siguientes triángulos rectángulos.

a)

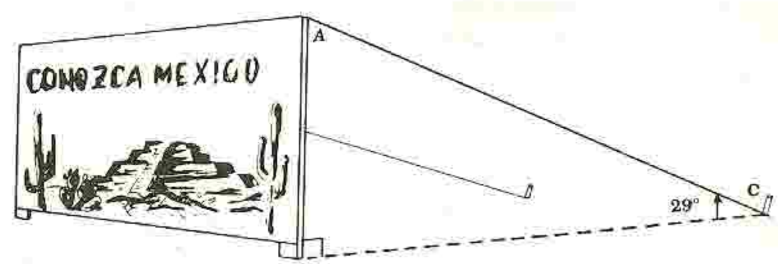


b)

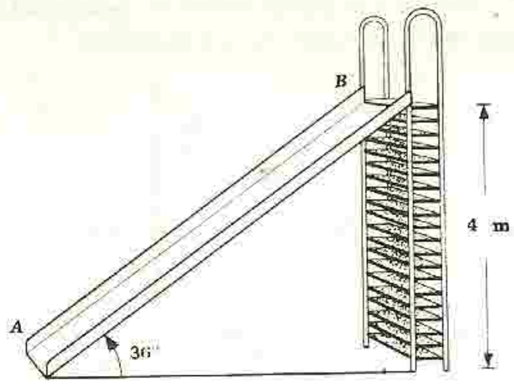


Problemas.

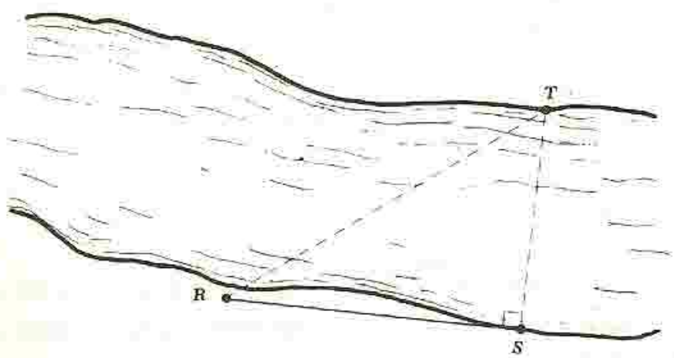
a) ¿Cuánto mide el cable de extremos A y C, si la altura del anuncio es de 3.5 m y el cable forma con el suelo un ángulo de 29°?



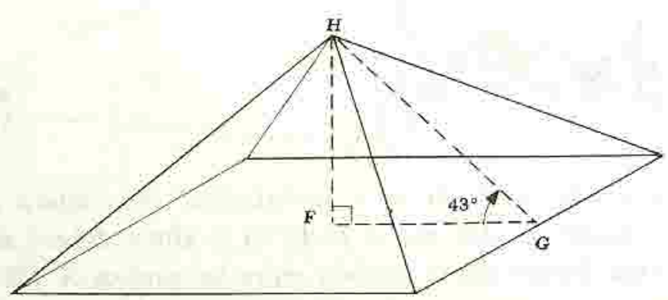
b) Se quiere construir una "resbaladilla" de manera que forme un ángulo de 36° con el suelo. Si la altura deberá ser de 4 m, ¿cuál deberá ser la medida entre los puntos A y B?



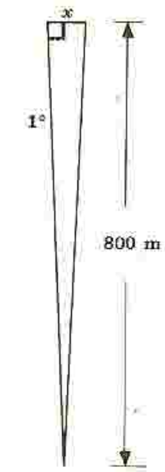
c) El ángulo $\angle TRS$ mide 36° y la distancia entre R y T es de 36 m, ¿cuál es el ancho del río?



d) Observe la ilustración. Si la distancia de H a G es de 75 m y el ángulo $\angle HGF$ es de 43°. ¿Cuál es la altura de la pirámide?



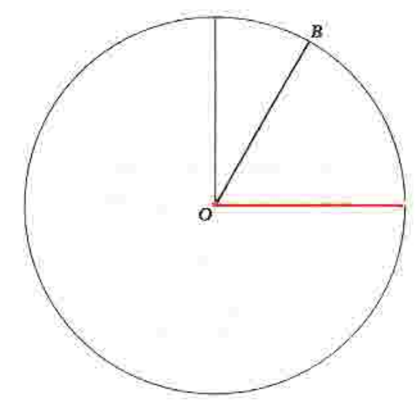
e) Si un proyectil se desvió 1° de su trayectoria, ¿cuánto se ha apartado de ésta al recorrer 800 m?



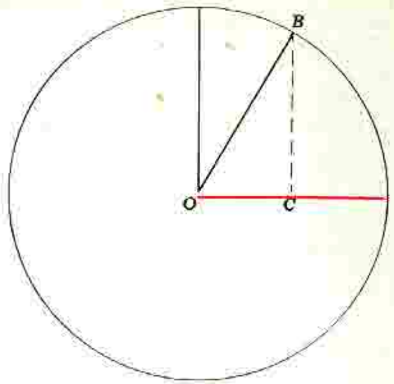
2. LA FUNCION COSENO

Consideremos ahora otra asociación de longitudes de segmentos con ángulos centrales, en nuestra "circunferencia de radio unidad".

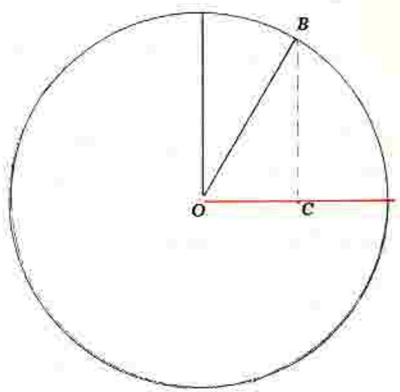
Tracemos, por ejemplo, un ángulo central de 60°.



Ahora, desde el punto B, tracemos una perpendicular al radio unidad.



Esto nos determina un segmento $\overline{OC}$, cuya longitud asociamos al ángulo de 60° en nuestra circunferencia de radio unidad.



A esta longitud OC la llamamos *coseno del ángulo de 60°* y la representamos simbólicamente así: *cos 60°*.

Como podemos ver, este coseno es 0.5 unidades; o sea,

$$\boxed{\cos 60^\circ = 0.5}$$

Siguiendo este procedimiento, podemos determinar el coseno de cualquier ángulo entre 0° y 90°.

Ejercicio 11. Complete las siguientes igualdades.

a) cos 20° = ▭ b) cos 40° = ▭

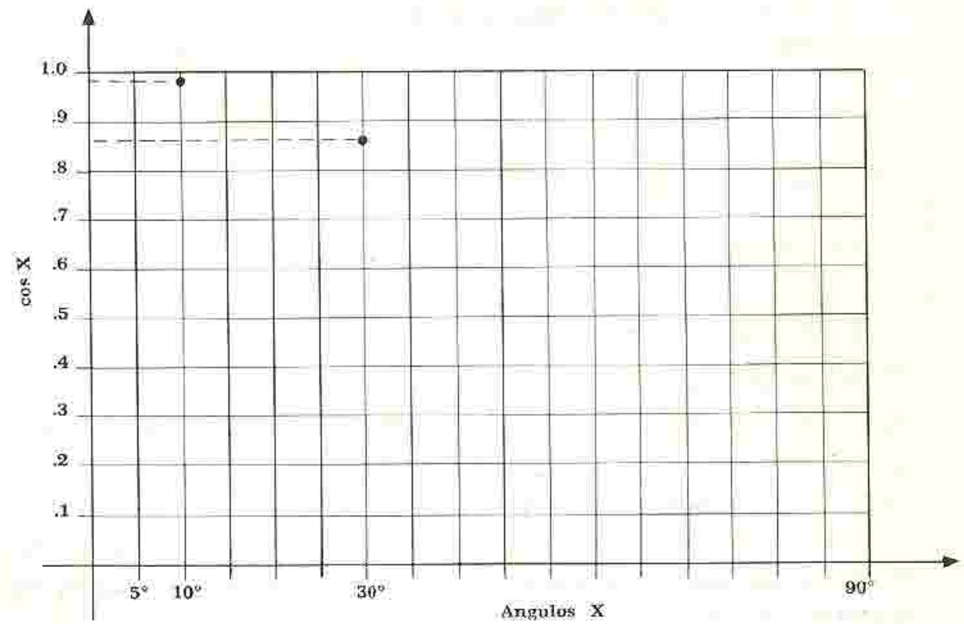
c) cos 70° = ▭ d) cos 80° = ▭

Ejercicio 12. Complete la tabla siguiente:

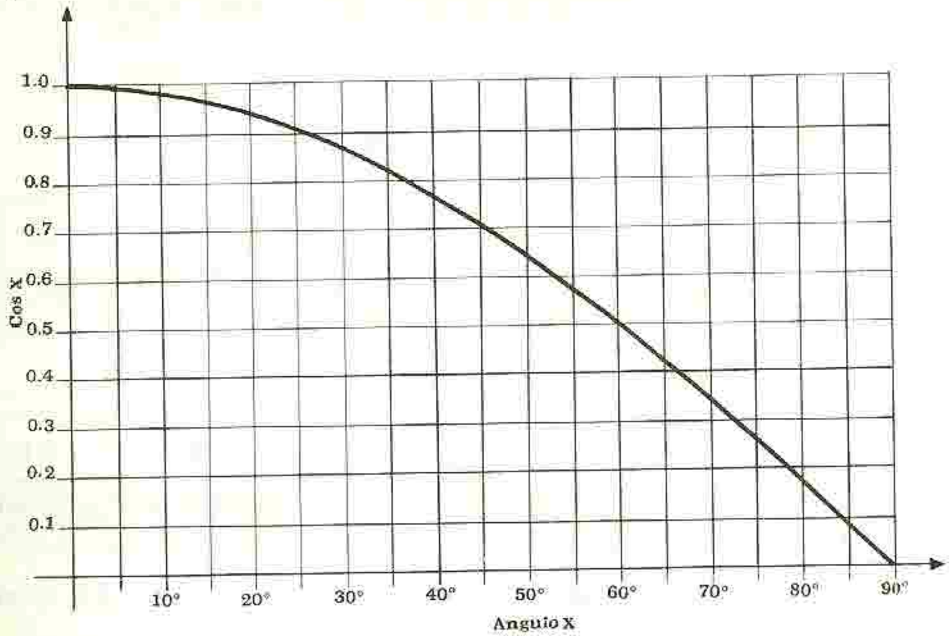
X	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
cos X										

X	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
cos X									

Ejercicio 13. Con los datos de la tabla anterior, complete la siguiente gráfica.



Si pudiéramos encontrar el coseno de cada ángulo entre 0° y 90° y trazar la gráfica correspondiente, ésta sería así:



Ejercicio 14. Utilizando la gráfica anterior, complete las siguientes igualdades.

a) cos 18° = ____ b) cos 27° = ____

c) cos 42° = ____ d) cos 68° = ____

e) cos ____ = .56 f) cos ____ = .45

g) cos ____ = .32 h) cos ____ = .1

En la gráfica podemos también observar que al considerar ángulos cada vez mayores, los cosenos correspondientes son cada vez ____________ y que los cosenos de ángulos entre 0° y 90° están comprendidos entre ____ y ____

Esta asociación entre ángulos y cosenos es una *función* a la que se acostumbra llamar **función coseno** y la cual en cursos más avanzados será definida rigurosamente.

Partiendo de esa definición rigurosa se pueden construir tablas de dicha función con la precisión que se desee. Aquí, para resolver algunos problemas, utilizaremos la siguiente tabla, o bien, la calculadora de bolsillo.

x	cos x	x	cos x	x	cos x
1°	1.000	31°	.857	61°	.485
2°	.999	32°	.848	62°	.469
3°	.999	33°	.839	63°	.454
4°	.998	34°	.829	64°	.438
5°	.996	35°	.819	65°	.423
6°	.995	36°	.809	66°	.407
7°	.993	37°	.799	67°	.391
8°	.990	38°	.788	68°	.375
9°	.988	39°	.777	69°	.358
10°	.985	40°	.766	70°	.342
11°	.982	41°	.755	71°	.326
12°	.978	42°	.743	72°	.309
13°	.974	43°	.731	73°	.292
14°	.970	44°	.719	74°	.276
15°	.966	45°	.707	75°	.259
16°	.961	46°	.695	76°	.242
17°	.956	47°	.682	77°	.225
18°	.951	48°	.669	78°	.208
19°	.946	49°	.656	79°	.191
20°	.940	50°	.643	80°	.174
21°	.934	51°	.629	81°	.156
22°	.927	52°	.616	82°	.139
23°	.921	53°	.602	83°	.122
24°	.914	54°	.588	84°	.105
25°	.906	55°	.574	85°	.087
26°	.899	56°	.559	86°	.070
27°	.891	57°	.545	87°	.052
28°	.883	58°	.530	88°	.035
29°	.875	59°	.515	89°	.017
30°	.866	60°	.5	90°	0

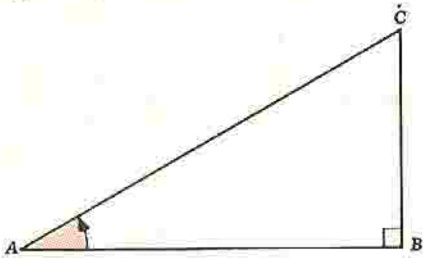
La función seno y la función coseno constituyen una herramienta importante en el estudio de algunos asuntos científicos y técnicos.

Por ejemplo, para describir las vibraciones mecánicas de los cuerpos es indispensable recurrir a estas funciones trigonométricas. Aquí veremos una aplicación elemental de la función coseno al resolver algunos problemas sencillos de triángulos rectángulos.

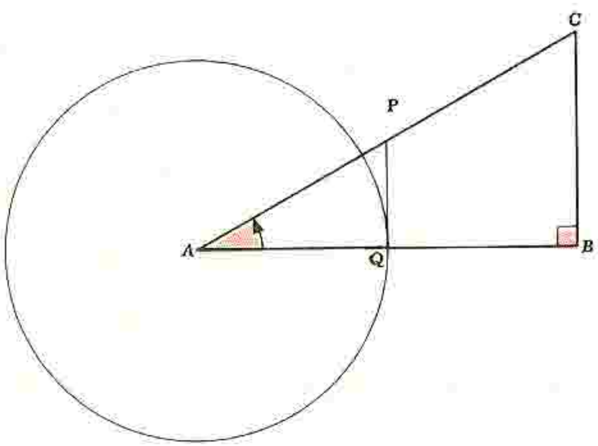
La función coseno y los triángulos rectángulos

Con la función coseno se puede describir la relación que hay entre uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, la hipotenusa y el cateto adyacente a dicho ángulo.

Consideremos, por ejemplo, el siguiente triángulo rectángulo.



Tomando como centro el vértice A, podemos trazar una circunferencia de radio unidad y un segmento $\overline{PQ}$ perpendicular a $\overline{AB}$, tal como se ilustra



Así determinamos los triángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle AQP$, en los cuales se tiene que:

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{AB}{AC}$$

En virtud de que $AQ = \cos A$ y $AP = 1$, tenemos que:

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{\cos A}{1} = \cos A$$

Por lo tanto, en el triángulo ABC,

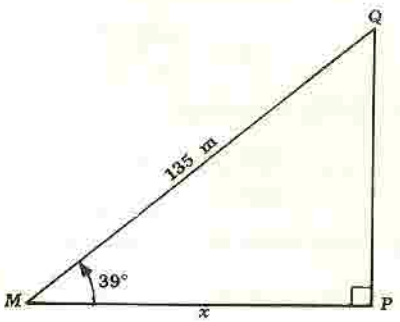
$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{cateto adyacente de } A}{\text{hipotenusa}}$$

Esto vale para cualquier triángulo rectángulo:

$$\boxed{\cos X = \frac{\text{cateto adyacente a } X}{\text{hipotenusa}}}$$

Con esta fórmula se pueden resolver problemas como los siguientes:

Problema. ¿Cuál es la medida del cateto x en el siguiente triángulo rectángulo?



Aplicando la fórmula que conocemos,

$$\cos 39° = \frac{x}{135}$$

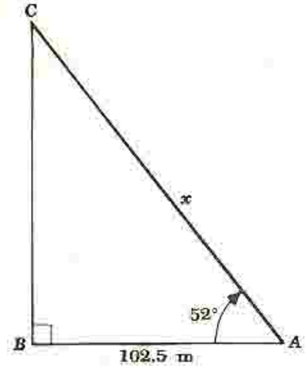
resolviendo esta ecuación tenemos que:

$$x = 135 \cdot \cos 39°$$

$$x = (135)(.777) = 104.895$$

Por lo tanto, el cateto x mide 104.895 m.

Problema. ¿Cuánto mide la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo?



Aplicando la fórmula conocida, vemos que:

$$\cos 52^\circ = \frac{102.5}{x}$$

Despejando la x, encontramos que:

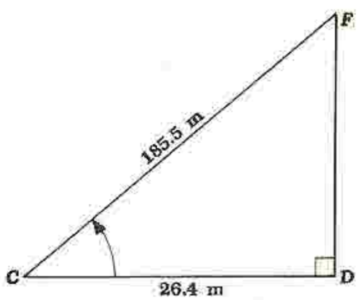
$$x = \frac{102.5}{\cos 52}$$

y como $\cos 52^\circ = .6156$, entonces

$$x = \frac{102.5}{.6156} = 166.504.$$

Respuesta. La hipotenusa $\overline{AC}$ mide 166.504.

Problema. ¿Cuál es la medida del ángulo C?



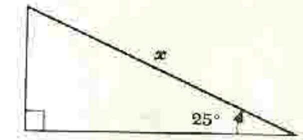
Ya que $\cos C = \dfrac{26.4}{185.5}$,

entonces $\cos C = .1423$.

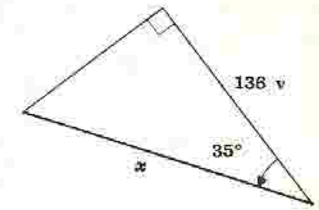
Buscando en la tabla, en la gráfica o en la calculadora (tecla $\cos^{-1}$), finalmente encontramos que el ángulo C mide 82° aproximadamente.

Ejercicio 15. Calcule el valor de x en cada uno de los siguientes triángulos.

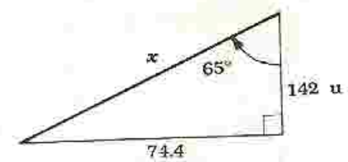
a)



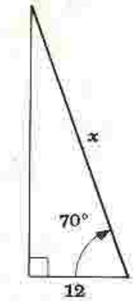
b)



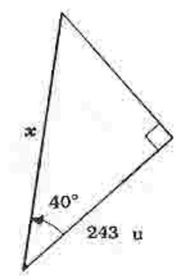
c)



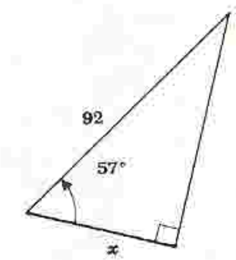
d)



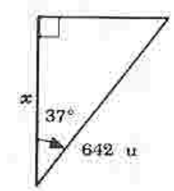
e)



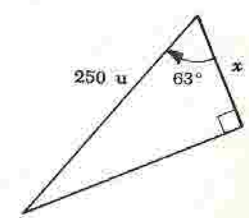
f)

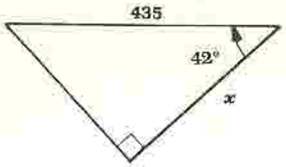


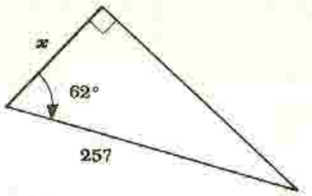
g)

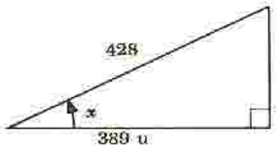


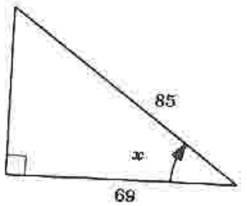
h)

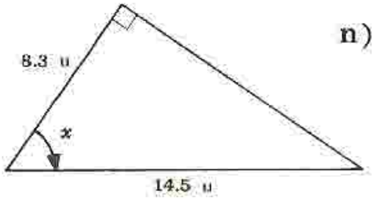


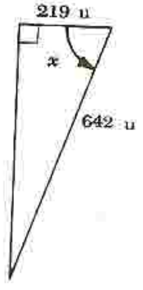
i) 

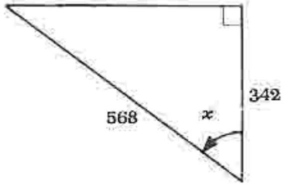
j) 

k) 

l) 

m) 

n) 

o) 

Problema. Sobre una pared se apoya un vidrio formando un ángulo de 73° con el piso. Si se sabe que el vidrio mide 1.80 m de largo, ¿cuál es la distancia de la pared a la base del vidrio?

Resolución. Por lo que sabemos,

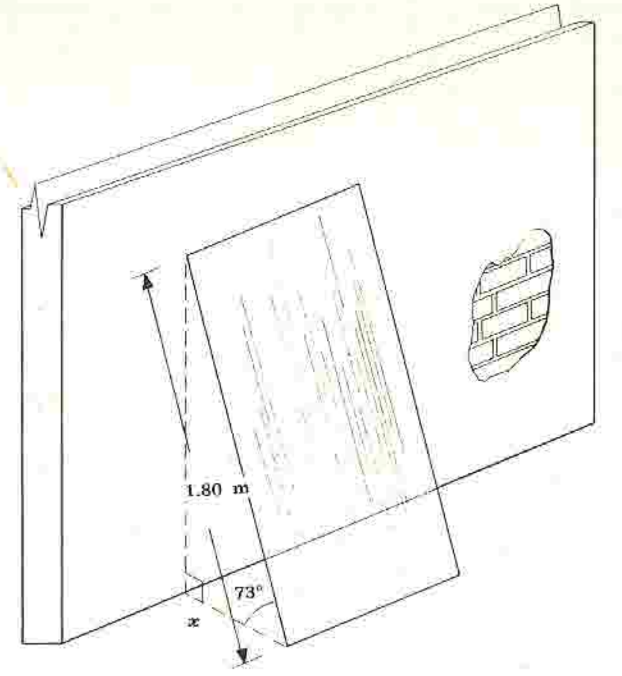
$$\cos 73^\circ = \frac{x}{1.80}$$

En las tablas encontramos que

$$\cos 73^\circ = 0.292$$

entonces tenemos que

$$0.292 = \frac{x}{1.80}$$



La solución de esta ecuación es

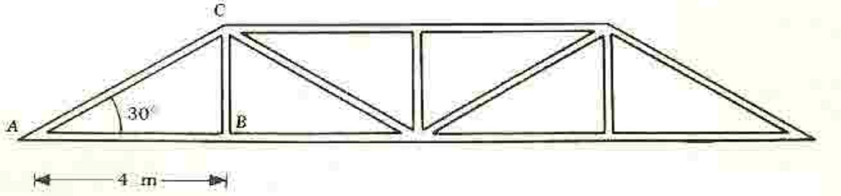
$$x = 0.52 \text{ m}$$

Por consiguiente, la respuesta al problema es:

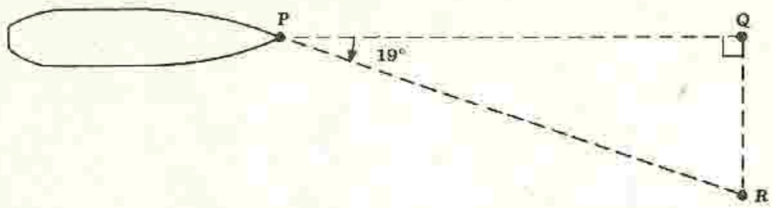
Respuesta. La distancia de la pared a la base del vidrio es .52 metros.

Problemas.

a) De acuerdo con la figura calcule la longitud de la viga cuyos extremos son A y C.

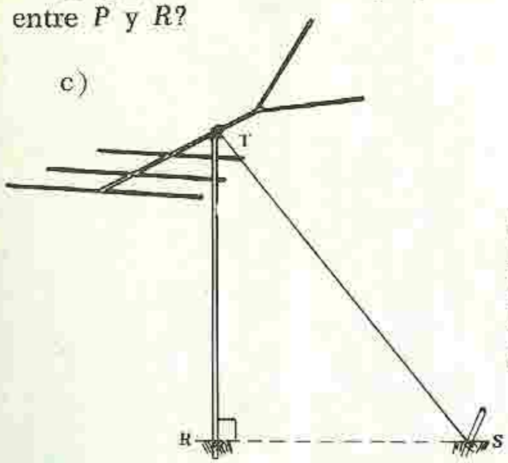


b) Un barco cambia su rumbo 19°, como se muestra en la figura.



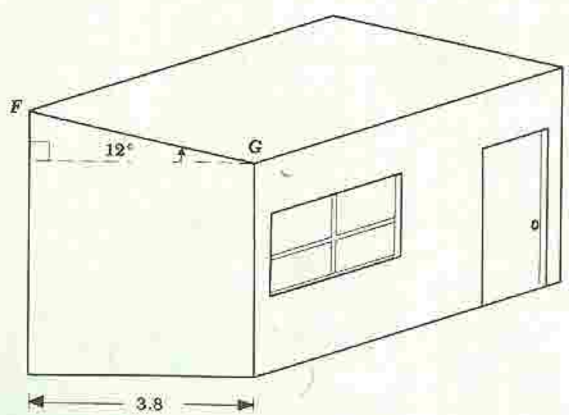
Si la distancia entre P y Q es de 8 millas, ¿cuál es la distancia entre P y R?

c)

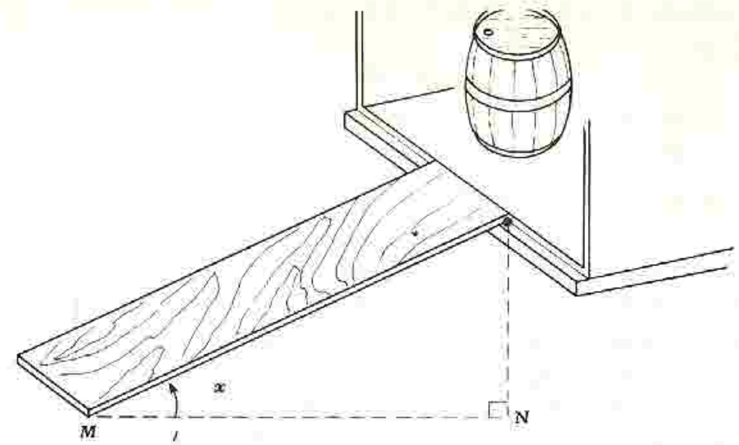


Una antena de televisión está sujeta como se muestra en la figura. Si el cable que va de T a S mide 4.5 m y la altura RT de la antena mide 3.5 m, ¿cuál es la medida del ángulo RTS?

d)



Observe la figura. ¿Cuál es la longitud FG de la losa?



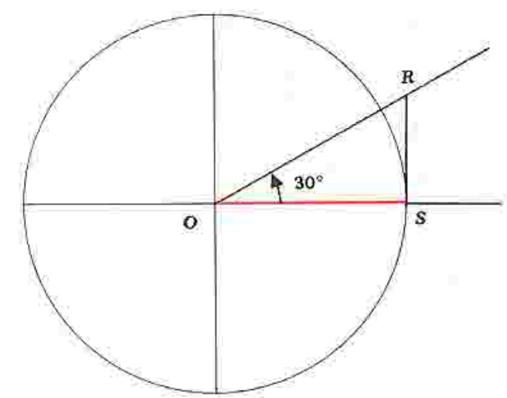
Si la longitud del tablón para descarga es 3.15 m y la distancia entre M y N es de 2.85 m, ¿cuál es la medida del ángulo que forma el tablón con el piso?

3. LA FUNCION TANGENTE

Estudiaremos ahora otra función trigonométrica a la que se da el nombre de *función tangente*.

Como en los casos anteriores, nos daremos una idea de lo que es esta función recurriendo a una circunferencia de radio unidad.

Consideremos, por ejemplo, un ángulo central de 30° y tracemos el segmento RS, perpendicular al radio unidad en el punto S de la circunferencia.



Asociemos la longitud de este segmento RS (.58 unidades) al ángulo de 30°.

A esta longitud la llamamos la *tangente del ángulo de* 30°. En símbolos,

$$\tan 30° = .58$$

Con este procedimiento podemos determinar la tangente de cualquier ángulo menor de 90°.

Ejercicio 16. Complete la siguiente tabla.

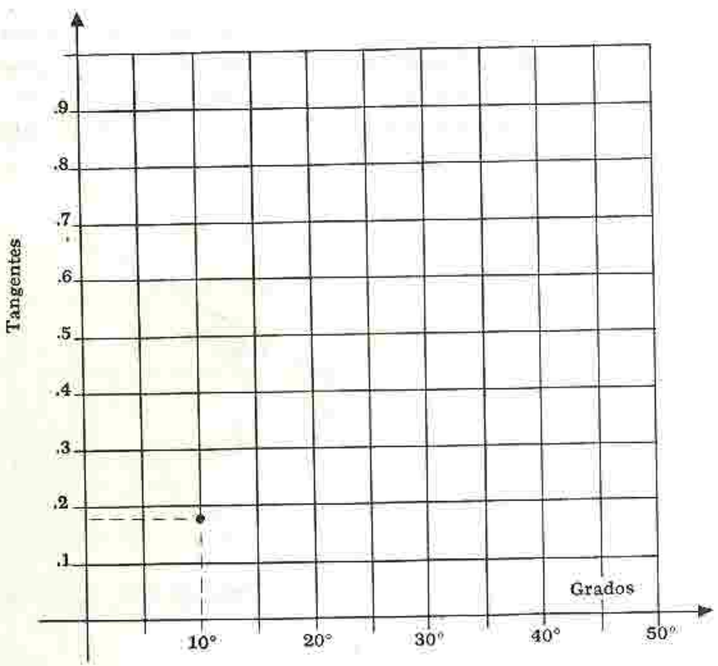
X	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
tan X										

Observe usted que para el ángulo de 45° la tangente es 1. A medida que consideremos ángulos mayores que 45° encontraremos que sus tangentes van tomando valores tan grandes que nos será prácticamente imposible calcularlas con nuestro procedimiento.

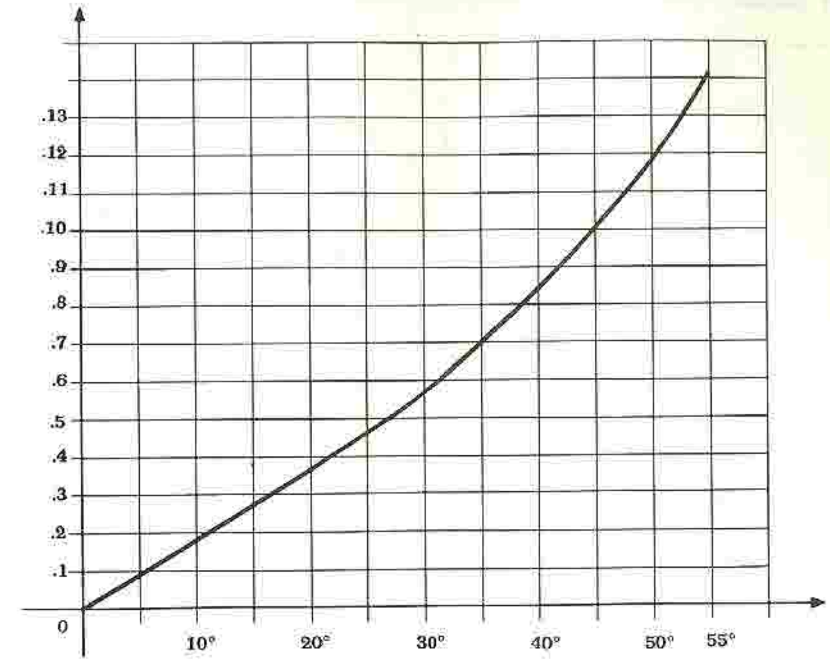
En la siguiente tabla se dan las tangentes de algunos ángulos mayores que 45°.

X	50°	60°	70°	80°	85°
tan X	1.19	1.73	2.75	5.67	11.4

Ejercicio 17. Considerando los datos de la tabla del ejercicio anterior, complete la siguiente gráfica.



Si pudiéramos encontrar las tangentes de todos los ángulos menores de 90° y trazar la gráfica correspondiente, ésta sería como la siguiente:



La gráfica muestra solamente una parte de la función, pues para ángulos cercanos a los 90° la tangente es muy grande. Por ejemplo, la tangente de 89.5° es 114.59 y la de 89.8° es 286.47. Esto nos hace prácticamente imposible su representación gráfica.

Para efectuar un análisis más profundo de esta función trigonométrica es necesario contar con una definición matemática de la misma. Y esto sólo es posible en cursos superiores.

Ejercicio 18. Utilizando la gráfica anterior complete las siguientes igualdades.

a) tan 23° =   b) tan 16° =

c) tan 37° =   d) tan 43° =

e) tan 47° =   f) tan   = .67

g) tan   = 1.2   h) tan   = .48

Con una definición matemática es posible elaborar tablas de tangentes con la precisión que se desee. La siguiente tabla nos servirá para resolver algunos problemas sencillos, en caso de que no podamos utilizar una calculadora electrónica.

x	tan x	x	tan x
1°	.017	46°	1.035
2°	.035	47°	1.072
3°	.052	48°	1.111
4°	.070	49°	1.150
5°	.087	50°	1.192
6°	.105	51°	1.235
7°	.123	52°	1.280
8°	.141	53°	1.327
9°	.158	54°	1.376
10°	.176	55°	1.428
11°	.194	56°	1.483
12°	.213	57°	1.540
13°	.231	58°	1.600
14°	.249	59°	1.664
15°	.268	60°	1.732
16°	.287	61°	1.804
17°	.306	62°	1.881
18°	.325	63°	1.963
19°	.344	64°	2.050
20°	.364	65°	2.145
21°	.384	66°	2.246
22°	.404	67°	2.356
23°	.424	68°	2.475
24°	.445	69°	2.605
25°	.466	70°	2.747
26°	.488	71°	2.904
27°	.510	72°	3.078
28°	.532	73°	3.271
29°	.554	74°	3.487
30°	.577	75°	3.732

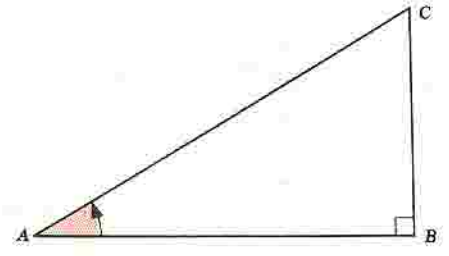
x	tan x	x	tan x
31°	.601	76°	4.011
32°	.625	77°	4.331
33°	.649	78°	4.705
34°	.675	79°	5.145
35°	.700	80°	5.671
36°	.727	81°	6.314
37°	.754	82°	7.115
38°	.781	83°	8.144
39°	.810	84°	9.514
40°	.839	85°	11.430
41°	.869	86°	14.301
42°	.900	87°	19.081
43°	.933	88°	28.636
44°	.966	89°	57.290
45°	1	90°	

La función tangente, al igual que las otras funciones trigonométricas, es de gran utilidad para describir fenómenos naturales. Sin embargo, sólo utilizaremos aquí dicha función para resolver algunos problemas sobre triángulos rectángulos.

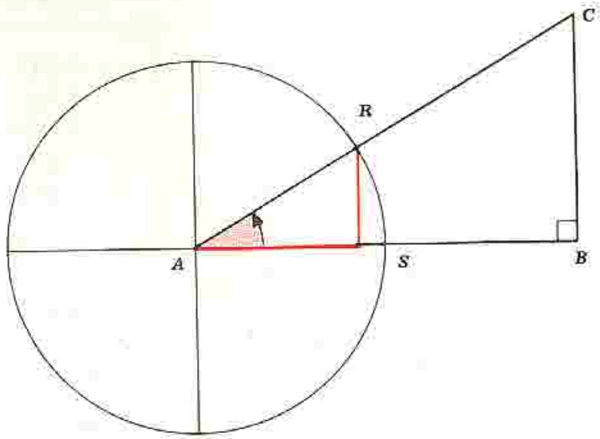
La función tangente y los triángulos rectángulos

Con la función tangente se puede describir la relación que existe entre un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y los catetos del mismo.

Por ejemplo, consideremos el triángulo rectángulo ABC siguiente:



Como hemos hecho antes, tracemos una circunferencia de radio unidad sobre este triángulo y tracemos el segmento RS.



Asi tendremos dos triángulos semejantes en los cuales:

$$\frac{RS}{AS} = \frac{CB}{AB}$$

Como $RS = \tan A$ y $AS = 1$, entonces:

$$\frac{RS}{AS} = \frac{\tan A}{1} = \tan A$$

Por lo tanto,

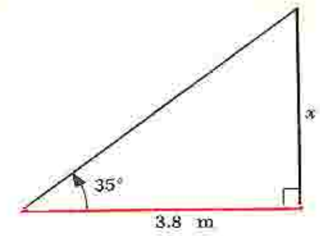
$$\tan A = \frac{CB}{AB} = \frac{\text{cateto opuesto de } A}{\text{cateto adyacente de } A}$$

Lo anterior vale para todo triángulo rectángulo:

$$\boxed{\tan X = \frac{\text{cateto opuesto a } X}{\text{cateto adyacente a } X}}$$

Con esta fórmula se pueden resolver problemas como los siguientes:

Problema. Determine el valor de x en el siguiente triángulo.



Aplicando la fórmula conocida, tenemos que:

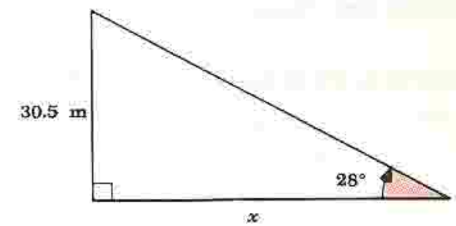
$$\tan 35^\circ = \frac{x}{3.8}$$

$$x = (\tan 35^\circ)(3.8)$$

$$= (.70)(3.8) = 2.66$$

Solución. x vale 2.66 m.

Problema. ¿Cuánto vale x en el triángulo siguiente?



Resolución.

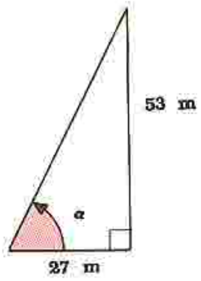
$$\tan 28^\circ = \frac{30.5}{x}$$

$$x = \frac{30.5}{\tan 28^\circ}$$

$$x = \frac{30.5}{.5317} = 57.36$$

Respuesta. x vale 57.36 m.

Problema. ¿Cuál es la medida del ángulo α?



Resolución.

$$\tan\ \alpha = \frac{53}{27} = 1.96$$

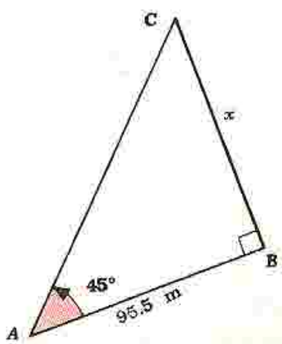
Consultando las tablas o usando la calculadora (tecla $\tan^{-1}$) encontramos que:

$$\tan\ 63^\circ = 1.96$$

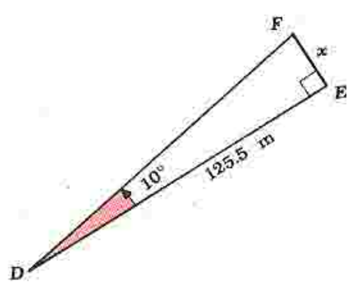
Por lo tanto, la medida del ángulo α es 63°.

Ejercicio 19 Encuentre el valor de x en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.

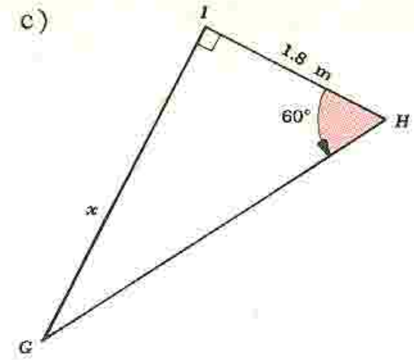
a)



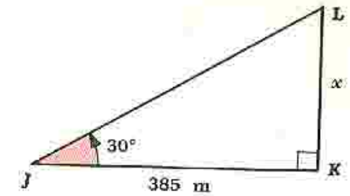
b)



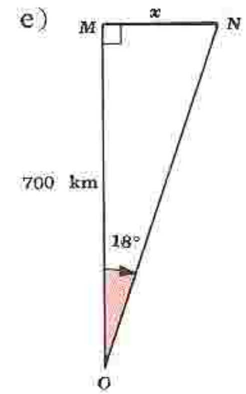
c)



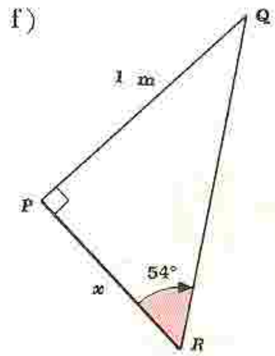
d)



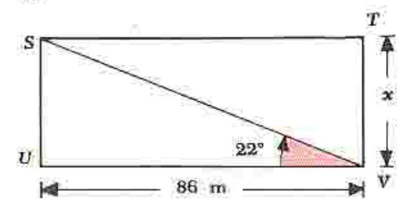
e)



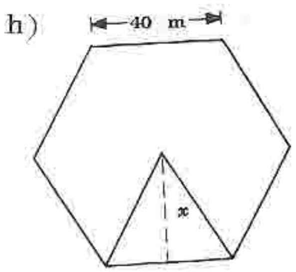
f)



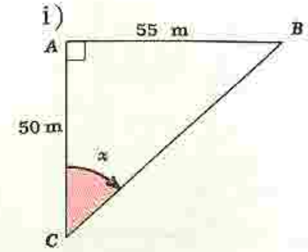
g)



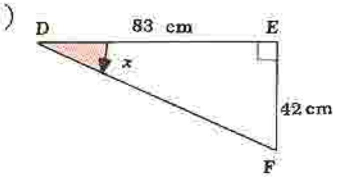
h)



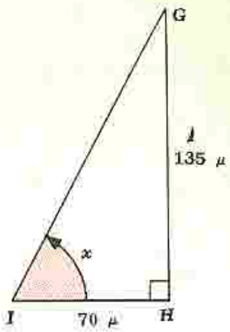
i)



j)



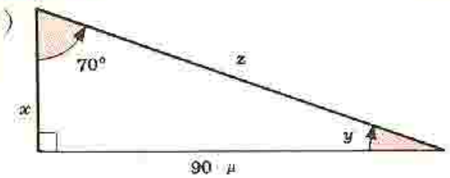
k)



l)

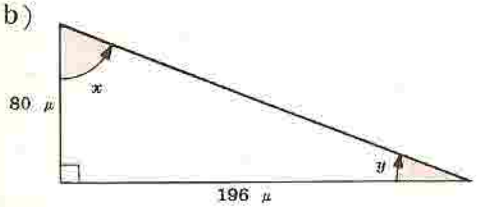
Ejercicio 20. Determine el valor de x, y, z en cada triángulo.

a)



$x =$
$y =$
$z =$

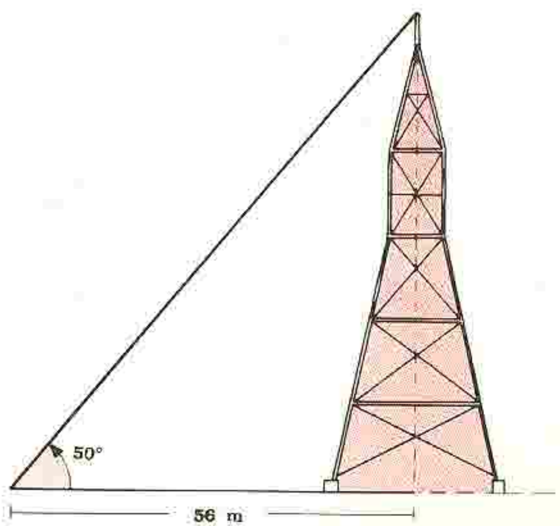
b)



$z =$
$x =$
$y =$

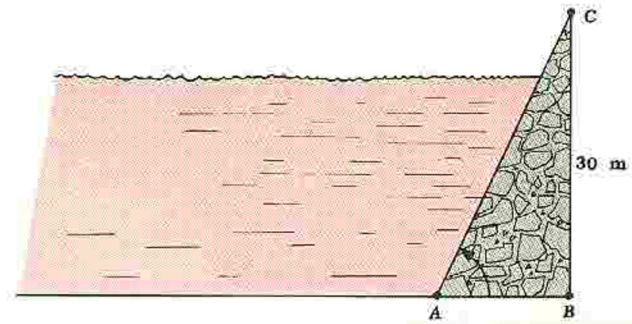
Problemas.

a) Con los datos de la figura, calcule la altura de la torre.

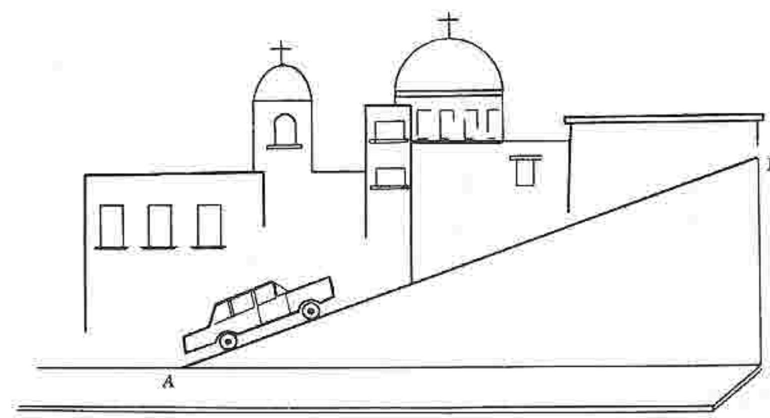


b) Calcule la medida del apotema de un hexágono cuyo lado mide 5 cm. (Sugerencia: Haga el dibujo del hexágono y encuentre después la medida de cierto ángulo.)

c) En una presa se desea construir un muro de contención. El ángulo CAB debe ser de 65° y la altura del muro de 30 m. Calcule el ancho AB de la base del muro.

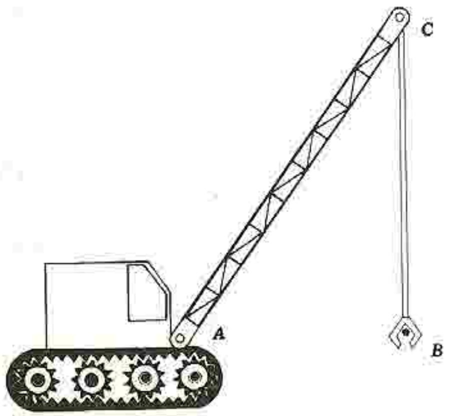


d) La ilustración muestra una parte de Guanajuato. La longitud $\overline{AC}$ de una calle es 52.21 m y la longitud BC es de 19 m. ¿Qué ángulo forma la calle $\overline{AB}$ con respecto a la calle horizontal?

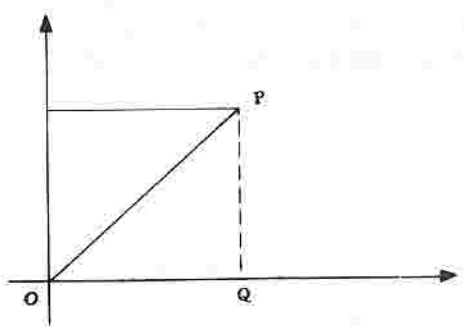


Problemas de recapitulación

a) ¿Cuál es la medida de AC? El $\angle ACB$ es de 39° y la longitud de $\overline{CB}$ es de 15 m.

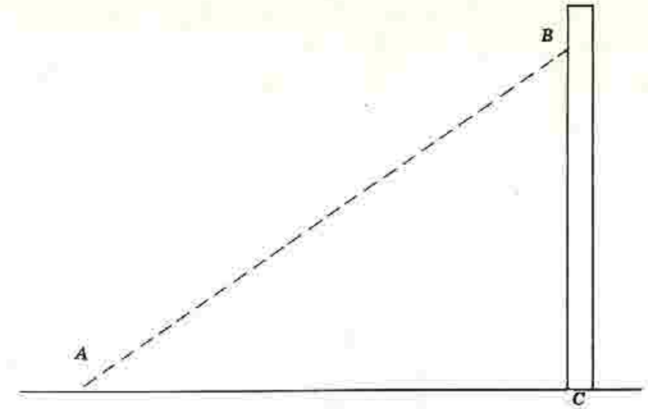


b) Las coordenadas del punto P son (10, 9). Obtenga la medida del $\angle POQ$ y la medida de $\overline{OP}$.

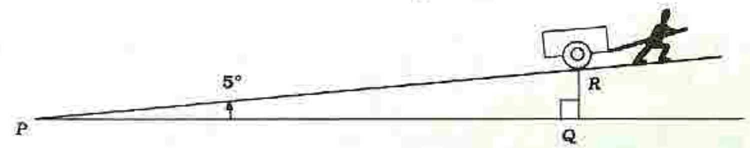


c) La dirección de los rayos solares con la horizontal es de 55°. Si la sombra proyectada por una planta de maíz es de 1.5 m, ¿Cuál es la altura de ésta?

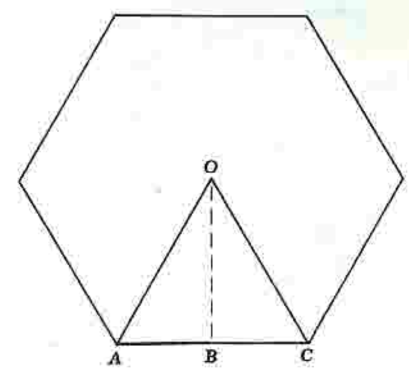
d) Un proyectil es disparado desde A con un ángulo de 35° y choca con una pared en B. Si BC mide 3 m, ¿cuál es la distancia recorrida por la bala?



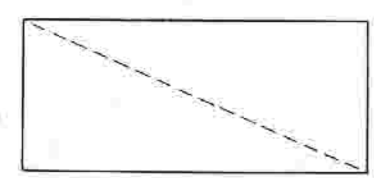
e) Una carretera forma un ángulo de 5° con la horizontal. ¿Cuál es la distancia PR recorrida por la carreta, si $\overline{RQ}$ mide 8 m?



f) En un hexágono regular, el apotema $\overline{OB}$ mide 7.5 m, encuentre la medida de AC. (Tenga en cuenta que el AOC mide 60° y que $\angle AOB = \angle BOC$.)

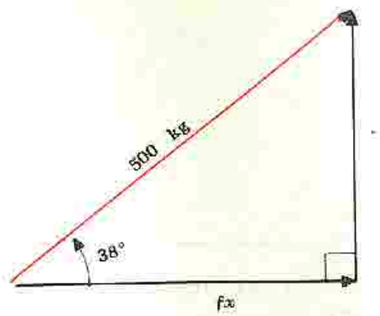


g) Si tenemos un rectángulo de 9 m por 4 m, ¿cuál es la medida del ángulo formado por la diagonal y el lado mayor?

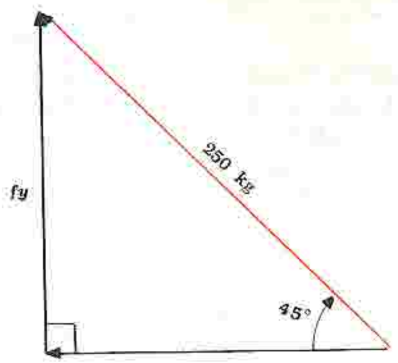


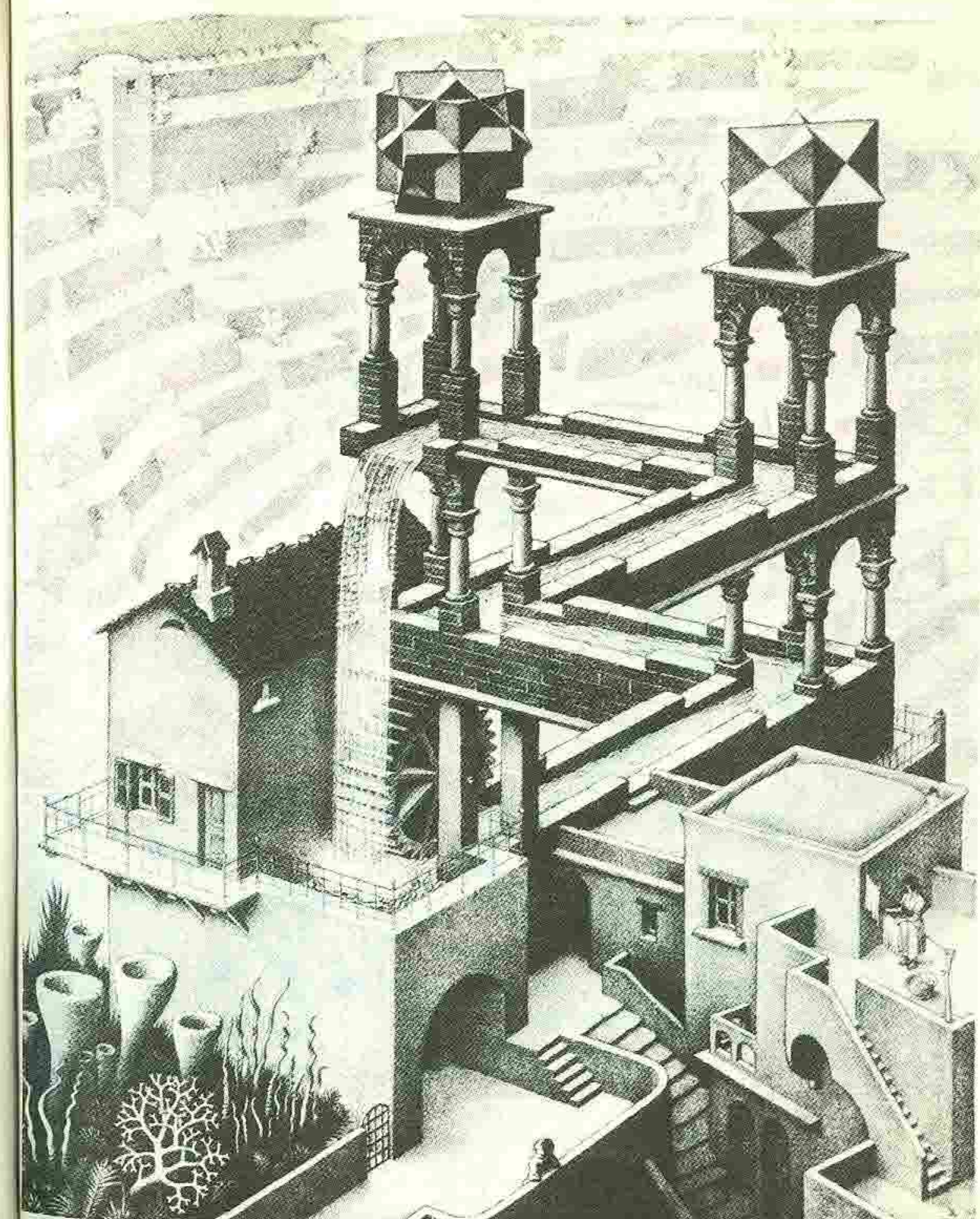
h) Un triángulo equilátero mide 15 m por lado. Encuentre la medida de la altura.

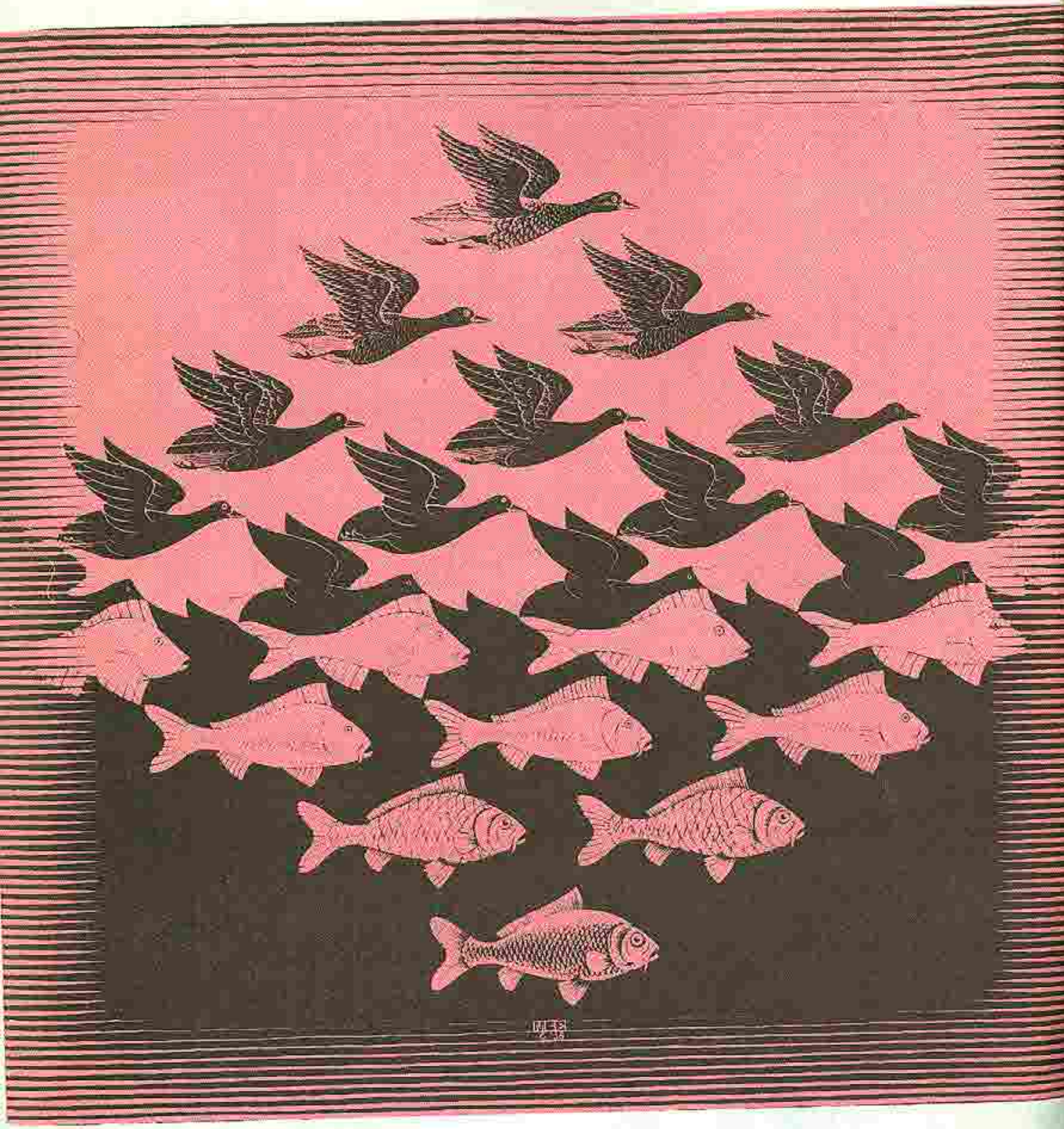
i) Una fuerza f de 500 kg forma un ángulo de 38° con la horizontal. Encuentre la componente horizontal fx de la fuerza.



j) Una fuerza T de 250 kg forma un ángulo de 45° con la horizontal. Encuentre la componente vertical fy de la fuerza.







SEPTIMA UNIDAD

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

1. ESTADISTICA

Un problema de muestreo

En cierta población un doctor observa que en varios de sus pacientes se presentan enfermedades causadas por un exceso de calcio en la sangre. El Dr. Ibarra que es un investigador muy competente, sabe que en una población el número de personas con un exceso de calcio en la sangre* es generalmente menos del 5%. Sin embargo, él sospecha que en este caso mucho más del 5% de los habitantes tiene un exceso de calcio en la sangre.

La única manera de comprobar su sospecha es realizando una investigación. Practicar un análisis a todos los habitantes de esa población sería muy costoso y requeriría mucho tiempo, de manera que Ibarra toma como muestra 50 habitantes al azar y practica en ellos el análisis correspondiente, resultando los siguientes datos:

10.5	9.3	13.2	9.3	11.9	9.2	9.9	8.6	10.9	12.1
11.2	9.9	11.0	7.7	10.8	7.5	9.4	9.5	9.8	8.8
11.1	8.7	10.4	8.2	10.7	9.9	8.6	10.0	9.2	9.7
10.4	10.2	9.6	8.7	11.6	10.5	10.0	10.2	9.8	10.6
9.8	12.6	9.0	9.5	11.4	11.3	10.6	10.3	10.9	11.8

Estos datos corresponden a miligramos de calcio por cada 100 mililitros de sangre.

* Se considera que una persona tiene exceso de calcio en la sangre si tiene más de 11.5 miligramos por 100 mililitros.

Ibarra sabe que cuando una persona dispone de un conjunto de datos, generalmente puede apreciarlos mejor si los clasifica y, mejor aún, si los representa gráficamente.

Es por eso que primero ordena los datos correspondientes a las 50 personas elegidas:

7.5	7.7	8.2	8.6	8.6	8.7	8.7	8.8	9.0	9.2
9.2	9.3	9.3	9.4	9.5	9.5	9.6	9.7	9.8	9.8
9.8	9.9	9.9	9.9	10.0	10.0	10.2	10.2	10.3	10.4
10.4	10.5	10.5	10.6	10.6	10.7	10.8	10.9	10.9	11.0
11.1	11.2	11.3	11.4	11.6	11.8	11.9	12.1	12.6	13.2

Después procede a clasificarlos observando cuántos están comprendidos entre 7.4 y 7.9, cuántos están comprendidos entre 8.0 y 8.5, etc., y los dispone en una tabla como la siguiente:

INTERVALO	FRECUENCIA
7.4 — 7.9	2
8.0 — 8.5	1
8.6 — 9.1	
9.2 — 9.7	
9.8 — 10.3	
10.4 — 10.9	
11.0 — 11.5	
11.6 — 12.1	
12.2 — 12.7	
12.8 — 13.3	

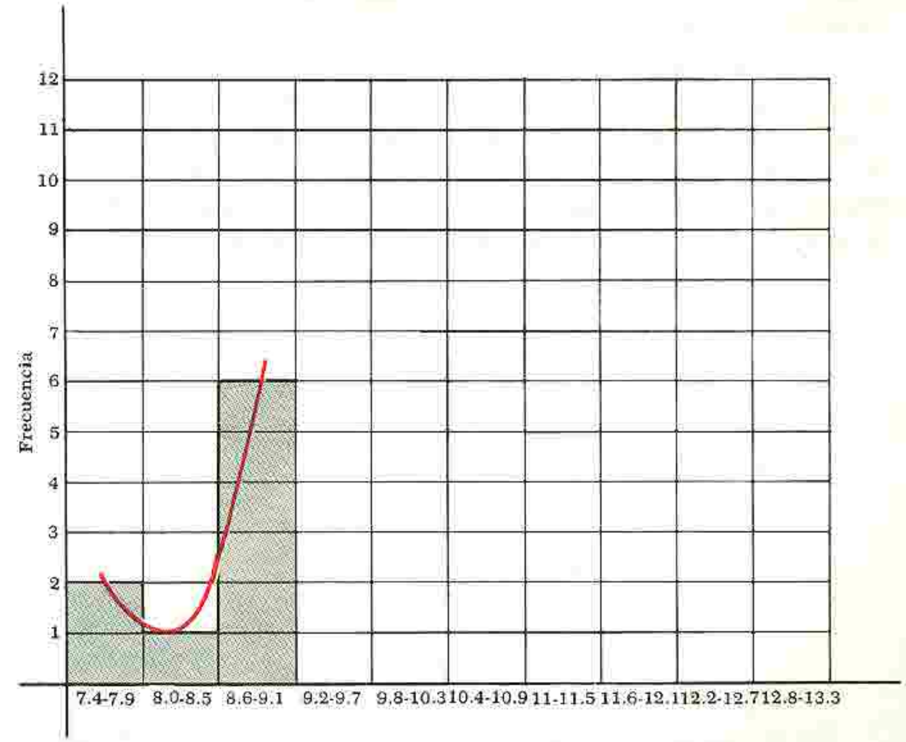
(Recuerde usted que tablas como ésta reciben el nombre de *tablas de frecuencia.*)

Observe que hay 2 datos entre 7.4 y 7.9 inclusive. Por eso se anota el 2 a continuación del intervalo 7.4 — 7.9.

Hay 1 dato entre 8.0 y 8.5 inclusive. Por eso se escribe 1 a continuación del intervalo 8.5 — 8.5.

Ejercicio 1. Complete la tabla anterior.

Ejercicio 2. Con los datos de la tabla anterior, complete el siguiente diagrama de frecuencias.



Miligramos de calcio por cada 100 mililitros de sangre

Ejercicio 3. De acuerdo con el diagrama anterior, conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas personas tienen más de 9.1 miligramos de calcio por 100 mililitros de sangre?

b) ¿Cuántas personas tienen en la sangre entre 9.2 y 12.1 miligramos de calcio por 100 mililitros de sangre?

c) ¿Cuántas personas tienen menos de 10.4 miligramos de calcio por 100 mililitros de sangre?

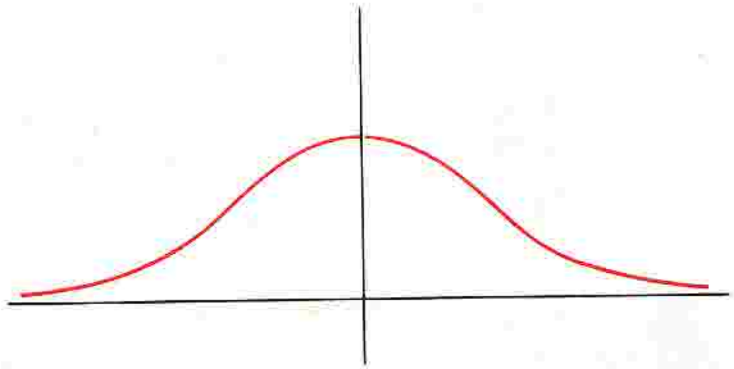
d) ¿Qué tanto por ciento de las 50 personas tienen menos de 9.8 miligramos?

e) ¿Qué tanto por ciento de las 50 personas tienen más de 11.5 miligramos?

f) ¿Era acertada la sospecha del Dr. Ibarra?

Algunos grupos de datos y su representación mediante curvas de frecuencia

Usted seguramente recordará que en el primer curso mencionamos que si en un diagrama de frecuencias trazamos una curva que pase por los puntos medios de la parte superior de cada rectángulo, obtenemos lo que se llama una curva de frecuencia. También mencionamos que los datos correspondientes a muchos fenómenos o situaciones dan lugar a una curva como la que se muestra.



Esta curva es llamada curva normal o curva de Gauss

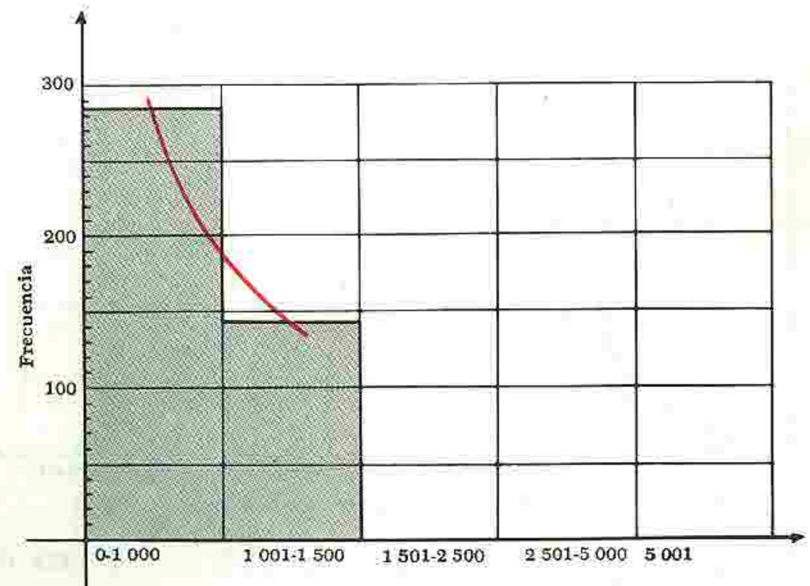
En los siguientes ejercicios, donde usted construirá la curva de frecuencia de algunos conjuntos de datos, observará que en algunos casos la curva construida se parece mucho a la curva normal. En otros casos usted observará que a diferencia de la curva normal que es simétrica, la curva resultante es asimétrica. Esta asimetría es característica de algunos fenómenos o situaciones.

Ejercicio 4. En cada inciso aparece una tabla de frecuencias de cierto grupo de datos; trace el diagrama y curva de frecuencias correspondientes.

a) Los datos corresponden a los sueldos mensuales de 584 personas autodidactas que solicitaron inscripción a Secundaria Abierta.

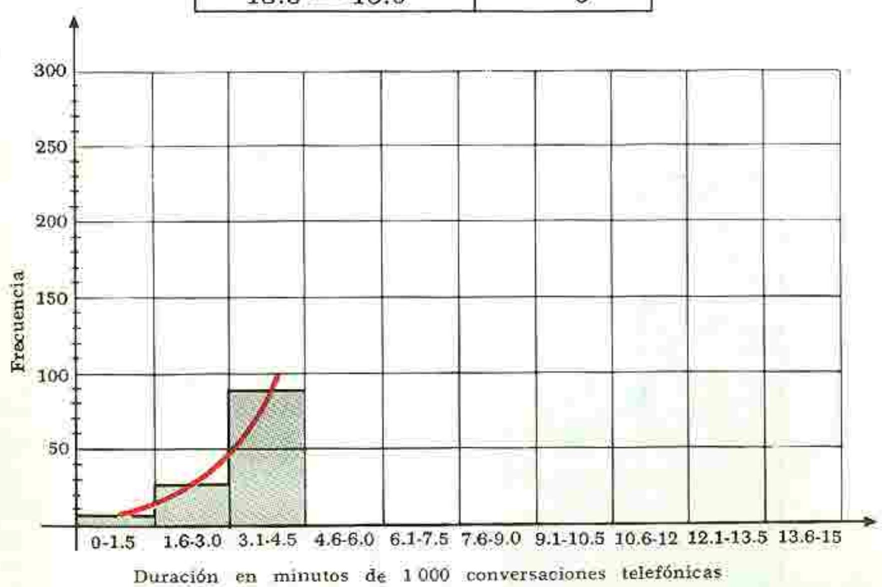
INGRESO MENSUAL	FRECUENCIA
0 — $1 000	285
$1 000 — $1 500	143
$1 500 — $ 2 500	121
$2 500 — $5 000	35
$5 000 — 0 más	5

(Datos reales)



b) Los datos corresponden a la duración en minutos de 1 000 conversaciones telefónicas.

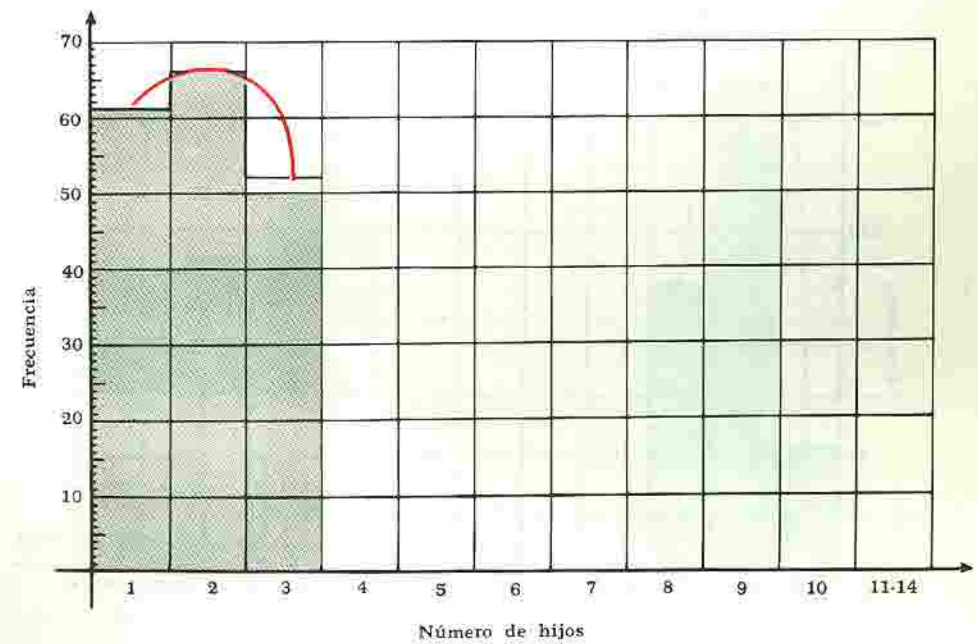
DURACION EN MINUTOS	FRECUENCIA
0 — 1.5	6
1.6 — 3.0	28
3.1 — 4.5	88
4.6 — 6.0	180
6.1 — 7.5	247
7.6 — 9.0	260
9.1 — 10.5	133
10.6 — 12.0	42
12.1 — 13.5	11
13.6 — 15.0	5



c) Los datos corresponden al número de hijos en cada una de 318 familias.

No. DE HIJOS	FRECUENCIA
1	61
2	66
3	52
4	40
5	36
6	27
7	9
8	12
9	7
10	4
11 — 14	4

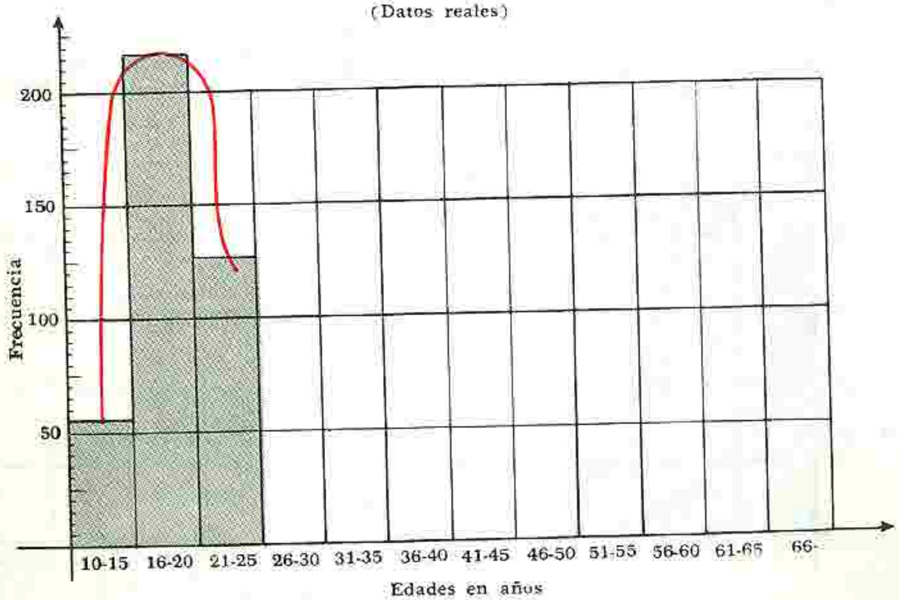
(Datos reales)



d) Los datos corresponden a las edades en años de 663 personas solicitantes de inscripción a Secundaria Abierta.

INTERVALO	FRECUENCIA
10 — 15	55
16 — 20	217
21 — 25	126
26 — 30	95
31 — 35	71
36 — 40	50
41 — 45	22
46 — 50	16
51 — 55	4
56 — 60	2
61 — 65	1
65 —	4

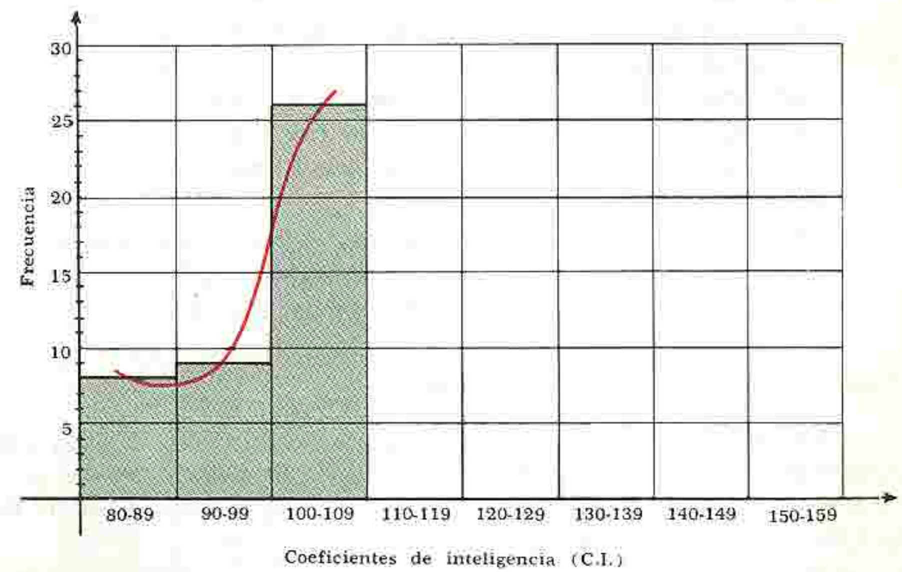
(Datos reales)



e) Los datos corresponden a |C.I.| (coeficiente intelectual) de 110 estudiantes tomados al azar de una escuela preparatoria.

INTERVALO	FRECUENCIA
80 — 89	8
90 — 99	9
100 — 109	26
110 — 119	30
120 — 129	18
130 — 139	12
140 — 149	5
150 — 159	2

(Datos reales)



Ejercicio 5. Conteste las siguientes preguntas en relación a las curvas trazadas en el ejercicio anterior.

a) ¿Cuál o cuáles de las curvas anteriores considera usted que se aproxima más a la curva normal?

b) ¿Cuál o cuáles curvas considera usted que difieren más de la curva normal?

c) ¿Cuáles curvas son más o menos simétricas?

d) ¿Considera usted que después de trazar la curva del inciso a) tiene una mejor idea sobre los sueldos de las 584 personas?

e) Si usted trazara una curva de frecuencias sobre los sueldos de 1 000 personas, ¿piensa que esta curva será parecida a la curva mencionada en el inciso anterior?

f) ¿Piensa usted que una curva de frecuencias sobre el peso en kilogramos de los alumnos de una escuela secundaria sea parecida a la curva normal de frecuencias?

g) Imagine que traza una curva de frecuencias sobre el número de hijos de 1 200 familias. ¿Cree usted que esta curva se asemeje a la curva normal de frecuencias?

h) Si usted trazara una curva de frecuencias correspondiente a las duraciones en segundos de 2 500 llamadas telefónicas, ¿cree usted que esta curva sea más o menos simétrica?

i) ¿Considera usted que la acentuada asimetría de la curva de frecuencias sobre edades en años de 663 personas (solicitantes de inscripción a Secundaria Abierta) se debe a características particulares de esa población, o bien considera usted que en general, las curvas de frecuencias sobre edades son asimétricas? Discuta su respuesta con sus compañeros y maestro.

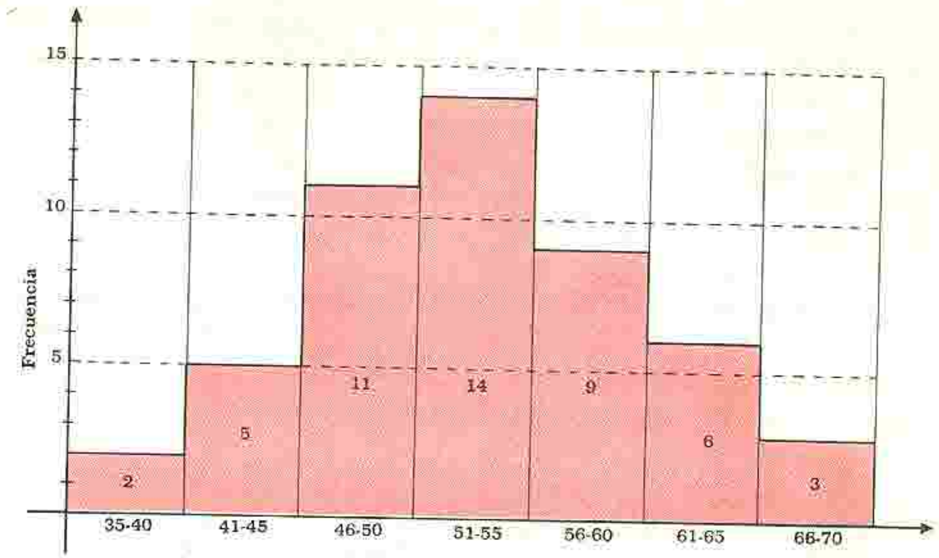
j) Imagine que usted observa el diagrama de frecuencias de los sueldos de 1 300 obreros de una fábrica. ¿Piensa que esta curva se parezca a la del inciso a) del ejercicio anterior?

Diagrama de frecuencias acumuladas

En algunas ocasiones como veremos posteriormente es muy útil presentar un conjunto de datos por medio de una curva de frecuencias acumuladas. Generalmente esta curva se construye a partir de una tabla o diagrama de frecuencias.

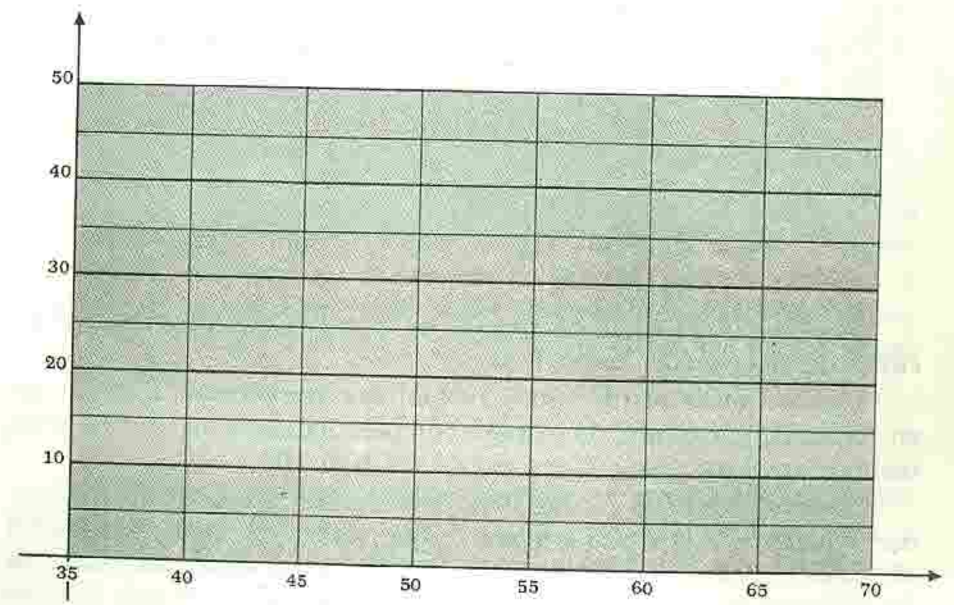
A continuación ilustramos este procedimiento. Consideremos para ello el diagrama de frecuencias de la pág. 251

Primero trazamos dos ejes cartesianos. Después observamos en la tabla o diagrama entre qué valores están comprendidos los datos; en este caso entre 35 y 70 kg. Con estos valores como extremos cons-



Pesos en kilogramos de 50 personas

truimos una escala en el eje horizontal. El número de datos, en este caso 50, determina la escala que se construirá sobre el eje vertical, tal como se muestra en la siguiente figura.

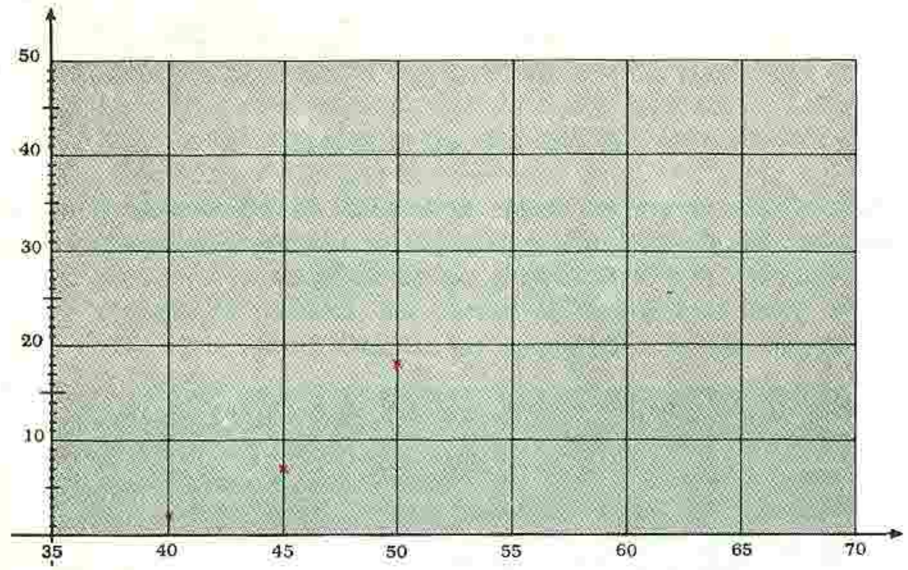


Ahora localizamos algunos puntos de la siguiente manera: tomamos como abscisa el mayor valor de cada intervalo y como ordenada la suma de la frecuencia de ese intervalo y de las frecuencias de los intervalos anteriores.

De acuerdo con esto tenemos que en este ejemplo el primer punto es (40, 2), el siguiente es (45, 7). Observe usted que la ordenada 7 es la suma de 5 (frecuencia de ese intervalo) y 2 (frecuencia del intervalo anterior).

Un tercer punto es (50,18); 18 es la suma de 11 (frecuencia de ese intervalo) y de 5 y 2 (frecuencias de los intervalos anteriores).

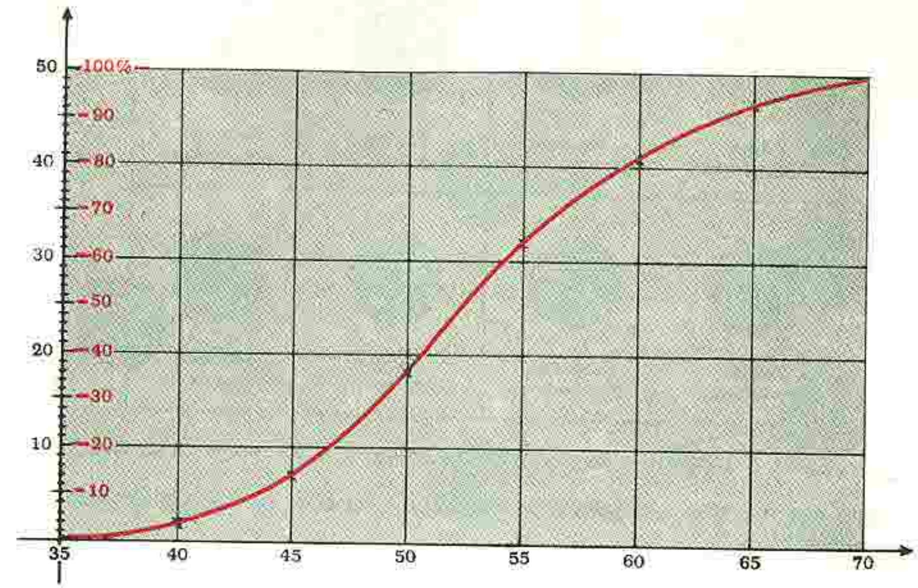
Ejercicio 6. Localice los puntos correspondientes a cada intervalo y trace por estos puntos una curva.



Esta curva que usted ha trazado es la curva que denominaremos curva de frecuencias acumuladas.

Algunas veces resulta útil expresar las frecuencias acumuladas en forma de por ciento, de manera que para localizar los puntos construimos en el eje vertical una escala del 0 al 100.

Observe usted que con un diagrama de este tipo podemos responder rápidamente preguntas como: ¿qué tanto por ciento de los 50 alumnos tienen un peso menor de 55 kg? o ¿qué tanto por ciento de los alumnos tienen un peso entre 55 y 65 kg, etc.



Ejercicio 7. Construya usted curvas de frecuencia acumulada para los datos de los ejercicios 2 y 4.

¿Encuentra usted alguna diferencia o semejanza entre estas curvas? Discuta esto con su maestro.

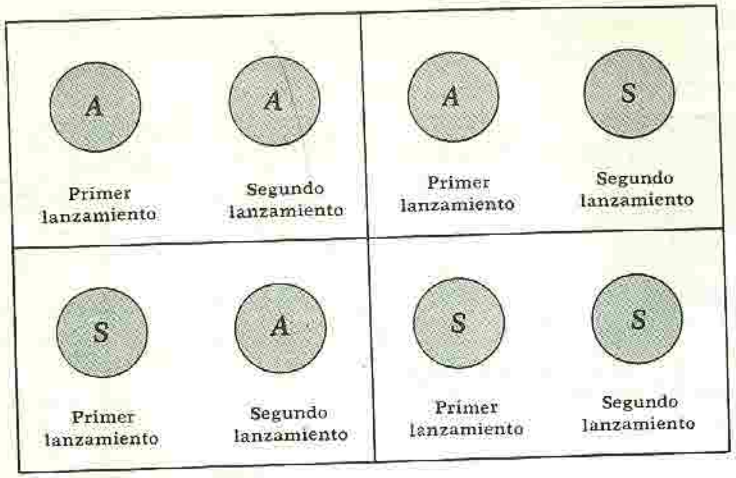
2. CONCEPTOS BASICOS DE PROBABILIDAD

Consideramos que usted ya está familiarizado con términos como probabilidad, experimento al azar, espacio muestra, evento, resultados posibles, etc. Aún en el caso de no ser así, con los ejemplos y ejercicios de esta sección usted podrá recordar los conceptos básicos sobre probabilidad y continuar sin dificultad el estudio de los temas de este curso.

Probabilidad

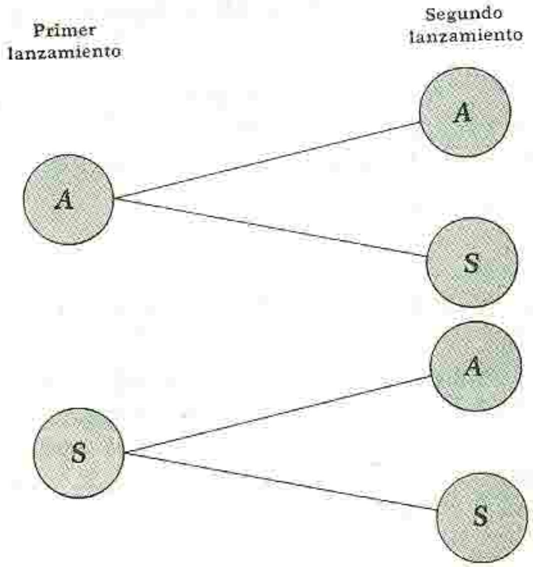
Iniciaremos este breve repaso tomando en cuenta los resultados posibles del experimento al azar de lanzar una moneda dos veces.

Una manera de ilustrar los resultados posibles de este experimento es la siguiente:

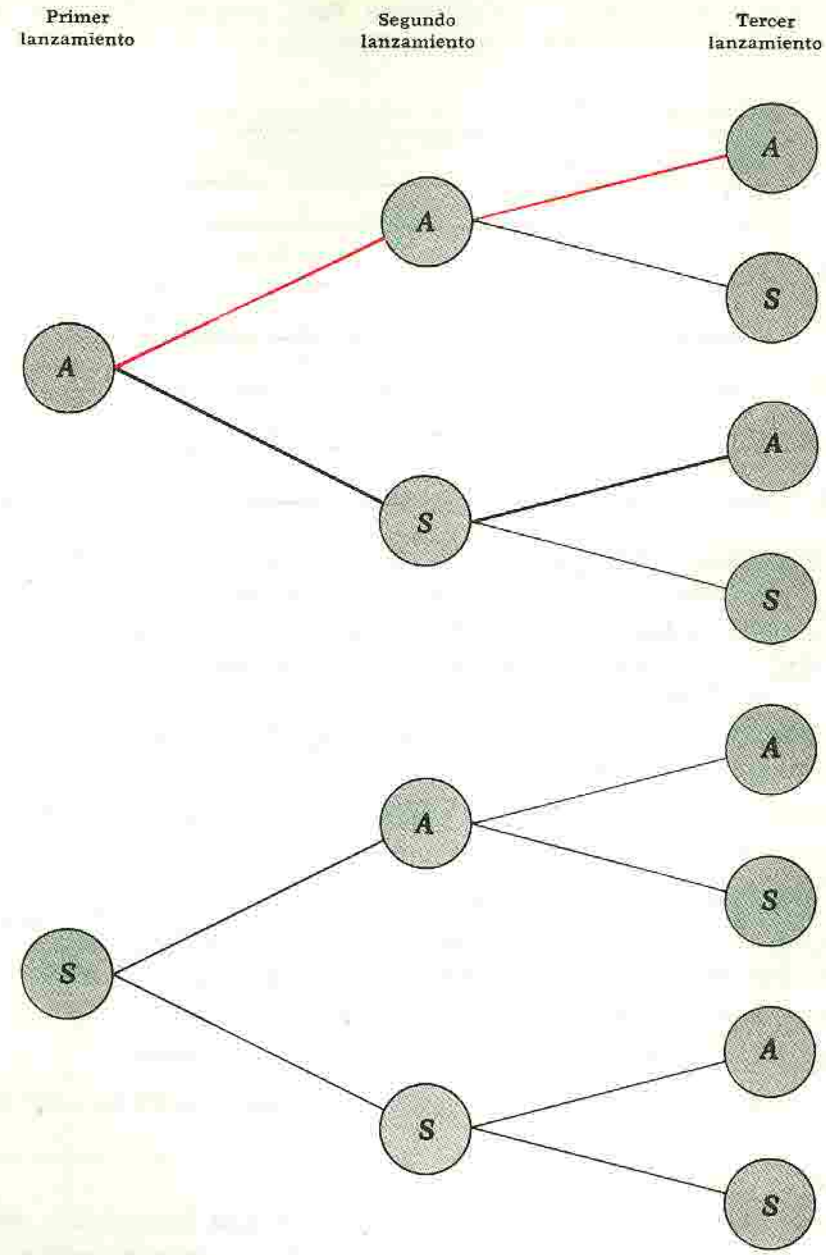


(La *A* y la *S* indican si la moneda cuya águila o sol respectivamente)

Otra forma que a veces resulta más cómoda es la siguiente:



Este tipo de diagramas (algunos autores los denominan de árbol) son a veces muy útiles para describir los resultados posibles de algunos experimentos al azar y tener una idea más clara sobre ellos. Por ejemplo, si consideramos el experimento al azar de lanzar una moneda 3 veces consecutivas, un diagrama como el que mostramos a continuación nos da una mejor idea del experimento.



Observe usted en este diagrama que las flechas rojas indican uno de los 8 resultados posibles, el resultado águila, águila, águila.

Ejercicio 8. Complete la siguiente lista, correspondiente a los resultados descritos en el diagrama anterior.

1. águila, águila, águila
2. águila, águila, sol
3. __________
4. __________
5. __________
6. __________
7. __________
8. __________

¿Considera usted que los ocho resultados anteriores son igualmente probables? Discuta la respuesta con su maestro.

Recuerde usted que, en cursos anteriores, encontramos la probabilidad de algunos eventos dividiendo el número de resultados favorables entre el número de resultados posibles (resultados posibles equiprobables). A la probabilidad así determinada, algunas veces la denominamos *probabilidad teórica*.

Ejercicio 9. En relación al experimento de lanzar una moneda 3 veces, encuentre las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad de obtener 3 águilas.
b) La probabilidad de obtener un sol.
c) La probabilidad de obtener al menos un sol.
d) La probabilidad de obtener dos águilas y un sol.
e) La probabilidad de obtener dos soles y un águila.

Sugerencia: Elabore un diagrama como en el ejemplo anterior.

Probabilidad frecuencial

Recordemos ahora el concepto de *probabilidad frecuencial*, estudiado en los cursos anteriores, por medio del siguiente experimento.

Provéase usted de una bolsa y cuatro canicas: dos rojas, una negra y una blanca. Revuelva usted perfectamente bien las canicas y,

sin ver, extraiga una, registre el color de la canica extraída por medio de una raya en el lugar correspondiente del siguiente cuadro:

COLOR	FRECUENCIA
rojo	~~////~~ /
negro	/
blanco	//

Repita el proceso 50 veces (devolviendo a la bolsa la canica extraída y revolviendo bien antes de sacar la siguiente).

Recuerde que la probabilidad frecuencial de un evento se determina dividiendo el número de veces que ocurrió el evento entre el número de veces que se realizó el experimento.

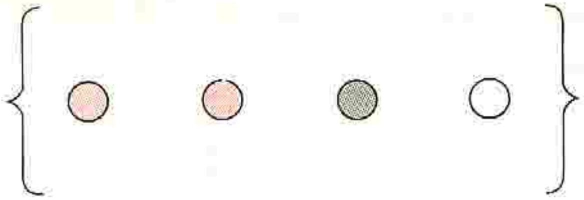
Por comodidad en el siguiente ejercicio designaremos con R, N y B a los eventos "sacar canica roja", "sacar canica negra" y "sacar canica blanca" y con $P(R)$, $P(N)$ y $P(B)$ respectivamente, a las probabilidades de estos eventos.

Ejercicio 10. Con los datos del cuadro anterior, complete el siguiente.

Evento	No. de veces que ocurrió el evento	No. de veces que se efectuó el experimento	Probabilidad frecuencial del evento
R			$P_f(R) =$
N			$P_f(N) =$
B			$P_f(B) =$

NOTA: Para distinguir la probabilidad frecuencial de la teórica, algunas veces emplearemos la letra f como subíndice de P.

Ejercicio 11. En relación al experimento anterior, obtenga las probabilidades teóricas de los eventos mencionados. (Sugerencia: puede ayudarse con el siguiente dibujo que ilustra el espacio muestra, o sea el conjunto de resultados posibles equiprobables.)



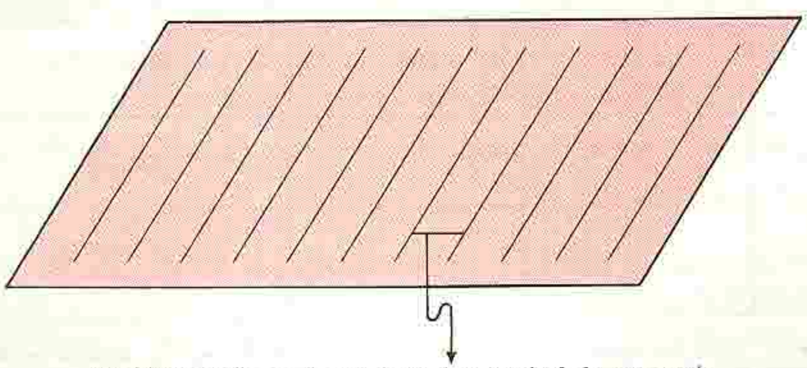
$P(R) =$ ⠀⠀ $P(N) =$ ⠀⠀ $P(B) =$

Compare estos resultados con los del ejercicio anterior y comente con su maestro sobre esta comparación.

Al realizar la comparación indicada, usted se dio cuenta de que, en este experimento al azar, la diferencia entre la probabilidad teórica de un evento y la probabilidad frecuencial del mismo, es pequeña.

Un ejemplo: el número π

La relación entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica se puede apreciar realizando el siguiente experimento: Sobre una cartulina trace rectas paralelas de manera que la distancia entre ellas sea igual a la longitud de una aguja, tal como se muestra en la ilustración.



Separación entre las rectas igual a la longitud de una aguja

Posteriormente deje caer la aguja sobre la cartulina desde una altura de 40 o 50 cm (procurando que la aguja rebote un poco pero que caiga sobre la cartulina) y observe si "corta" alguna de las rectas paralelas trazadas. Realizando el experimento 20, 50 y 100 veces usted puede completar los siguientes cuadros.

No. de veces que se deja caer la aguja	No. de veces que la aguja corta alguna paralela	Probabilidad frecuencial P_f del evento: "cortar alguna paralela"

No. de veces que se deja caer la aguja	No. de veces que la aguja corta alguna paralela	Probabilidad frecuencial P_f del evento: "cortar alguna paralela"

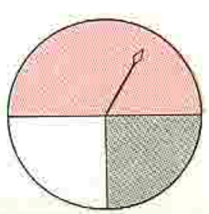
Núm. de veces que se deja caer la aguja	Núm. de veces que la aguja corta alguna paralela	Probabilidad frecuencial P_f del evento: "cortar alguna paralela"
𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸		

En relación a este experimento de dejar caer la aguja sobre la cartulina, la probabilidad teórica del evento "cortar alguna paralela" es $\frac{2}{\pi}$. Esto se demuestra en cursos más avanzados. Es por eso que las probabilidades frecuenciales obtenidas al realizar el experimento 20, 50 y 100 veces son aproximaciones de $\frac{2}{\pi}$. Como usted puede observar, entre mayor número de veces se realiza el experimento se obtiene en general, una mejor aproximación de $\frac{2}{\pi}$.

Otro experimento

Otro experimento que también nos da idea de la relación entre la probabilidad frecuencial y la teórica es el siguiente.

Consideremos una carátula circular con sectores de color y una manecilla giratoria en el centro, tal como se muestra en la siguiente ilustración:



Si dispusiéramos de una carátula como ésta e hiciéramos girar la manecilla, podríamos considerar los eventos "caer en rojo", "caer en gris" y "caer en blanco" y calcular su probabilidad frecuencial. Encontraríamos que dicha probabilidad es, aproximadamente, igual al área del sector del color respectivo (considerando el área de la carátula como unidad).

Así pues, en este modelo, la probabilidad frecuencial de cada evento es:

$$P_f(R) = \frac{1}{2} \text{ (aproximadamente)}$$

$$P_f(B) = \frac{1}{4} \text{ (aproximadamente)}$$

$$P_f(G) = \frac{1}{4} \text{ (aproximadamente)}$$

De acuerdo con las consideraciones anteriores, parece natural aceptar que las probabilidades de los eventos mencionados son:

$$P(R) = \frac{1}{2}$$

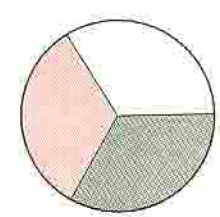
$$P(G) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

(Esto es efectivamente así, y la demostración se hace en cursos superiores).

Ejercicio 12. En relación al experimento al azar de hacer girar una manecilla sobre la carátula, obtenga en cada inciso la probabilidad indicada. (Las letras R, G y B denotan a los eventos "caer en rojo", "caer en gris" y "caer en blanco", respectivamente).

a)

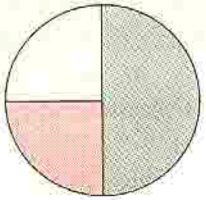


$P(R) =$

$P(G) =$

$P(B) =$

b)

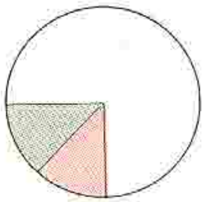


$P(R) =$

$P(G) =$

$P(B) =$

c)

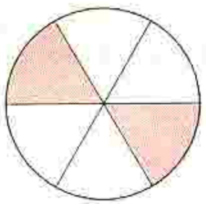


$P(R) =$

$P(G) =$

$P(B) =$

d)

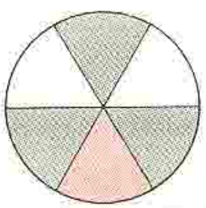


$P(R) =$

$P(G) =$

$P(B) =$

e)

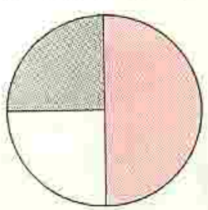


$P(R) =$

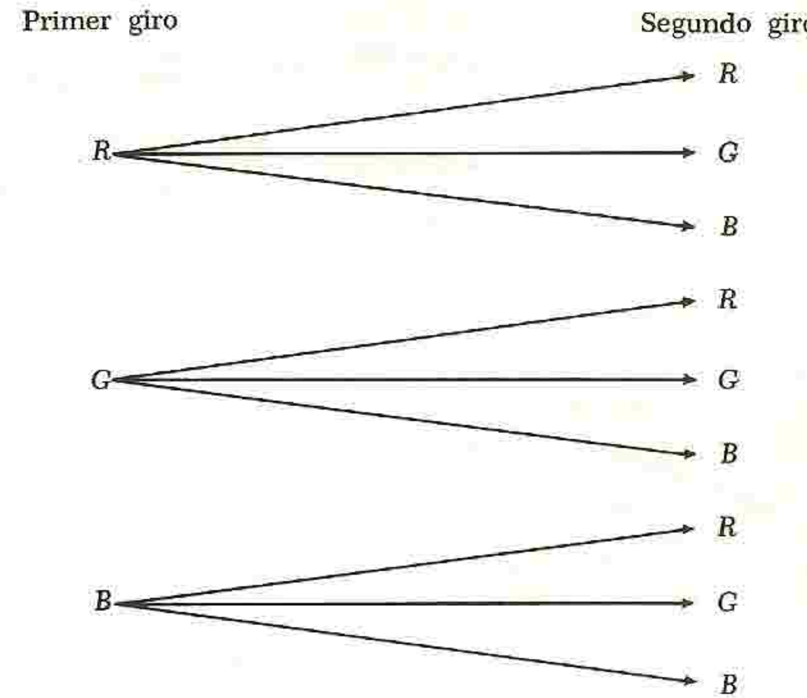
$P(G) =$

$P(B) =$

Consideremos ahora el experimento de hacer girar dos veces la manecilla sobre una carátula como la que se ilustra.

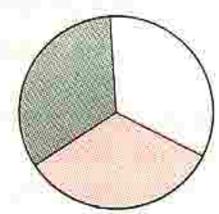


Podemos, en la forma acostumbrada, representar los eventos "caer en rojo", "caer en gris" y "caer en blanco" por medio de las letras R, G y B y determinar los resultados posibles con un diagrama. Esto es:

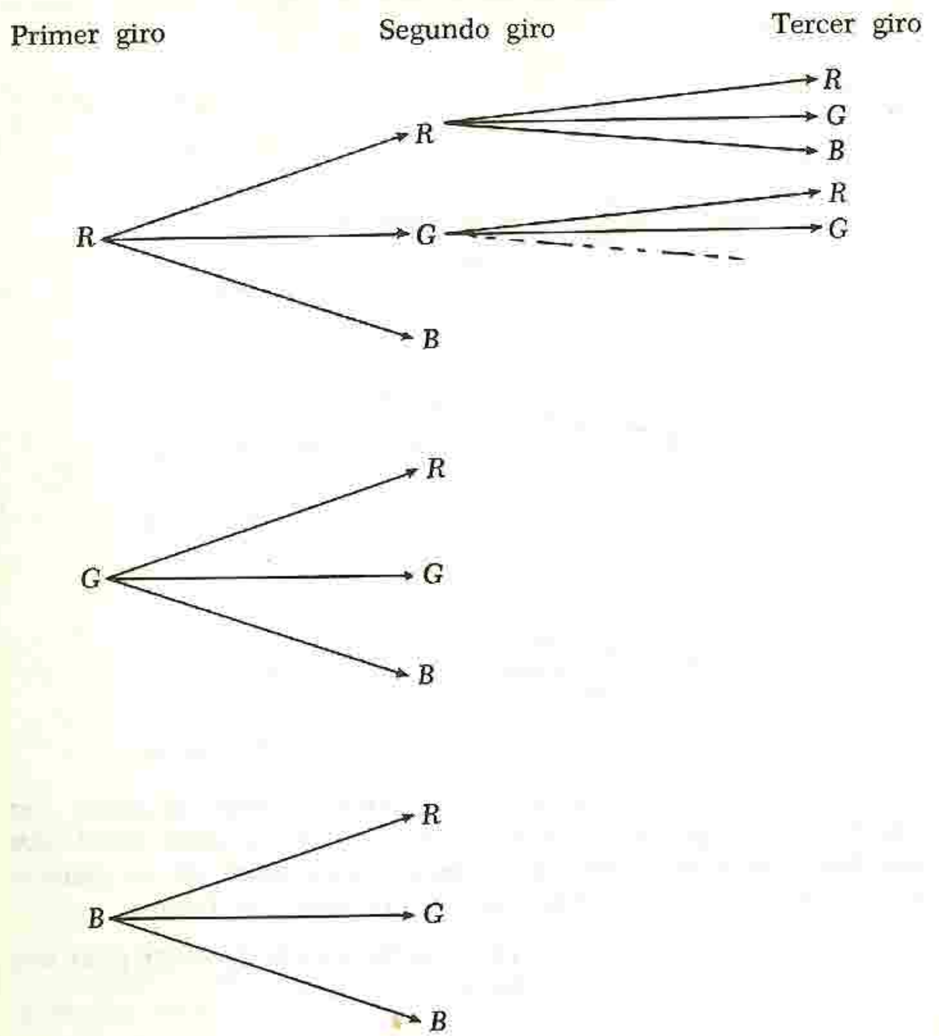


Ejercicio 13. En relación al diagrama anterior, ¿cuántos son los resultados posibles? ¿Puede usted decir si estos resultados son igualmente probables? Si no es así, con ayuda de su maestro determine la probabilidad de cada uno de estos resultados.

Ejercicio 14. Considere ahora el experimento de hacer girar tres veces la manecilla en la siguiente carátula.



De acuerdo con esto, complete el siguiente diagrama para determinar los resultados posibles.



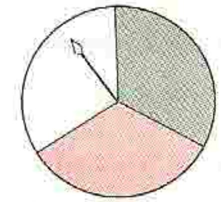
Conteste ahora las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos son los resultados posibles de acuerdo con el diagrama anterior?
b) ¿Son estos resultados igualmente probables?
c) ¿Cuál es la probabilidad del evento R, R, R?
d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener R en al menos un giro?

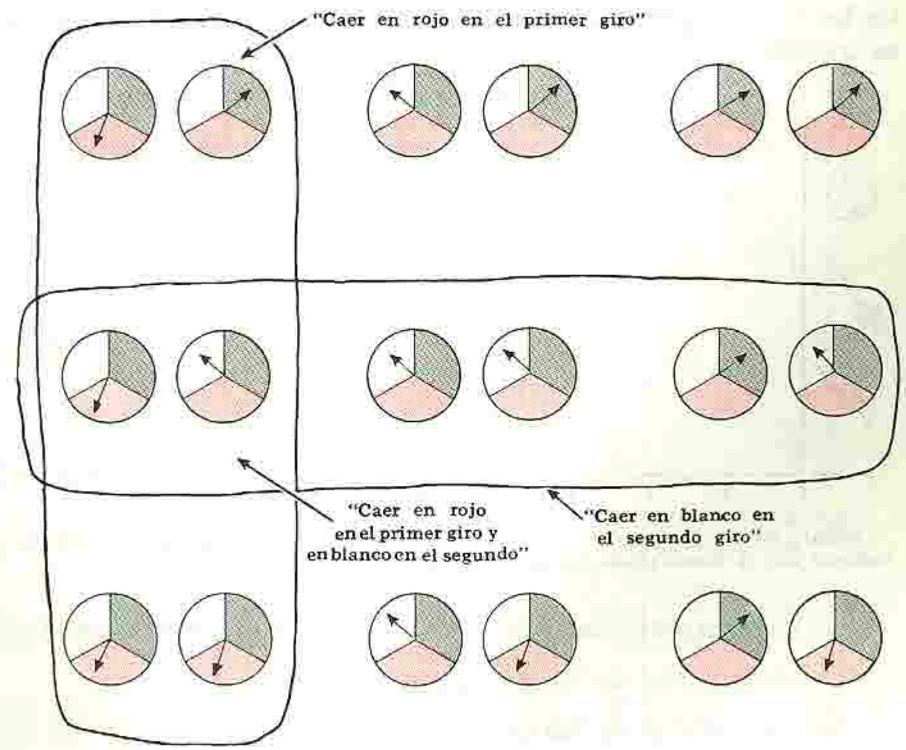
3. PROBABILIDAD DE LA INTERSECCION DE EVENTOS

Ya que los eventos son conjuntos, la intersección de dos eventos se forma con los elementos comunes a ambos eventos.

Por ejemplo, consideremos el siguiente experimento: supongamos que hacemos girar la manecilla de una carátula como la que se ilustra; registramos el resultado; hacemos girar nuevamente la manecilla y volvemos a registrar el resultado.



En relación a este experimento deseamos obtener la probabilidad del evento "caer en rojo en el primer giro" y del evento "caer en blanco en el segundo giro". También deseamos obtener la probabilidad



de la intersección de estos eventos o sea "caer en rojo en el primer giro y caer en blanco en el segundo giro".

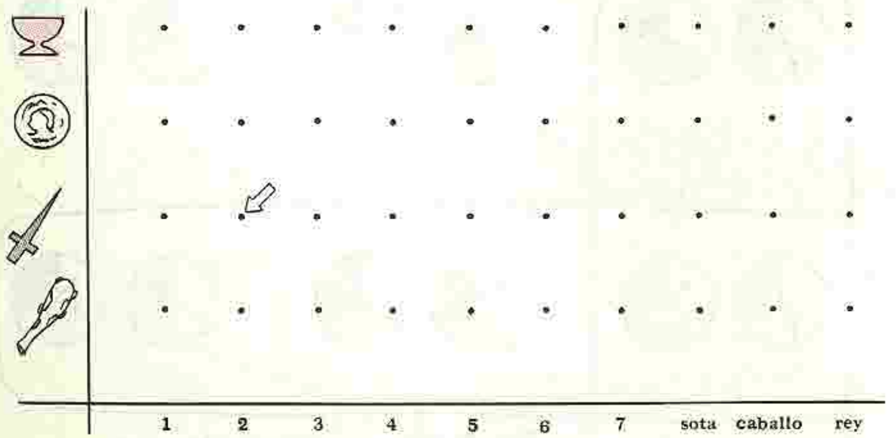
La obtención de estas probabilidades y la intersección de estos eventos se aprecia claramente en el diagrama anterior en donde se ilustran todos los casos posibles.

En cada resultado el círculo de la izquierda representa el primer giro y el de la derecha el segundo giro.

La probabilidad de "caer en rojo en el primer giro" es 3/9, ya que son 3 los resultados favorables y 9 los resultados posibles. La probabilidad de "caer en blanco en el segundo giro es ____ ya que son ____ los resultados favorables y ____ los resultados posibles.

La probabilidad del evento "caer en rojo en el primer giro y blanco en el segundo" es 1/9 ya que hay un resultado favorable y ____ resultados posibles.

Ejercicio 15. De acuerdo con el experimento, en cada inciso ilustre los eventos que se mencionan y determine las probabilidades que se indican.



NOTA: En este diagrama cada punto representa una carta. En particular, el punto indicado con la flecha representa al 2 de espadas.

a) *Experimento*: sacar una carta al azar de una baraja española.

La probabilidad de "sacar espada" es $\boxed{10}$

La probabilidad de "sacar 4" es $\boxed{4}$

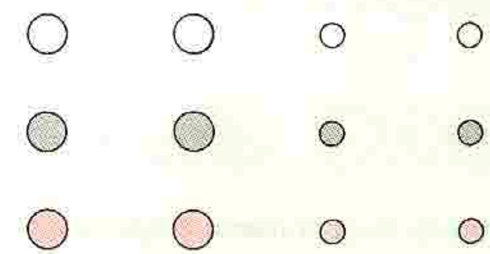
La probabilidad de "sacar espada y 4" es ____

La probabilidad de "sacar oro" es ____

La probabilidad de "sacar 7" es ____

La probabilidad de "sacar el 7 de oros" es ____

b) *Experimento*: De una bolsa con 12 canicas, como las que se ilustran, sin ver se extrae una.

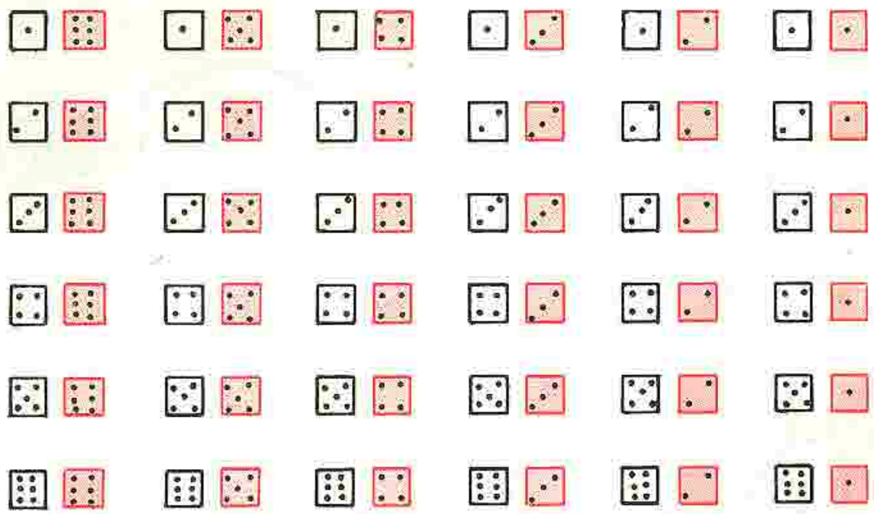


La probabilidad de "sacar canica roja" es ____

La probabilidad de "sacar canica grande" es ____

La probabilidad de "sacar canica roja y grande" es ____

c) *Experimento*: Se lanzan dos dados: uno blanco y uno de color rojo.

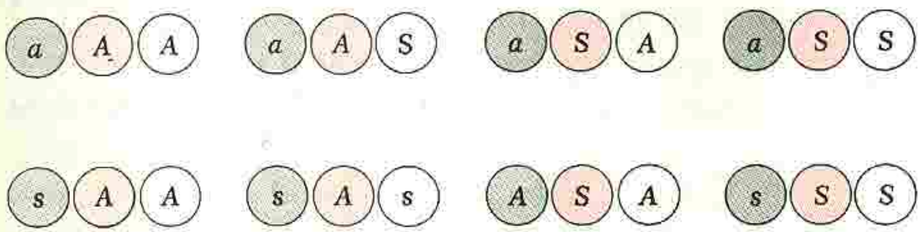


La probabilidad de "sacar más de 4" con el dado blanco es

La probabilidad de "sacar menos de 3" con el dado rojo es

La probabilidad de "sacar más de 4" con el dado blanco y menos de 3 con el dado rojo es

d) Se lanzan 3 monedas.



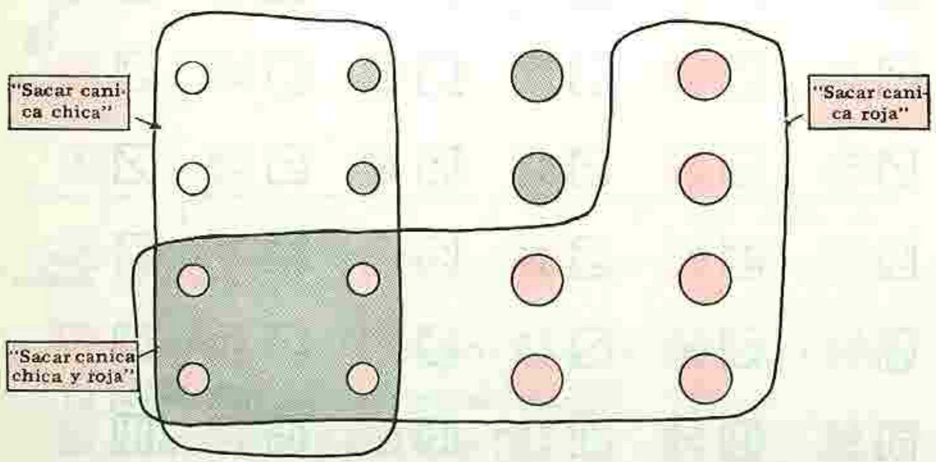
La probabilidad de sacar al menos 2 águilas es

La probabilidad de sacar al menos un sol es

La probabilidad de sacar al menos 2 águilas y al menos un sol es

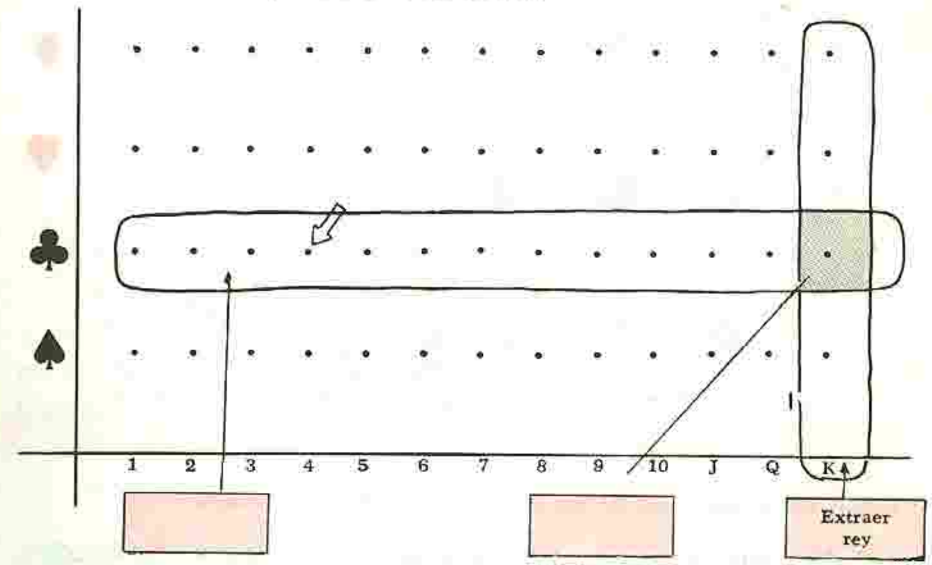
Ejercicio 16. En cada uno de los siguientes incisos están ilustrados algunos eventos en relación a un experimento al azar. Enuncie estos eventos tal como se hace en el inciso a).

a) *Experimento*: De una bolsa con 16 canicas, como las que se ilustran, sacar una.

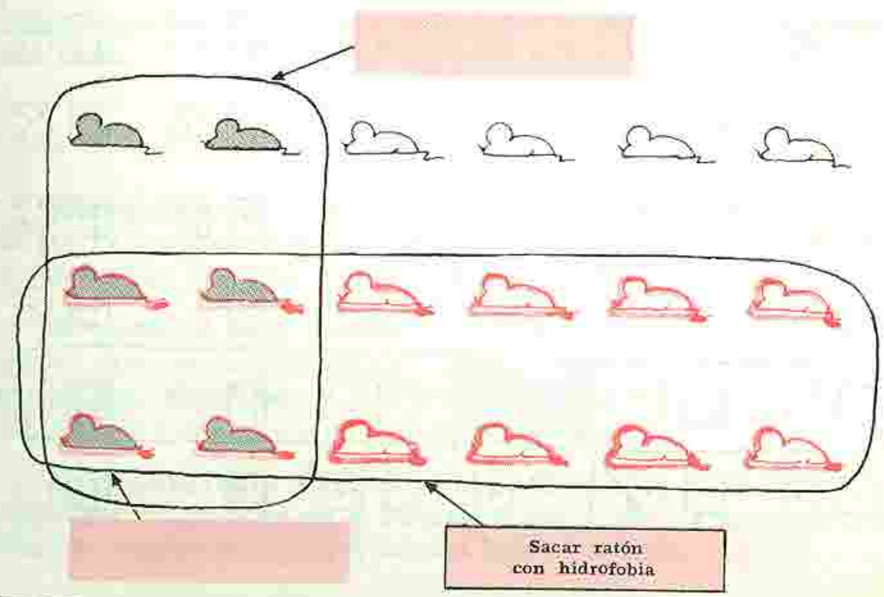


b) *Experimento*: De una baraja de 52 cartas, como las que se ilustran, extraer una.

NOTA: En este diagrama cada punto representa una carta, por ejemplo, el punto indicado con la flecha representa al 4 de tréboles.

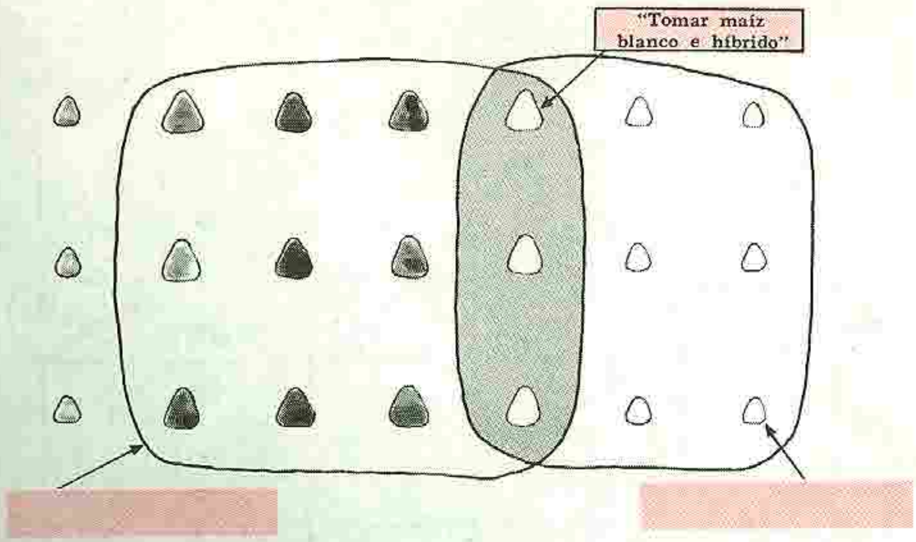


c) *Experimento*: De un conjunto de ratones blancos y grises como el que se ilustra, se toma uno al azar.



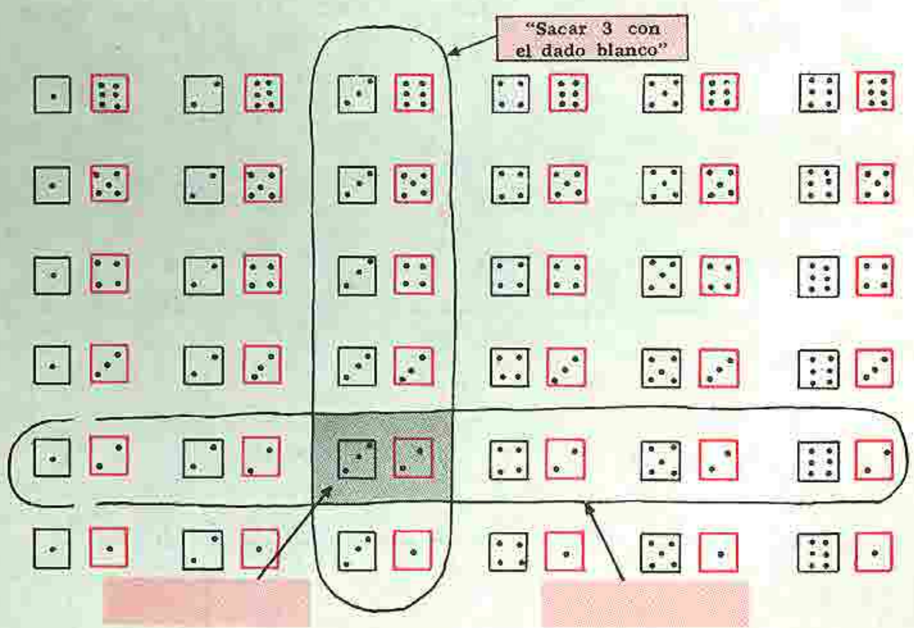
NOTA: El contorno de color en algunos ratones indica que tienen hidrofobia.

d) *Experimento*: Del conjunto de maíces que se ilustra se toma uno al azar.



NOTA: En la ilustración, los maíces híbridos son de mayor tamaño.

e) *Experimento*: Se lanzan dos dados, uno blanco y uno de color.



Si llamamos A al evento "sacar 3 con el dado blanco" y llamamos B al evento "sacar 5 con el dado rojo", $A \cap B$ es el evento "sacar 3 con el dado blanco y 5 con el dado rojo". Entonces tenemos

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Ejercicio 17. Utilizando una notación como la anterior encuentre las probabilidades de los eventos en cada uno de los incisos del ejercicio anterior (como se hizo en el inciso e)).

4. PROBABILIDAD DE LA UNION DE EVENTOS

En los cursos anteriores hemos visto que cuando queremos determinar la probabilidad de la unión de dos eventos A y B, se pueden presentar dos casos: primero, que los conjuntos A y B sean ajenos, segundo que no lo sean. Ilustremos con dos sencillos ejemplos estos dos casos.

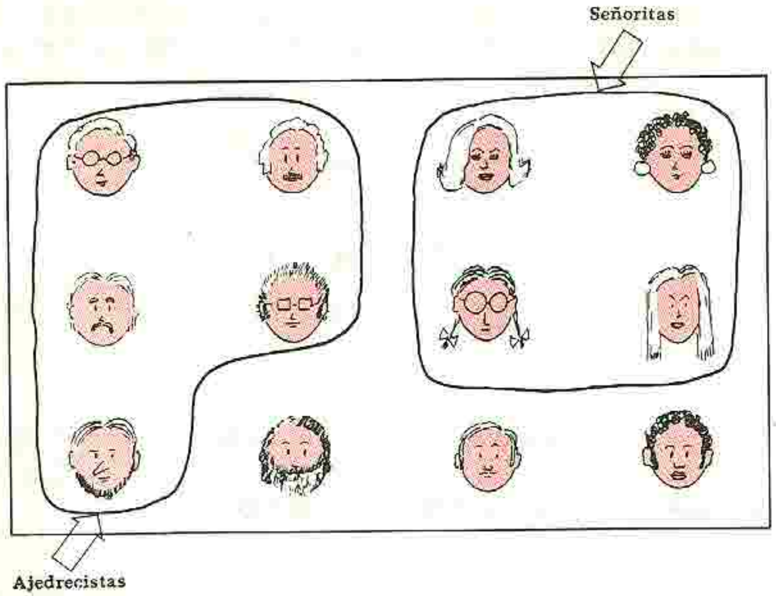
Caso de eventos ajenos

Supongamos que en una escuela el cuadro de honor está formado por 12 alumnos. A este cuadro de honor pertenecen 5 ajedrecistas y 4 señoritas. Tal como se muestra en la ilustración de la Pág. 271

Si queremos saber, al elegir al azar un alumno del cuadro de honor, cuál es la probabilidad de que resulte una señorita o un ajedrecista, simplemente contamos el número de ajedrecistas, en este caso 5 y el número de damas en este caso 4.

La suma de estos números, es decir 9, son los casos favorables, como hay 12 alumnos en el cuadro de honor son 12 los casos posibles, de manera que la probabilidad pedida es 9/12.

CUADRO DE HONOR



Si llamamos A al evento "elegir una señorita", B al evento "elegir un ajedrecista" y $A \cup B$ al evento "elegir una señorita o un ajedrecista" tenemos

$$P(A \cup B) = \frac{9}{12}$$

Además, también podemos observar que

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

y que

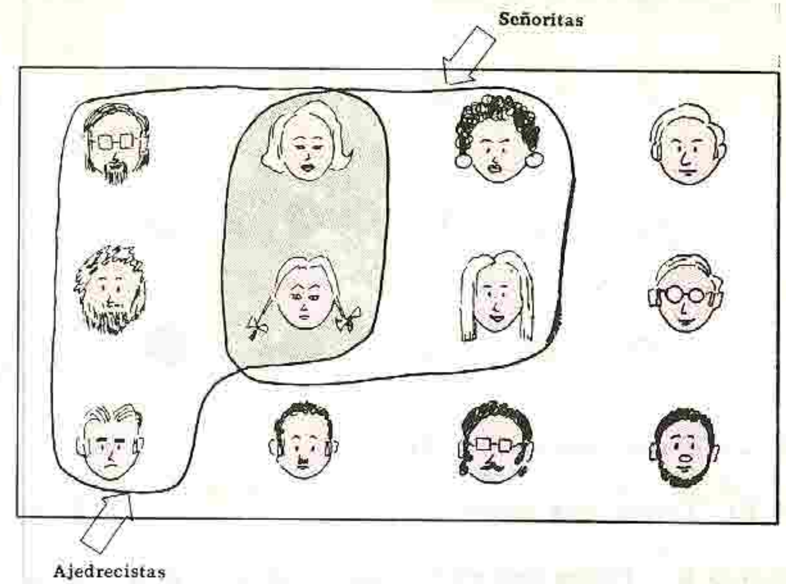
$$P(B) = \frac{4}{12}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Caso general

Supongamos, como en el caso anterior, un cuadro de honor formado por 12 alumnos. A este cuadro también pertenecen 5 ajedrecistas y 4 señoritas, sólo que ahora hay 2 señoritas que son ajedrecistas, como se muestra en la ilustración. Llamemos A al evento "elegir una señorita" y B al evento "elegir un ajedrecista".

CUADRO DE HONOR



Queremos saber, al elegir al azar un alumno del cuadro de honor, cuál es la probabilidad de que resulte una señorita o un ajedrecista. Es decir, queremos obtener $P(A \cup B)$.

No podemos ahora sumar el número de señoritas y el número de ajedrecistas y decir que 9 son los casos favorables, ya que observando la ilustración nos damos cuenta de que los casos favorables son 7. Observe que en este caso no se verifica la fórmula

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

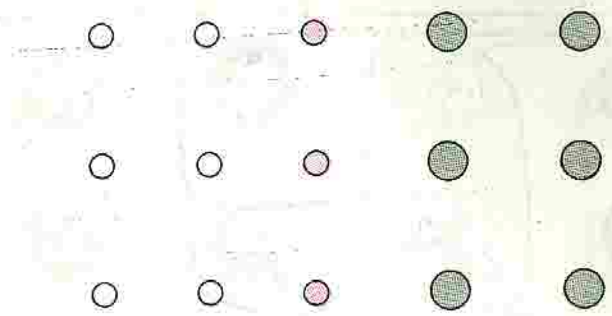
(sólo cierta cuando A y B son ajenos).

En cambio se verifica la fórmula

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejercicio 18. De acuerdo con el experimento de cada inciso, ilustre los eventos que se mencionan, determine las probabilidades que se piden y compruebe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ sólo cuando A y B son ajenos.

a) *Experimento*: De un conjunto de canicas como el que se ilustra, se toma una al azar.

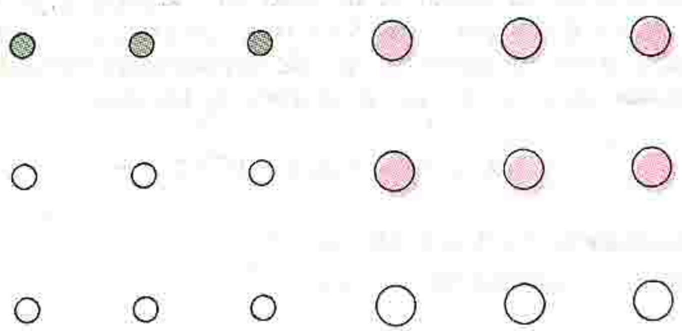


Evento A: "Tomar una canica roja" $P(A) =$

Evento B: "Tomar una canica gris" $P(B) =$

Evento $A \cup B$: "Tomar una canica roja o gris" $P(A \cup B) =$

b) *Experimento*: De un conjunto de canicas como el que se ilustra, se toma una al azar.

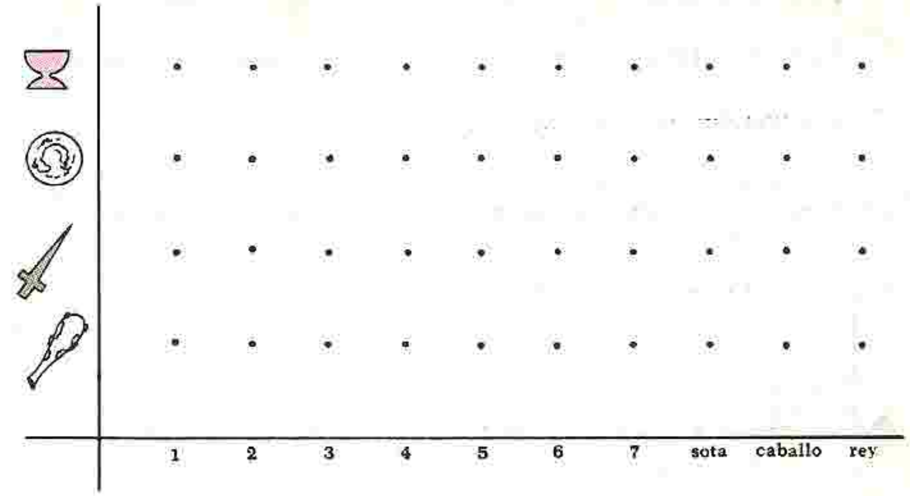


Evento A: "Tomar canica grande" $P(A) =$

Evento B: "Tomar canica blanca" $P(B) =$

Evento $A \cup B$: "Tomar canica grande o blanca" $P(A \cup B) =$

c) *Experimento*: Sacar una carta al azar de una baraja española.

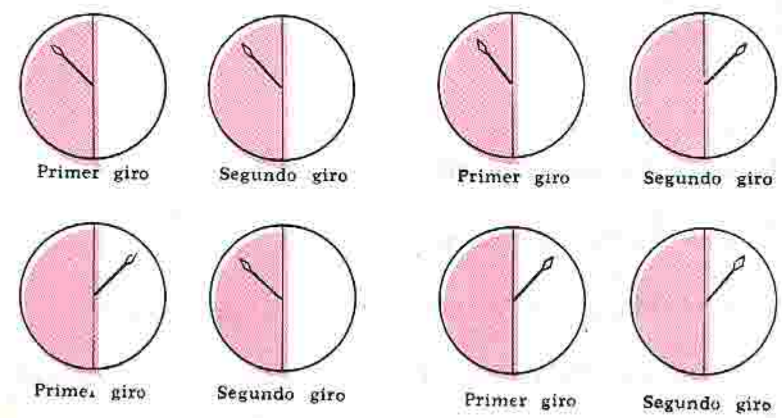


Evento A: "Sacar copa" $P(A) =$

Evento B: "Sacar rey" $P(B) =$

Evento $A \cup B$: "Sacar copa o rey" $P(A \cup B) =$

d) *Experimento*: Se hace girar 2 veces la manecilla de una carátula.

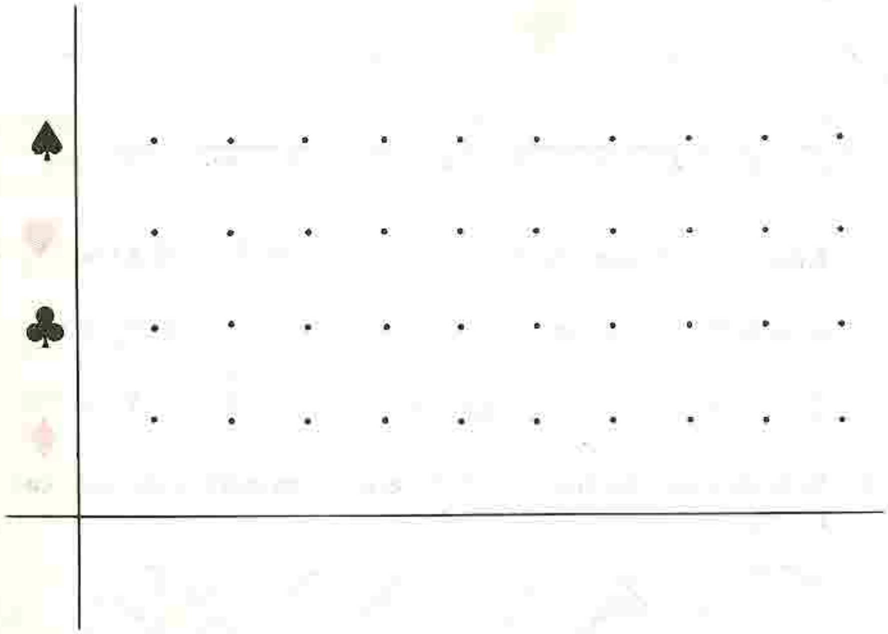


La probabilidad de "obtener rojo en el primer giro" es

La probabilidad de "obtener gris en el segundo giro" es

La probabilidad de "obtener rojo en el primer giro o gris en el segundo" es

e) *Experimento*: De una baraja americana se extrae una al azar.

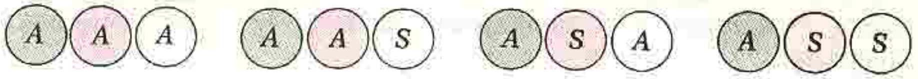


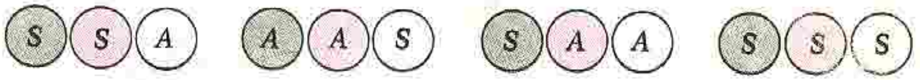
La probabilidad de "obtener as" es

La probabilidad de "obtener trébol" es

La probabilidad de "obtener as o trébol" es

f) *Experimento*: Se lanzan tres monedas, una de oro, una de plata y una de cobre.





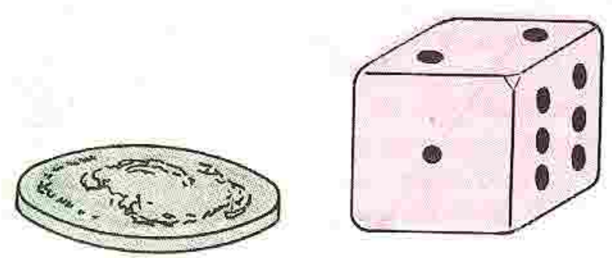
Evento A: "Sacar dos soles" $P(A) =$

Evento B: "Sacar al menos un águila" $P(B) =$

Evento $A \cup B$: "Sacar dos soles o al menos un águila" $P(A \cup B) =$

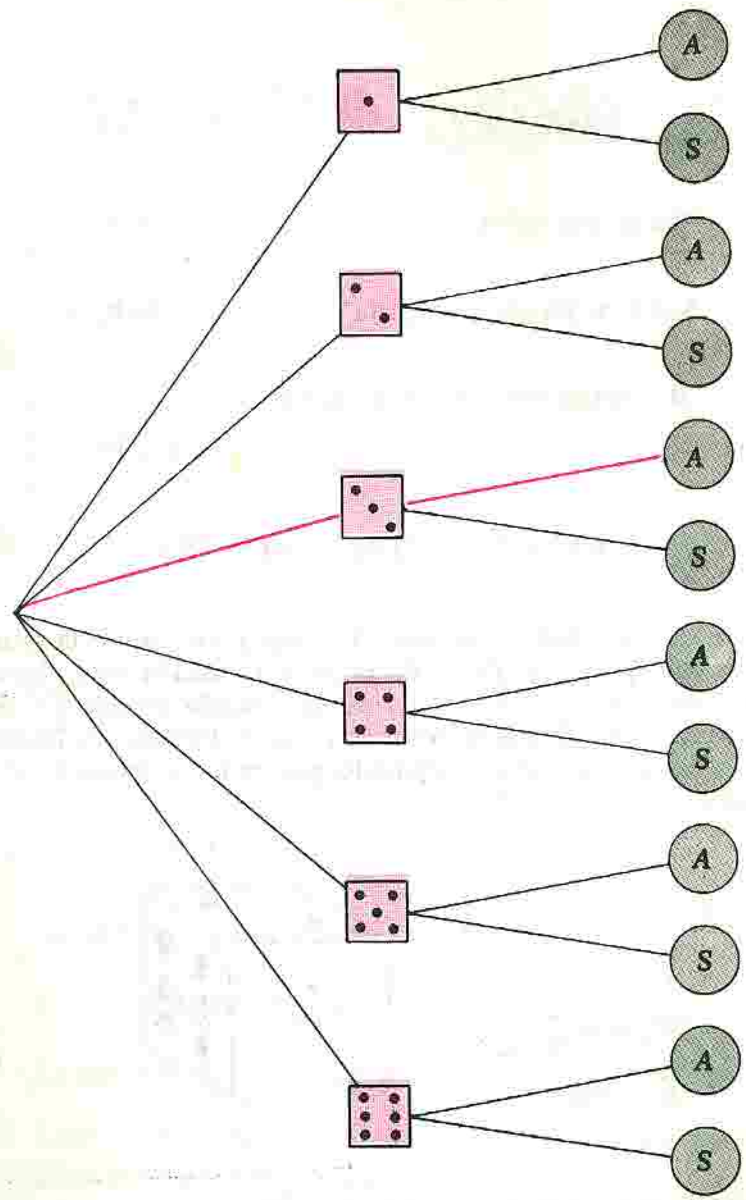
5. EVENTOS INDEPENDIENTES

Si lanzamos un dado y después lanzamos una moneda, parece natural aceptar que el resultado de la primera acción no influye de ninguna manera sobre el resultado de la segunda acción. Es decir, parece natural aceptar que el resultado que se obtenga al lanzar la moneda es *independiente* del resultado que se haya obtenido al lanzar el dado.



Veamos esto con un poco más de detalle.

Los resultados posibles del experimento lanzar un dado y después lanzar una moneda pueden apreciarse fácilmente en el siguiente diagrama.



Si denominamos con A al evento "sacar 3" y con B al evento "sacar águila", podemos denominar al evento "sacar 3 y después águila" con $A \cap B$.

En relación al experimento y de acuerdo con esta notación observe usted que:

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$ (ya que hay 12 resultados equiprobables)

Observe usted que, en particular,

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

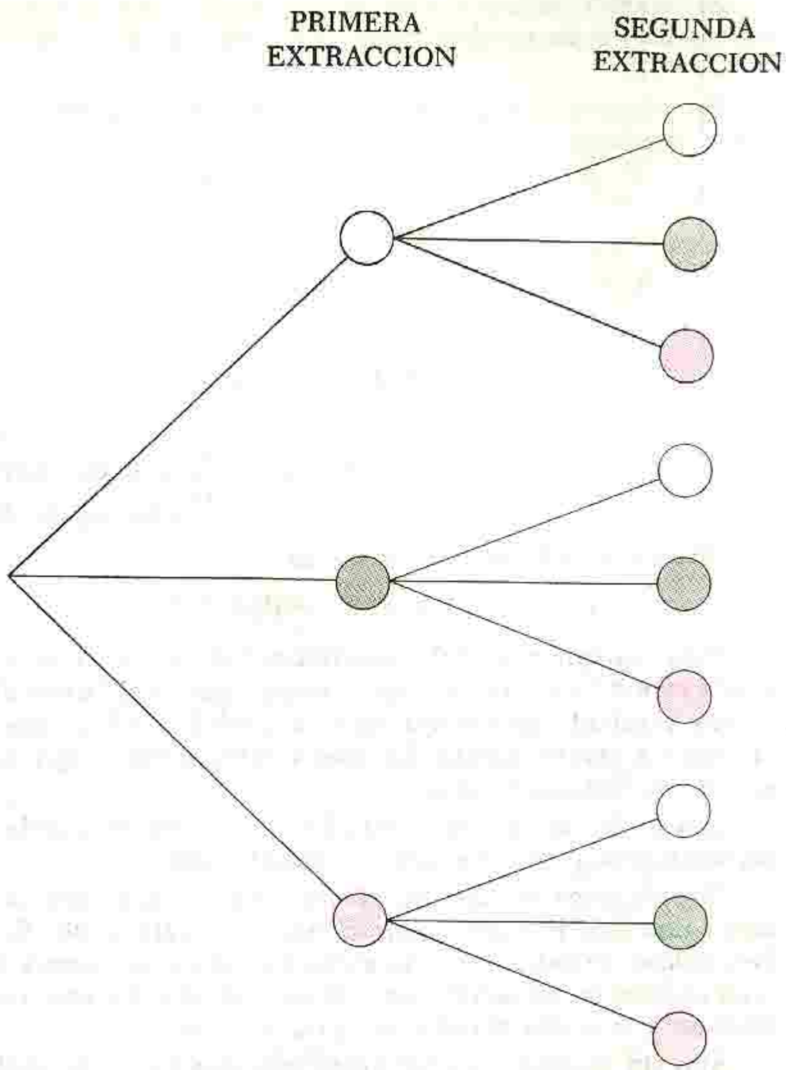
Para reafirmar lo dicho anteriormente diremos que, en relación a este experimento, es razonable aceptar que si al lanzar el dado cae 3, este resultado no influye sobre la probabilidad de que al lanzar la moneda resulte águila. En este sentido decimos que los eventos A y B son independientes.

Con el fin de ir precisando la idea de eventos independientes consideremos ahora el siguiente experimento:

Dispongamos de una bolsa con tres canicas, una blanca, una roja y una gris. El experimento consiste en lo siguiente: Se revuelven las canicas, se extrae una, se anota su color *y se regresa a la bolsa*, nuevamente se revuelven las canicas, se efectúa una segunda extracción y se anota el color de la canica extraída.

Aun sin realizar el experimento podemos hacer un análisis y describir los resultados posibles por medio del diagrama de la Pág. 280

Supongamos que al realizar el experimento descrito anteriormente, en la primera extracción resulta canica blanca; regresamos ésta a la bolsa y efectuamos una segunda extracción donde resulta canica roja. Parece natural aceptar que el resultado de la primera extracción no afecta la probabilidad de obtener canica roja en la segunda extracción. Es decir, parece razonable pensar que los eventos "sacar canica blanca" y después "sacar canica roja" son *independientes*.



Si llamamos A al evento "sacar canica blanca" y B al evento "sacar canica roja" (habiendo regresado la canica del primer evento), podemos designar al evento "sacar canica blanca y después sacar canica roja" con $A \cap B$.

Después de resolver el siguiente ejercicio usted podrá observar que en este caso también se cumple que

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

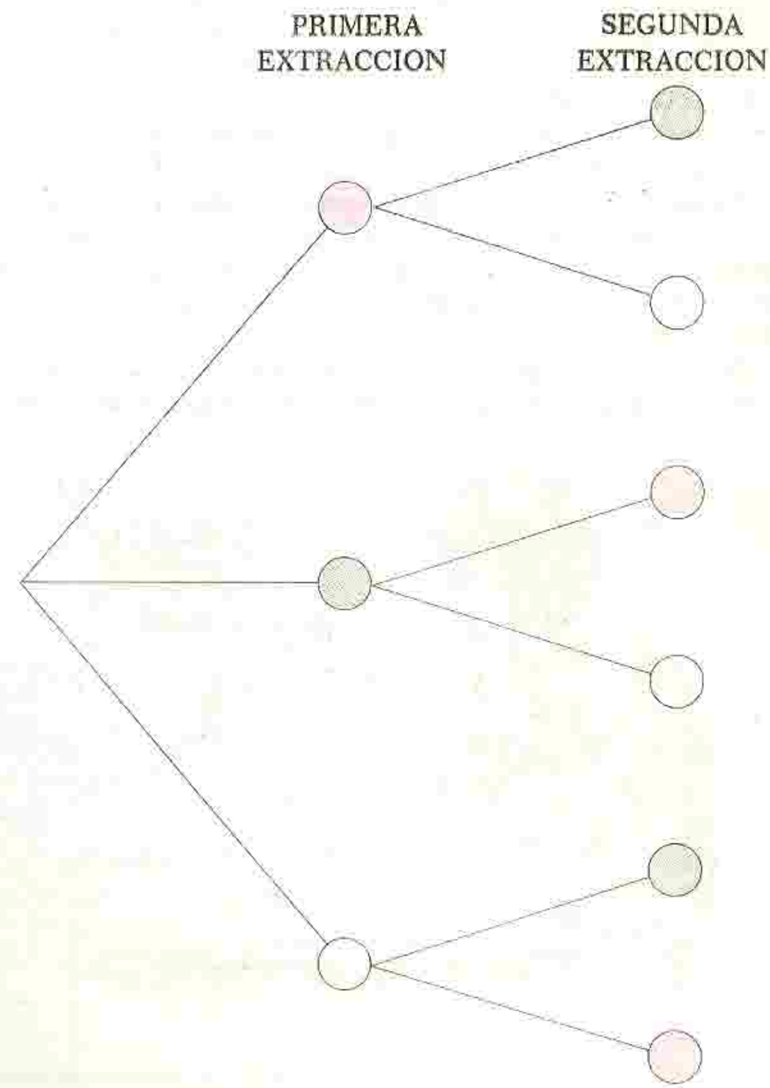
Ejercicio. 19. En relación al experimento anterior y de acuerdo con la notación mencionada, obtenga las siguientes probabilidades

$P(A) =$

$P(B) =$

$P(A) \cdot P(B) =$

$P(A \cap B) =$



Sin perder de vista los resultados de este experimento, consideremos ahora otro experimento parecido.

Dispongamos nuevamente de una bolsa con tres canicas: una roja, una blanca y una gris. El nuevo experimento consiste en revolver las canicas, efectuar una primera extracción y *sin regresar la canica* a la bolsa, realizar una segunda extracción.

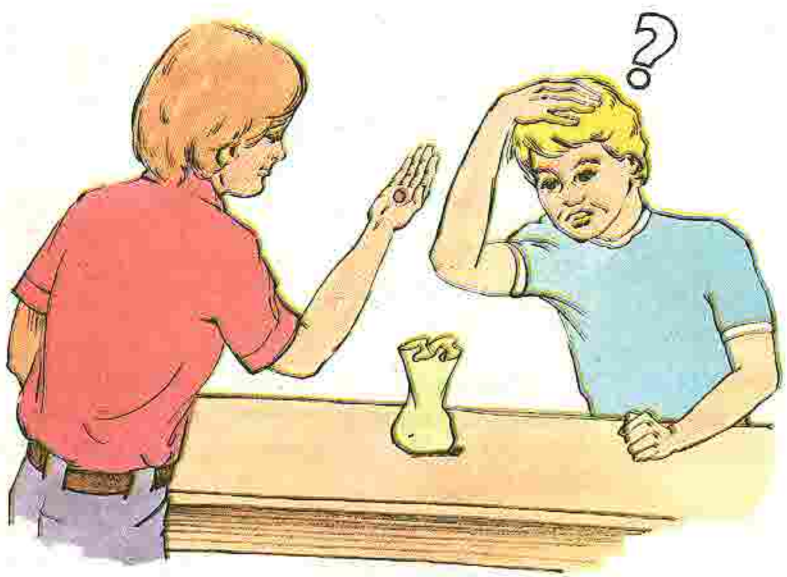
Los resultados posibles de este experimento podemos apreciarlos mejor en el diagrama de la Pág. anterior.

Dése usted cuenta de que en el experimento en que después de la primera extracción se devuelve la canica a la bolsa, los resultados posibles son 9. En cambio en este experimento, como puede usted observar, los resultados son 6.

¿Considera usted que etos 6 resultados son igualmente probables? Discuta la respuesta con su maestro.

Como hicimos en el experimento anterior, llamemos A al evento "sacar canica blanca" en la primera extracción, B al evento "sacar canica roja" en la segunda extracción (sin regresar la canica del primer evento) y $A \cap B$ al evento "sacar canica blanca y después sacar canica roja".

Imagine ahora que una persona realiza el experimento y efectúa la primera extracción, pero no le informa sobre el color de la canica



extraída. ¿Cree usted que el resultado de esta primera extracción influye en la probabilidad de obtener canica roja en la segunda extracción?

Desde luego que sí, ya que, por ejemplo, si en la primera extracción resulta canica roja, esto determina que la probabilidad de obtener canica roja en la segunda extracción sea cero. Es decir, es imposible sacar canica roja en la segunda extracción.

Ejercicio 20. En relación al experimento anterior, determine las siguientes probabilidades ayudándose con el diagrama correspondiente.

$P(A) =$

$P(B) =$

$P(A \cap B) =$

$P(A) \cdot P(B) =$

¿Es en este caso $P(A \cap B)$ igual al producto $P(A) \cdot P(B)$?

Ejercicio 21. Provéase del material necesario y realizando el experimento 50 veces obtenga las probabilidades frecuenciales correspondientes a las probabilidades del ejercicio anterior.

	No. de veces que sucedió el evento	No. de veces que se efectuó el experimento	Probabilidad frecuencial del evento
A			
B			
$A \cap B$			

En los experimentos anteriores como pudo usted apreciar fue fácil intuitivamente darse cuenta de la independencia o la no independencia de algunos eventos; sin embargo, en otros experimentos, como veremos más adelante, esto no es tan fácil.

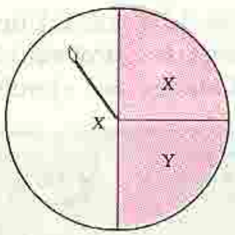
Por ello es conveniente que aceptemos la siguiente definición.

En relación a un experimento al azar, dos eventos sucesivos A y B son independientes si y solamente si

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Esta fórmula será nuestro instrumento para determinar si dos eventos son o no independientes, en situaciones donde no es fácil ni intuitivo determinar esto. Veamos el siguiente experimento.

Se hace girar una vez la manecilla en una carátula como la que se ilustra.



Ahora piense en los eventos "caer en rojo" y "caer en X". Suponga que usted no mira la carátula y que una persona hace girar la manecilla pero no le informa si el resultado fue "caer en rojo". ¿Piensa usted que este resultado influye en la probabilidad del evento "caer en X"? En otras palabras, ¿considera usted que los eventos "caer en rojo" y "caer en X" son independientes?

Es posible que después de pensar un poco usted determine si los eventos son o no independientes, pero desde luego nos damos cuenta de que esto no es fácil.

En casos como éste aplicamos la fórmula

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Llamemos A al evento "caer en rojo", B al evento "caer en X" y $A \cap B$ al evento "caer en rojo y en X".

Observando la carátula determinamos las siguientes probabilidades.

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

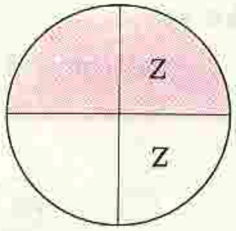
$$P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Ya que $P(A) \cdot P(B)$ es diferente de $P(A \cap B)$, los eventos A y B *no son independientes.*

Ejercicio 22. En una carátula como la que se ilustra se hace girar la manecilla una vez.



Llame A al evento "caer en blanco", B al evento "caer en Z" y $A \cap B$ al evento "caer en blanco y en Z".

Encuentre las probabilidades que a continuación se indican.

$P(A) =$

$P(B) =$

$P(A) \cdot P(B) =$

$P(A \cap B) =$

¿Son los eventos A y B independientes?

Ejercicio 23. En relación al experimento de cada inciso indique si los eventos que se mencionan son o no independientes. Sugerencia: construya los diagramas correspondientes, encuentre $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ y utilice la definición.

a) De una baraja española se extrae una carta al azar.

Evento A: "Sacar oro"

Evento B: "Sacar 7"

b) De una baraja americana se extrae una carta al azar.

Evento A: "Sacar 10"

Evento B: "Sacar 5"

c) Se lanzan dos dados, uno blanco y uno de color.

Evento A: "Sacar 3 con el dado blanco"

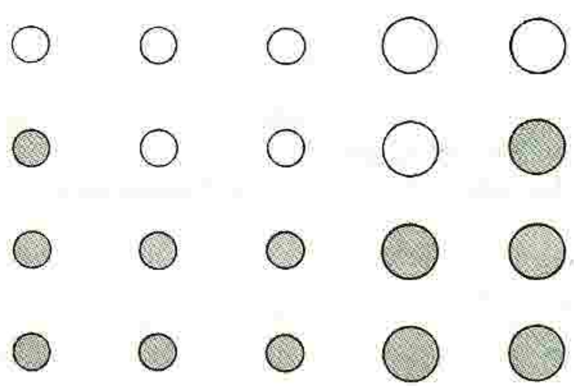
Evento B: "Sacar 5 con el dado de color"

d) Se lanzan 3 monedas

Evento A: "Sacar al menos un águila"

Evento B: "Sacar dos soles"

e) De un conjunto de canicas como el que se ilustra se toma una al azar.



Evento A: "Tomar canica gris"

Evento B: "Tomar canica blanca"

ARISTOTELES DE ESTAGIRA

Filósofo griego del siglo IV A.C., que sentó las bases de la lógica formal, uno de los pilares del pensamiento científico actual

OCTAVA UNIDAD

LOGICA Y CONJUNTOS

En cursos anteriores iniciamos el estudio de las proposiciones. Ya sabemos que. . .

> *Una proposición es un enunciado del que puede decirse si es verdadero o si es falso.*

Por ejemplo, las siguientes son proposiciones. (Diga usted cuál es falsa y cuál es verdadera.)

a) Raúl Capablanca fue campeón de ajedrez.
b) La Constitución que nos rige se promulgó en 1917.
c) El Sol gira alrededor de la Tierra.
d) Quetzalcóatl es un dios en la mitología maya.
e) Las briofitas son plantas que tienen clorofila.
f) El número atómico del sodio (Na) es 8.
g) Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos.
h) Todo número primo es divisible entre 2.
i) La litosfera es la parte líquida de nuestro planeta.
j) Hay vida en el planeta Júpiter.

En cambio, los siguientes enunciados *no* son proposiciones. (Diga usted por qué.)

a) ¡Hola, querida!
b) Trae un libro de la biblioteca.
c) ¡Vámonos a la huelga!
d) ¿Qué edad tienes?
e) Superémonos con el estudio.
f) ¡Feliz año nuevo!
g) El inventó la telegrafía inalámbrica.
h) Fue el primer astronauta que llegó a la Luna.

i) Ellos descubrieron América.
j) x es el cuadrado de 8.
k) $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Recordemos que se acostumbra denotar proposiciones con letras minúsculas del alfabeto.

Así, por ejemplo, podemos denotar la proposición "Raúl Capablanca fue campeón mundial de ajedrez" con la letra p. Esto es, p = "Raúl Capablanca fue campeón mundial de ajedrez".

Recordemos también que *a partir de una o varias proposiciones se pueden formar otras proposiciones utilizando conectivos lógicos.*

Ejemplos.

a) Con la proposición "Los ángulos interiores de todo triángulo suman 180°" se puede formar la proposición: "*Es falso que* los ángulos interiores de todo triángulo suman 180°".
Si llamamos p a la primera proposición, entonces la segunda, que es la *negación* de p, se puede denotar como $\sim p$.

b) A partir de las proposiciones r y s, tales que

r = "La vitamina D es antirraquítica" y
s = "La vitamina D es una sustancia catalizadora",

se puede formar la proposición "La vitamina D es antirraquítica, *y* es una sustancia catalizadora". Esta nueva proposición es una *conjunción* y se puede denotar como $r \wedge s$.

c) Con las proposiciones m y p se puede formar la *disyunción* $m \vee P$:

m = "El Sol es una estrella".
p = "El Sol es centro del Sistema Solar".
$m \vee n$ = "El Sol es una estrella *o* es centro del Sistema Solar".

> *Las proposiciones que se construyen con otras proposiciones y un conectivo lógico son verdaderas o falsas en función de la verdad o falsedad de las proposiciones que las forman y, además, del conectivo que se haya usado.*

A continuación estudiaremos dos tipos de proposiciones que se forman utilizando otras proposiciones ya dadas y nuevos conectivos lógicos.

1. IMPLICACIONES

Tanto en el lenguaje cotidiano, como en el lenguaje científico y técnico encontramos con mucha frecuencia proposiciones como las siguientes:

a) Si Juan estudiara, entonces obtendría buenas calificaciones.
b) Si el Sol fuera una estrella, entonces tendría luz propia.
c) Si los lados de un cuadrilátero $ABCD$ fueran paralelos dos a dos, entonces $ABCD$ sería un paralelogramo.

En Lógica estas proposiciones se formulan de la siguiente manera:

a) *Si* "Juan estudia" *entonces* "Juan aprueba el examen".
b) *Si* "El Sol es una estrella" *entonces* "El Sol tiene luz propia".
c) *Si* "Los lados del cuadrilátero $ABCD$ son paralelos dos a dos" *entonces* "El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo".

Al formularlas en esta forma, observamos que cada una de las proposiciones fue construida con dos proposiciones y el conectivo lógico *si... entonces...*

> *Se da el nombre de* **implicación** *a toda proposición que se construye con otras dos proposiciones y el conectivo si... entonces...*

Ejercicio 1. Señale en cada inciso, las proposiciones que forman la implicación dada.

a) Si fuera primavera, entonces las golondrinas anidarían.
b) Si mi automóvil no tuviera gasolina, entonces no caminaría.
c) Si trabajara más, entonces viviría mejor.
d) Si mi abuelita fuera bicicleta, entonces tendría ruedas. (Expresión popular.)
e) Si el Psicoanálisis fuera una ciencia, entonces Sigmund Freud sería un científico.
f) Si las sales fueran compuestos, entonces el cloruro de sodio sería un compuesto.
g) Si todos los átomos tuvieran valencia $2+$, entonces un átomo de hidrógeno tendría valencia $2+$.
h) Si x fuera 8, entonces $x + 8$ sería el número 16.
i) Si los múltiplos de 35 fueran divisibles entre 3, entonces 105 sería divisible entre 3.

En una implicación se acostumbra llamar *antecedente* y *consecuente* a las proposiciones que la forman.

"Si		entonces		"
	ANTECEDENTE (1a. Proposición)		CONSECUENTE (2a. Proposición)	

Ejercicio 2. En cada implicación del ejercicio anterior indique cuál es el antecedente y cuál el consecuente.

En implicaciones como las que hasta ahora hemos visto se afirma que del antecedente se llega al consecuente, o dicho de otra manera que del antecedente se deduce, se infiere, se concluye, se sigue, el consecuente.

Por ejemplo, en la proposición "Si las sales fueran compuestos entonces el cloruro de sodio sería un compuesto" se está afirmando que partiendo del supuesto "las sales son compuestos" se llega a concluir que "el cloruro de sodio es un compuesto".

La verdad de implicaciones como las que estamos manejando depende de que partiendo del antecedente, y por medio de un razonamiento "correcto", *efectivamente* se llegue al consecuente.

Por ejemplo, la implicación "Si las sales fueran compuestos, entonces el cloruro de sodio sería un compuesto" es verdadera pues partiendo del antecedente llegamos al consecuente con el siguiente razonamiento:

Puesto que suponemos que las sales son compuestos y sabemos que el cloruro de sodio es una sal, *debemos concluir* que el cloruro de sodio es un compuesto.

También es verdadera la implicación "Si los múltiplos de 35 fueran divisibles entre 3, entonces 105 sería divisible entre 3", pues si suponemos que los múltiplos de 35 son divisibles entre 3 y sabemos que 105 es múltiplo de 35, *deducimos* que 105 es divisible entre 3. (En este ejemplo conviene observar que el antecedente de la proposición es falso.)

Ejercicio 3. Muestre usted que las implicaciones a), b), c), d) y g) del ejercicio 1 son verdaderas.

Ahora estamos ya en posibilidad de determinar cuándo una implicación, como las que hemos tratado, es falsa. Una implicación es falsa cuando partiendo del antecedente y razonando "correctamente" no se concluye, no se deduce el consecuente.

Por ejemplo, es falsa la implicación siguiente:

"Si las sales son compuestos, entonces el ácido clorhídrico es un compuesto".

Es falsa porque a partir del supuesto de que las sales son compuestos, *no podemos concluir* que el ácido clorhídrico sea un compuesto, pues sabemos que este ácido no es una sal. (Obsérvese que el ácido mencionado *sí es* un compuesto; pero como este hecho no se deduce del antecedente dado, afirmamos que la implicación es falsa.)

La implicación "si x fuera el número 8, entonces $3x^2 + 5$ sería el número 100" también es falsa porque al suponer que $x = 8$ tendremos entonces que $3x^2 + 5 = 3(8)^2 + 5 = 197$ y 197 *no* es igual a 100.

Ejercicio 4. Señale usted cuál de las siguientes implicaciones es verdadera y cuál es falsa.

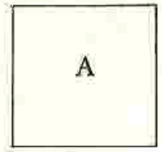
a) Si Júpiter fuera un planeta, entonces Júpiter poseería luz propia.
b) Si las ballenas fueran peces, entonces tendrían agallas.
c) Si todos los animales tuvieran plumas, entonces el hombre poseería plumas.
d) Si los roedores fueran mamíferos, entonces la rata no sería un mamífero.
e) Si el número atómico del uranio fuera 2, entonces el uranio poseería 5 protones en su núcleo.
f) Si la velocidad del sonido fuera de 100 m/seg, entonces una velocidad 5 mach sería de 10 800 km/h.
g) Si $a^2 + b^2$ fuera un polinomio, entonces $a^2 + b^2 + a$ no sería un polinomio.

Ejercicio 5. Tal como se hace en *a*), en cada inciso construya usted una implicación verdadera tomando como consecuente alguna de las proposiciones que se numeran.

a) Si todas las plantas realizaran la fotosíntesis, entonces...

1. Todas las plantas tendrían clorofila.
2. Algunas plantas carecerían de clorofila.

b) Si la figura A fuera un triángulo rectángulo, entonces...



1. la figura A tendría un ángulo recto.
2. la figura A tendría 4 ángulos rectos.

c) Si la expresión "La Luna" fuera una oración, entonces...

1. la expresión "La Luna" sería unimembre.
2. la expresión "La Luna" tendría sujeto y predicado.

d) Si $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, entonces...

1. $a \neq b$
2. $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$

e) Si Caracas fuera la capital de Argentina, entonces...

1. Caracas sería una ciudad argentina.
2. Caracas sería una ciudad venezolana.

f) Si $7 = 4 + 4$, entonces...

1. $7 + 3 = (4 + 4) + 2$.
2. $7 + 1 = (4 + 4) + 1$.

g) Si los helechos fueran angiospermas, entonces...

1. los helechos tendrían flores.
2. los helechos efectuarían la fotosíntesis.

h) Si las gimnospermas carecieran de flores, entonces...

1. los helechos carecerían de flores.
2. los ahuehuetes carecerían de flores.

i) Si los abetos fueran teridofitas, entonces...

1. los abetos se reproducirían por esporas.
2. los abetos no se reproducirían por esporas.

j) Si los Estados Unidos Mexicanos fueran una República centralista, entonces...

1. el estado de Chihuahua sería libre y soberano.
2. el estado de Chihuahua no sería libre y soberano.

k) Si los ángulos de cualquier triángulo sumaran 180°, entonces...

1. un ángulo de cualquier triángulo sería menor que 180°
2. un ángulo de cualquier triángulo sería igual a 180°.

l) Si la velocidad de la luz fuera de 300 000 kilómetros por segundo, entonces...

1. la luz recorrería la distancia de 2 100 000 km en 5 segundos.
2. la luz recorrería la distancia de 2 100 000 km en 7 segundos

m) Si los digitígrados fueran herbívoros, entonces...

1. los leones serían carnívoros.
2. los leones serían herbívoros.

n) Si $5^2 + 1 = 10$, entonces...

1. $2(5^2 + 1) = 20$
2. $5^2 + 1 = 26$.

o) Si a^0 fuera igual a 1, entonces...

1. Aplicando la ley de los exponentes, $\frac{a^m}{a^m} = 1$.
2. $a^0 + a^0 = 0$.

p) Si a^1 fuera igual a 0, entonces...

1. $\frac{a^5}{a^4} = a$.
2. aplicando la ley de los exponentes, $\frac{a^5}{a^4} = 0$.

q) Si el deuterio fuera un isótopo del hidrógeno, entonces...

1. el deuterio tendría número atómico 1.
2. el deuterio sería un material fisionable.

r) Si el nitrógeno tuviera valencia cero, entonces...

1. sería un gas noble.
2. sería un gas inestable.

s) Si al reaccionar una base con un ácido se obtiene una sal, entonces...

1. de la reacción $HCl + NaOH$, resultaría una sal.
2. de la reacción $HCl + NaOH$ se generaría calor.

t) Si los neutrones tuvieran carga eléctrica positiva, entonces . . .

1. los electrones y neutrones se atraerían.
2. los protones y neutrones se atraerían.

Ejercicio 6. Complete usted las siguientes implicaciones de manera que obtenga implicaciones verdaderas.

a) Si todos los enunciados fueran oraciones, entonces

____

b) Si el conjunto A fuera un subconjunto de B, entonces

____

c) Si todos los triángulos fueran rectángulos, entonces

____

d) Si $a^0 = 0$,

entonces ____________________________

e) Si Juan y Pedro fueran hermanos y Roberto y Pedro fueran

primos, entonces ________________________

f) Si los elementos alcalinos fueran metales y el uranio fuera

alcalino, entonces ________________________

g) Si el número atómico del nitrógeno fuera 14, entonces

____

h) Si los protones tuvieran igual carga eléctrica que los electrones,

entonces ____________________________

Habrá usted observado en los ejercicios 4, 5 y 6, que las proposiciones que forman las implicaciones pueden ser verdaderas o falsas y que no hemos utilizado este hecho para determinar el valor de verdad o falsedad de dichas implicaciones. En este curso el único criterio que utilizaremos para saber cuándo una implicación es verdadera o falsa es el que ya hemos señalado.

Sin embargo, conviene conocer una propiedad de las implicaciones *verdaderas* que depende del valor de verdad o falsedad de las proposiciones que las forman. Si realiza usted los ejercicios 7 y 8 siguientes conocerá esa propiedad.

Ejercicio 7. En los ejercicios 4 y 5, determine en cada implicación, las proposiciones que la forman e indique si son verdaderas o falsas. (Discuta los resultados con su maestro y sus compañeros.)

Ejercicio 8. Clasifique usted las implicaciones verdaderas de los ejercicios 4 y 5 en dos grupos: las que tienen antecedente verdadero y las que tienen antecedente falso. Observe usted la verdad o falsedad de los consecuentes en cada grupo y complete usted la siguiente expresión:

En las implicaciones verdaderas observamos que si el antecedente es verdadero, entonces el consecuente es __________ (verdadero, falso) *y nunca se da el caso de que el consecuente sea* __________ (verdadero, falso).

(Observe usted lo que pasa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.)

Esta propiedad de las implicaciones verdaderas que estudiamos vale para cualquier implicación y su conocimiento nos será muy útil al realizar estudios superiores.

Notación

Las implicaciones se simbolizan como en el siguiente ejemplo:

Consideremos la proposición "Si los carnívoros son mamíferos, entonces el león es un mamífero" y simbolicemos con una letra las proposiciones que la forman.

p = "los carnívoros son mamíferos".
q = "el león es un mamífero".

Partiendo de esto, la implicación considerada se simboliza así:

$$\boxed{p \longrightarrow q}$$

(Léase: Si p, entonces q.)

2. EQUIVALENCIAS

En matemáticas se presentan con mucha frecuencia afirmaciones como la siguiente:

$$“\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad = gc.”$$

A expresiones como ésta, que consta de dos proposiciones p y q ligadas por el conectivo lógico “si y sólo si”, se les llama **equivalencias.**

A las equivalencias se les debe considerar como la forma abreviada de indicar una doble implicación. Por ejemplo, con la equivalencia mostrada, en realidad se está afirmando que:

$$“\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } ad = bc \; \boxed{\text{y}} \; \text{si } ad = bc \text{ entonces } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}”.$$

En una equivalencia se afirma que de una proposición p se deduce una proposición q y que de la proposición q se deduce la proposición p.

Ejemplos.

a) La equivalencia

“$a = b + c$ *si y sólo si* $a + m = (b + c) + m$”

es una forma abreviada de la proposición

“*Si* $a = b + c$ *entonces* $a + m = (b + c) + m$ y *si* $a + m = (b + c) + m$ *entonces* $a = b + c$”.

b) Al decir que “La plata tiene la misma valencia que el carbono *si y sólo si* la plata tiene valencia 4”, se está afirmando que “*Si* la plata tuviera la misma valencia del carbono, *entonces* la plata tendría valencia 4 y que *si* la plata tuviera valencia 4, *entonces* tendría la misma valencia del carbono”.

c) Afirmar que “Los animales son peces *si y sólo si* los animales tienen branquias”, equivale a afirmar que “*Si* los animales fueran peces, *entonces* los animales tendrían branquias y *si* los animales tuvieran branquias, *entonces* serían peces”.

Ejercicio. 9. Exprese las siguientes equivalencias por medio de implicaciones.

a) “El Sol es un planeta *si y sólo si* el Sol carece de luz propia”

“

y ”

b) “Los números primos son pares *si y sólo si* los números primos son divisibles entre 2”.

“

y ”

c) “Un movimiento es uniforme *si y sólo si* en ese movimiento se recorren distancias iguales en tiempos iguales”.

“

y ”

d) “Los pinos son gimnospermas *si y sólo si* los pinos tienen flores”.

“

y ”

e) “El sonido recorre 1 720 metros en 5 segundos *si y sólo si* el sonido recorre 2 408 en 7 segundos

“

y ”

f) “El rosal efectúa la fotosíntesis *si y sólo si* el rosal tiene clorofila”.

“

y ”

g) “Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes *si y sólo si* los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen 2 ángulos congruentes”.

“

y ”

h) "Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes *si y sólo si* los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen dos ángulos congruentes".

“ ______________________________

$\boxed{y}$ ______________________________ ”

i) "Una persona está bien nutrida *si y sólo si* una persona recibe una alimentación bien balanceada".

“ ______________________________

$\boxed{y}$ ______________________________ ”

j) "Un triángulo ABC es equilátero *si y sólo si* el triángulo ABC tiene 2 lados congruentes".

“ ______________________________

$\boxed{y}$ ______________________________ ”

k) "$a > 5$ *si y sólo si* $a \neq 5$".

“ ______________________________

$\boxed{y}$ ______________________________ ”

l) "Dos ángulos son opuestos por el vértice *si y sólo si* son congruentes".

“ ______________________________

$\boxed{y}$ ______________________________ ”

m) "El cuadrilátero $ABCD$ es cuadrado *si y sólo si* el cuadrilátero $ABCD$ tiene 4 lados congruentes".

“ ______________________________

$\boxed{y}$ ______________________________ ”

n) $a^0 = 1$ *si y sólo si* $\frac{a^m}{a^m} = a^0$".

“ ______________________________

$\boxed{y}$ ______________________________ ”

o) "El triángulo de lados a, b, c, es rectángulo *si y sólo si* en el triángulo de lados a, b, c, se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$".

“ ______________________________

$\boxed{y}$ ______________________________ ”

p) "$A \subset B$ y $B \subset A$ *si y sólo si* $A = B$".

“ ______________________________

$\boxed{y}$ ______________________________ ”

q) "$x^2 - x + 6 = 0$ *si y sólo si* $(x + 2)(x - 3) = 0$".

“ ______________________________

$\boxed{y}$ ______________________________ ”

Habrá usted observado, al trabajar con las equivalencias anteriores, que en ellas se afirma que son verdaderas las implicaciones que las forman.

Es decir, al afirmar que p *si y sólo si* q, estamos afirmando que de p se sigue q y de q se sigue p.

Por supuesto, si esto se cumple, entonces la equivalencia será verdadera y si alguna de las implicaciones no es verdadera, entonces la equivalencia será falsa.

Ejemplos.

a) Analicemos la equivalencia

"$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *si y sólo si* $ad = bc$".

En ella afirmamos que:

"*Si* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *entonces* $ad = bc$ $\boxed{\text{y}}$ *si* $ad = bc$ *entonces* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$".

La primera implicación "*Si* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *entonces* $ad = bc$" es verdadera:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	(ANTECEDENTE)
$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$	(Multiplicando ambos miembros de la igualdad por bd)
$\frac{a\cancel{b}d}{\cancel{b}} = \frac{cb\cancel{d}}{\cancel{d}}$	(Efectuando la multiplicación y cancelando)
$ad = bc$	(CONSECUENTE)

La segunda implicación "*Si* $ad = bc$ *entonces* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$" también es verdadera:

$ad = bc$	(ANTECEDENTE)
$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$	(Dividiendo ambos miembros de la igualdad entre bd)
$\frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}} = \frac{\cancel{b}c}{\cancel{b}d}$	(Cancelando)
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	(CONSECUENTE)

En virtud de que *las dos implicaciones son verdaderas*, la equivalencia que estamos analizando es *verdadera*.

b) Veamos ahora si la equivalencia "$5 = 4 + 3$ *si y sólo si* $10 = 14$" es verdadera o falsa.

Esta equivalencia se puede expresar así:

"*Si* $5 = 4 + 3$, *entonces* $10 = 14$ $\boxed{\text{y}}$ *si* $10 = 14$, *entonces* $5 = 4 + 3$".

La implicación "*Si* $5 = 4 + 3$ *entonces* $10 = 14$", es verdadera:

$5 = 4 + 3$	(ANTECEDENTE)
$5 \cdot 2 = (4 + 3) \cdot 2$	(Multiplicando ambos miembros de la igualdad por 2)
$10 = 14$	(CONSECUENTE)

También es verdadera la implicación "*Si* $10 = 14$, *entonces* $5 = 4 + 3$.

$10 = 14$	(ANTECEDENTE)
$\frac{10}{2} = \frac{14}{2}$	(Dividiendo ambos miembros de la igualdad entre 2)
$5 = 7$	
$5 = 4 + 3$	(CONSECUENTE)

Por consiguiente, la equivalencia dada es *verdadera*.

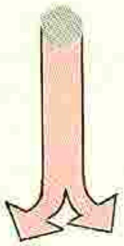
c) La equivalencia "El cuadrilátero *ABCD* es cuadrado *si y sólo si* el cuadrilátero *ABCD* tiene 4 lados congruentes" se puede expresar con la proposición "*Si* el cuadrilátero *ABCD* es cuadrado, *entonces* el cuadrilátero *ABCD* tiene 4 lados congruentes $\boxed{\text{y}}$ *si* el cuadrilátero *ABCD* tiene cuatro lados congruentes, *entonces* el cuadrilátero *ABCD* es cuadrado". Investiguemos su verdad o falsedad.

"*Si* el cuadrilátero *ABCD* fuera cuadrado, *entonces* el cuadrilátero *ABCD* tendría cuatro lados congruentes".

"El cuadrilátero *ABCD* es cuadrado"	(ANTECEDENTE)
Los cuadrados tienen 4 lados congruentes.	
"El cuadrilátero *ABCD* tiene 4 lados congruentes".	(CONSECUENTE)

La implicación es *verdadera*.

"*Si* el cuadrilátero $ABCD$ tuviera 4 lados congruentes, *entonces* el cuadrilátero $ABCD$ sería cuadrado".



"El cuadrilátero $ABCD$ tiene 4 lados congruentes". (ANTECEDENTE)

Los cuadriláteros de 4 lados pueden ser cuadrados o rombos. Por lo tanto, *no estamos obligados* a aceptar que:

"El cuadrilátero $ABCD$ es cuadrado" (CONSECUENTE)

La implicación es *falsa*.

Ahora bien, como una de las implicaciones resultó *falsa*, entonces la equivalencia es *falsa*.

Ejercicio 10. Determine la verdad o falsedad de las equivalencias del ejercicio anterior.

Notación: Una equivalencia con proposiciones p y q que se acostumbra denotar así:

$$p \longleftrightarrow q$$

(Léase: p *si y sólo si* q)

Ejercicio 11. Indique el significado de la siguiente expresión:

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

En las equivalencias $p \leftrightarrow q$, que llevamos vistas hasta aquí hemos determinado su verdad o falsedad considerando el valor de verdad o falsedad de $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$ y no el valor lógico de p y de q.

En cursos anteriores se definirán los valores lógicos de las equivalencias directamente a partir de la verdad o falsedad de sus proposiciones p y q y esa definición resultará comprensible si se domina el contenido de esta unidad.

Las implicaciones y las equivalencias son de uso fundamental en las matemáticas: los axiomas, los teoremas y las definiciones son, esencialmente, implicaciones o equivalencias.

APENDICES

RAICES CUADRADAS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											SUMAR								
10	1000	1005	1010	1015	1020	1025	1030	1034	1039	1044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	3162	3178	3194	3209	3225	3240	3256	3271	3286	3302	2	3	5	6	8	10	11	13	14
11	1049	1054	1058	1063	1068	1072	1077	1082	1086	1091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	3317	3332	3347	3362	3376	3391	3406	3421	3435	3450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12	1095	1100	1105	1109	1114	1118	1122	1127	1131	1136	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	3464	3479	3493	3507	3521	3536	3550	3564	3578	3592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13	1140	1145	1149	1153	1158	1162	1166	1170	1175	1179	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	3606	3619	3633	3647	3661	3674	3688	3701	3715	3728	1	3	4	6	7	8	10	11	13
14	1183	1187	1192	1196	1200	1204	1208	1212	1217	1221	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	3742	3755	3768	3782	3795	3808	3821	3834	3847	3860	1	3	4	5	7	8	9	10	12
15	1225	1229	1233	1237	1241	1245	1249	1253	1257	1261	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	3873	3886	3899	3912	3924	3937	3950	3962	3975	3987	1	3	4	5	6	8	9	10	12
16	1265	1269	1273	1277	1281	1285	1288	1292	1296	1300	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	4000	4012	4025	4037	4050	4062	4074	4087	4099	4111	1	2	4	5	6	7	8	10	11
17	1304	1308	1311	1315	1319	1323	1327	1330	1334	1338	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	4123	4135	4147	4159	4171	4183	4195	4207	4219	4231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18	1342	1345	1349	1353	1356	1360	1364	1367	1371	1375	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	4243	4254	4266	4278	4290	4301	4313	4324	4336	4347	1	2	4	5	6	7	8	10	11
19	1378	1382	1386	1389	1393	1396	1400	1404	1407	1411	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	4359	4370	4382	4393	4405	4416	4427	4438	4450	4461	1	2	3	4	6	7	8	9	10
20	1414	1418	1421	1425	1428	1432	1435	1439	1442	1446	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	4472	4483	4494	4506	4517	4528	4539	4550	4561	4572	1	2	3	4	6	7	8	9	10
21	1449	1453	1456	1459	1463	1466	1470	1473	1476	1480	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	4583	4593	4604	4615	4626	4637	4648	4658	4669	4680	1	2	3	4	5	7	8	9	10
22	1483	1487	1490	1493	1497	1500	1503	1507	1510	1513	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	4690	4701	4712	4722	4733	4743	4754	4764	4775	4785	1	2	3	4	5	7	8	9	10
23	1517	1520	1523	1526	1530	1533	1536	1539	1543	1546	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	4796	4806	4817	4827	4837	4848	4858	4868	4879	4889	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	1549	1552	1556	1559	1562	1565	1568	1572	1575	1578	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	4899	4909	4919	4930	4940	4950	4960	4970	4980	4990	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	1581	1584	1587	1591	1594	1597	1600	1603	1606	1609	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	5000	5010	5020	5030	5040	5050	5060	5070	5079	5089	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26	1612	1616	1619	1622	1625	1628	1631	1634	1637	1640	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	5099	5109	5119	5128	5138	5148	5158	5167	5177	5187	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	1643	1646	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	5196	5206	5215	5225	5235	5244	5254	5263	5273	5282	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	5292	5301	5310	5320	5329	5339	5348	5357	5367	5376	1	2	3	4	5	5	6	7	8
29	1703	1706	1709	1712	1715	1718	1720	1723	1726	1729	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5385	5394	5404	5413	5422	5431	5441	5450	5459	5468	1	2	3	4	5	5	6	7	8
30	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5477	5486	5495	5505	5514	5523	5532	5541	5550	5559	1	2	3	4	5	5	6	7	8

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											SUMAR								
31	1761	1764	1766	1769	1772	1775	1778	1780	1783	1786	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5568	5577	5586	5595	5604	5612	5621	5630	5639	5648	1	2	3	4	4	5	6	7	8
32	1789	1792	1794	1797	1800	1803	1806	1808	1811	1814	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5657	5666	5675	5683	5692	5701	5710	5718	5727	5736	1	2	3	4	4	5	6	7	8
33	1817	1819	1822	1825	1828	1830	1833	1836	1838	1841	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5745	5753	5762	5771	5779	5788	5797	5805	5814	5822	1	2	3	4	4	5	6	7	8
34	1844	1847	1849	1852	1855	1857	1860	1863	1865	1868	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5831	5840	5848	5857	5865	5874	5882	5891	5899	5908	1	2	3	4	4	5	6	7	8
35	1871	1873	1876	1879	1881	1884	1887	1889	1892	1895	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5916	5925	5933	5941	5950	5958	5967	5975	5983	5992	1	2	2	3	4	5	6	6	7
36	1897	1900	1903	1905	1908	1910	1913	1916	1918	1921	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	6000	6008	6017	6025	6033	6042	6050	6058	6066	6075	1	2	2	3	4	5	6	6	7
37	1924	1926	1929	1931	1934	1936	1939	1942	1944	1947	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	6083	6091	6099	6107	6116	6124	6132	6140	6148	6156	1	2	2	3	4	5	6	6	7
38	1949	1952	1954	1957	1960	1962	1965	1967	1970	1972	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	6164	6173	6181	6189	6197	6205	6213	6221	6229	6237	1	2	2	3	4	5	6	6	7
39	1975	1977	1980	1982	1985	1987	1990	1992	1995	1997	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6245	6253	6261	6269	6277	6285	6293	6301	6309	6317	1	2	2	3	4	5	6	6	7
40	2000	2002	2005	2007	2010	2012	2015	2017	2020	2022	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6325	6332	6340	6348	6356	6364	6372	6380	6387	6395	1	2	2	3	4	5	6	6	7
41	2025	2027	2030	2032	2035	2037	2040	2042	2045	2047	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6403	6411	6419	6427	6434	6442	6450	6458	6465	6473	1	2	2	3	4	5	6	6	7
42	2049	2052	2054	2057	2059	2062	2064	2066	2069	2071	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6481	6488	6496	6504	6512	6519	6527	6535	6542	6550	1	2	2	3	4	5	6	6	7
43	2074	2076	2078	2081	2083	2086	2088	2090	2093	2095	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6557	6565	6573	6580	6588	6595	6603	6611	6618	6626	1	2	2	3	4	5	6	6	7
44	2098	2100	2102	2105	2107	2110	2112	2114	2117	2119	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6633	6641	6648	6656	6663	6671	6678	6686	6693	6701	1	2	2	3	4	5	6	6	7
45	2121	2124	2126	2128	2131	2133	2135	2138	2140	2142	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6708	6716	6723	6731	6738	6745	6753	6760	6768	6775	1	1	2	3	4	4	5	6	6
46	2145	2147	2149	2152	2154	2156	2159	2161	2163	2166	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6782	6790	6797	6804	6812	6819	6826	6834	6841	6848	1	1	2	3	4	4	5	6	6
47	2168	2170	2173	2175	2177	2179	2182	2184	2186	2189	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6856	6863	6870	6877	6885	6892	6899	6907	6914	6921	1	1	2	3	4	4	5	6	6
48	2191	2193	2195	2198	2200	2202	2205	2207	2209	2211	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6928	6935	6943	6950	6957	6964	6971	6979	6986	6993	1	1	2	3	4	4	5	6	6
49	2214	2216	2218	2220	2223	2225	2227	2229	2232	2234	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7000	7007	7014	7021	7029	7036	7043	7050	7057	7064	1	1	2	3	4	4	5	6	6
50	2236	2238	2241	2243	2245	2247	2249	2252	2254	2256	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7071	7078	7085	7092	7099	7106	7113	7120	7127	7134	1	1	2	3	4	4	5	6	6
51	2258	2261	2263	2265	2267	2269	2272	2274	2276	2278	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7141	7148	7155	7162	7169	7176	7183	7190	7197	7204	1	1	2	3	4	4	5	6	6
52	2280	2283	2285	2287	2289	2291	2293	2296	2298	2300	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7211	7218	7225	7232	7239	7246	7253	7259	7266	7273	1	1	2	3	3	4	5	6	6
53	2302	2304	2307	2309	2311	2313	2315	2317	2319	2322	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7280	7287	7294	7301	7308	7314	7321	7328	7335	7342	1	1	2	3	3	4	5	6	6

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											SUMAR								
54	2324	2326	2328	2330	2332	2335	2337	2339	2341	2343	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7348	7355	7362	7369	7376	7382	7389	7396	7403	7409	1	1	2	3	3	4	5	6	6
55	2345	2347	2349	2352	2354	2356	2358	2360	2362	2364	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7416	7423	7430	7436	7443	7450	7457	7463	7470	7477	1	1	2	3	3	4	5	6	6
56	2366	2369	2371	2373	2375	2377	2379	2381	2383	2385	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7483	7490	7497	7503	7510	7517	7523	7530	7537	7543	1	1	2	3	3	4	5	6	6
57	2387	2390	2392	2394	2396	2398	2400	2402	2404	2406	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7550	7556	7563	7570	7576	7583	7589	7596	7603	7609	1	1	2	3	3	4	5	6	6
58	2408	2410	2412	2415	2417	2419	2421	2423	2425	2427	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7616	7622	7629	7635	7642	7649	7655	7662	7668	7675	1	1	2	2	3	4	4	5	5
59	2429	2431	2433	2435	2437	2439	2441	2443	2445	2447	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7681	7688	7694	7701	7707	7714	7720	7727	7733	7740	1	1	2	2	3	4	4	5	5
60	2449	2452	2454	2456	2458	2460	2462	2464	2466	2468	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7746	7752	7759	7765	7772	7778	7785	7791	7797	7804	1	1	2	2	3	4	4	5	5
61	2470	2472	2474	2476	2478	2480	2482	2484	2486	2488	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7810	7817	7823	7829	7836	7842	7849	7855	7861	7868	1	1	2	2	3	4	4	5	5
62	2490	2492	2494	2496	2498	2500	2502	2504	2506	2508	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7874	7880	7887	7893	7899	7906	7912	7918	7925	7931	1	1	2	2	3	4	4	5	5
63	2510	2512	2514	2516	2518	2520	2522	2524	2526	2528	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7937	7944	7950	7956	7962	7969	7975	7981	7987	7994	1	1	2	2	3	4	4	5	5
64	2530	2532	2534	2536	2538	2540	2542	2544	2546	2548	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8000	8006	8012	8019	8025	8031	8037	8044	8050	8056	1	1	2	2	3	4	4	5	5
65	2550	2551	2553	2555	2557	2559	2561	2563	2565	2567	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8062	8068	8075	8081	8087	8093	8099	8106	8112	8118	1	1	2	2	3	4	4	5	5
66	2569	2571	2573	2575	2577	2579	2581	2583	2585	2587	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8124	8130	8136	8142	8149	8155	8161	8167	8173	8179	1	1	2	2	3	4	4	5	5
67	2588	2590	2592	2594	2596	2598	2600	2602	2604	2606	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8185	8191	8198	8204	8210	8216	8222	8228	8234	8240	1	1	2	2	3	4	4	5	5
68	2608	2610	2612	2613	2615	2617	2619	2621	2623	2625	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8246	8252	8258	8264	8270	8276	8283	8289	8295	8301	1	1	2	2	3	4	4	5	5
69	2627	2629	2631	2632	2634	2636	2638	2640	2642	2644	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8307	8313	8319	8325	8331	8337	8343	8349	8355	8361	1	1	2	2	3	4	4	5	5
70	2646	2648	2650	2651	2653	2655	2657	2659	2661	2663	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8367	8373	8379	8385	8390	8396	8402	8408	8414	8420	1	1	2	2	3	4	4	5	5
71	2665	2666	2668	2670	2672	2674	2676	2678	2680	2681	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8426	8432	8438	8444	8450	8456	8462	8468	8473	8479	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	2683	2685	2687	2689	2691	2693	2694	2696	2698	2700	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8485	8491	8497	8503	8509	8515	8521	8526	8532	8538	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	2702	2704	2706	2707	2709	2711	2713	2715	2717	2718	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8544	8550	8556	8562	8567	8573	8579	8585	8591	8597	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	2720	2722	2724	2726	2728	2729	2731	2733	2735	2737	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8602	8608	8614	8620	8626	8631	8637	8643	8649	8654	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	2739	2740	2742	2744	2746	2748	2750	2751	2753	2755	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8660	8666	8672	8678	8683	8689	8695	8701	8706	8712	1	1	2	2	3	4	4	5	5
76	2757	2759	2760	2762	2764	2766	2768	2769	2771	2773	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8718	8724	8729	8735	8741	8746	8752	8758	8764	8769	1	1	2	2	3	4	4	5	5

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SUMAR								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
77	2775	2777	2778	2780	2782	2784	2786	2787	2789	2791	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8775	8781	8786	8792	8798	8803	8809	8815	8820	8826	1	1	2	2	3	4	4	5	5
78	2793	2795	2796	2798	2800	2802	2804	2805	2807	2809	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8832	8837	8843	8849	8854	8860	8866	8871	8877	8883	1	1	2	2	3	4	4	5	5
79	2811	2812	2814	2816	2818	2820	2821	2823	2825	2827	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8888	8894	8899	8905	8911	8916	8922	8927	8933	8939	1	1	2	2	3	4	4	5	5
80	2828	2830	2832	2834	2835	2837	2839	2841	2843	2844	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8944	8950	8955	8961	8967	8972	8978	8983	8989	8994	1	1	2	2	3	4	4	5	5
81	2846	2848	2850	2851	2853	2855	2857	2858	2860	2862	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9000	9006	9011	9017	9022	9028	9033	9039	9044	9050	1	1	2	2	3	4	4	5	5
82	2864	2865	2867	2869	2871	2872	2874	2876	2877	2879	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9055	9061	9066	9072	9077	9083	9088	9094	9099	9105	1	1	2	2	3	4	4	5	5
83	2881	2883	2884	2886	2888	2890	2891	2893	2895	2897	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9110	9116	9121	9127	9132	9138	9143	9149	9154	9160	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	2898	2900	2902	2903	2905	2907	2909	2910	2912	2914	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9165	9171	9176	9182	9187	9192	9198	9203	9209	9214	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	2915	2917	2919	2921	2922	2924	2926	2927	2929	2931	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9220	9225	9230	9236	9241	9247	9252	9257	9263	9268	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	2933	2934	2936	2938	2939	2941	2943	2944	2946	2948	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9274	9279	9284	9290	9295	9301	9306	9311	9317	9322	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	2950	2951	2953	2955	2956	2958	2960	2961	2963	2965	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9327	9333	9338	9343	9349	9354	9359	9365	9370	9375	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88	2966	2968	2970	2972	2973	2975	2977	2978	2980	2982	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9381	9386	9391	9397	9402	9407	9413	9418	9423	9429	1	1	2	2	3	3	4	4	5
89	2983	2985	2987	2988	2990	2992	2993	2995	2997	2998	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9434	9439	9445	9450	9455	9460	9466	9471	9476	9482	1	1	2	2	3	3	4	4	5
90	3000	3002	3003	3005	3007	3008	3010	3012	3013	3015	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9487	9492	9497	9503	9508	9513	9518	9524	9529	9534	1	1	2	2	3	3	4	4	5
91	3017	3018	3020	3022	3023	3025	3027	3028	3030	3032	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9539	9545	9550	9555	9560	9566	9571	9576	9581	9586	1	1	2	2	3	3	4	4	5
92	3033	3035	3036	3038	3040	3041	3043	3045	3046	3048	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9592	9597	9602	9607	9612	9618	9623	9628	9633	9638	1	1	2	2	3	3	4	4	5
93	3050	3051	3053	3055	3056	3058	3059	3061	3063	3064	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9644	9649	9654	9659	9664	9670	9675	9680	9685	9690	1	1	2	2	3	3	4	4	5
94	3066	3068	3069	3071	3072	3074	3076	3077	3079	3081	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9695	9701	9706	9711	9716	9721	9726	9731	,737	9742	1	1	2	2	3	3	4	4	5
95	3082	3084	3085	3087	3089	3090	3092	3094	3095	3097	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9747	9752	9757	9762	9767	9772	9778	9783	9788	9793	1	1	2	2	3	3	4	4	5
96	3098	3100	3102	3103	3105	3106	3108	3110	3111	3113	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9798	9803	9808	9813	9818	9823	9829	9834	9839	9844	1	1	2	2	3	3	4	4	5
97	3114	3116	3118	3119	3121	3122	3124	3126	3127	3129	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9849	9854	9859	9864	9869	9874	9879	9884	9889	9894	1	1	2	2	3	3	4	4	5
98	3130	3132	3134	3135	3137	3138	3140	3142	3143	3145	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9899	9905	9910	9915	9920	9925	9930	9935	9940	9945	1	1	2	2	3	3	4	4	5
99	3146	3148	3150	3151	3153	3154	3156	3158	3159	3161	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9950	9955	9960	9965	9970	9975	9980	9985	9990	9995	1	1	2	2	3	3	4	4	5

ESTA IMPRESION DE 40,000 EJEMPLARES SE TERMINO EN AGOSTO DE 1979, EN LOS TALLERES DE LA CIA. EDITORIAL CONTINENTAL, S. A., MEXICO